ATTI

DELLA

ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCLVII

1960

SERIE OTTAVA

RENDICONTI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

VOLUME XXIX

(2° semestre 1960)

ROMA

ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

1960

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Ferie 1960 Luglio–Agosto

NOTE DI SOCI

(Ogni Nota porta a pie' di pagina la data di arrivo o di presentazione)

Magnetofluidodinamica. — *Sulle superficie d'onda in magnetofluidodinamica*. Nota (*) II del Corrisp. CATALDO AGOSTINELLI.

3. Facendo seguito alla Nota I, e seguendo la stessa numerazione delle formule, in questa seconda Nota considero un caso particolarmente notevole in cui l'equazione della superficie d'onda può essere ottenuta esplicitamente in termini finiti. Esso è quello in cui la velocità $\mathbf{V}_a$ delle onde di Alfvèn è costante in grandezza e direzione, e la velocità $\mathbf{V}_s$ del suono è pure costante, come avviene in un gas isotermo. In questo caso la (25) è della forma

$$p_0 + \mathrm{H}(p_1, p_2, p_3) = 0, \tag{27}$$

e riferendoci alle superficie d'onda *epicentrali*, le coordinate di un punto Q che descrive la superficie d'onda in un istante t generico risultano date da

$$x_i = \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_i} t \qquad (i = 1, 2, 3),$$

e si tratta di superficie che vanno espandendosi omoteticamente col tempo. Basta considerare quindi quella che si ha per $t = 1$. Si ha allora

$$x_i = \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_i} \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{28}$$

Essendo l'hamiltoniana H omogenea di 1° grado nella p_i, le sue derivate parziali $\partial \mathrm{H}/\partial p_i$ risultano omogenee di grado zero nelle p_i. Allora i secondi membri

(*) Presentata nella seduta del 7 giugno 1960.

della (28) si possono far dipendere da due soli parametri che sono i rapporti di due delle p_i alla terza. L'eliminazione di questi parametri dà in termini finiti l'equazione della superficie d'onda. Ma questa eliminazione risulta oltremodo difficile e complicata, per cui risolverò la questione applicando un procedimento in parte geometrico e in parte algebrico.
Poiché $H = -p_0$, possiamo scrivere ancora

$$x_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = -\frac{\partial p_0}{\partial x_i}, \quad \text{cioè } Q - O = -\operatorname{grad}_{\boldsymbol{p}} p_0, \qquad (\boldsymbol{p} = \operatorname{grad} \varphi),$$

essendo O l'origine degli assi (epicentro), e Q il punto che descrive la superficie d'onda. Ma è $p_0 = -Vg$, con $g = \text{mod } \boldsymbol{p} = \text{mod grad } \varphi$, perciò

$$Q - O = \operatorname{grad}_{\boldsymbol{p}} (Vg) = V \operatorname{grad}_{\boldsymbol{p}} g + g \operatorname{grad}_{\boldsymbol{p}} V .$$

D'altra parte dalla $g^2 = \boldsymbol{p}^2$, si ha

$$dg = \frac{\boldsymbol{p}}{g} \times d\boldsymbol{p} \quad , \quad \operatorname{grad}_{\boldsymbol{p}} g = \frac{\boldsymbol{p}}{g} = \boldsymbol{n} .$$

Il vettore $\operatorname{grad}_{\boldsymbol{p}} g$ è dunque vettore unitario diretto secondo la normale alla superficie d'onda. Ne segue

$$(29) \qquad Q - O = V \frac{\boldsymbol{p}}{g} + g \operatorname{grad}_{\boldsymbol{p}} V,$$

nella quale occorrerà esprimere il vettore $\operatorname{grad}_{\boldsymbol{p}} V$ per mezzo del vettore $\boldsymbol{p}$. Per questo osserviamo che introducendo la diade $x = H(\mathbf{V}_a, \mathbf{V}_a)$, risulta

$$(\boldsymbol{p} \times \mathbf{V}_a)^2 = H(\mathbf{V}_a, \mathbf{V}_a)\, \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{p} = x \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{p} ,$$

e pertanto l'equazione (22), ove si ponga $p_0 = -Vg$, e si dividano ambo i membri per $g^2 = \boldsymbol{p}^2$, si può scrivere nella forma

$$(30) \qquad \boldsymbol{p} \times \{V^2 [V^2 - (V_a^2 + V_s^2)] + V_s^2 x\} \boldsymbol{p} = 0 ,$$

la quale lega la funzione scalare V (velocità di propagazione del fronte di onda) col vettore $\boldsymbol{p}$. Differenziando ambo i membri della (30), e osservando che $dV = \operatorname{grad}_{\boldsymbol{p}} V \times d\boldsymbol{p}$, si ottiene

$$\{[V^2 (V^2 - V_a^2 - V_s^2) + V_s^2 x]\, \boldsymbol{p} + \boldsymbol{p}^2 (2V^2 - V_a^2 - V_s^2) V \operatorname{grad}_{\boldsymbol{p}} V\} \times d\boldsymbol{p} = 0 .$$

Per l'arbitrarietà di $d\boldsymbol{p}$ deve essere nullo il vettore racchiuso tra graffe; si deduce perciò

$$(31) \qquad \operatorname{grad}_{\boldsymbol{p}} V = -\frac{[V^2 (V^2 - V_a^2 - V_s^2) + V_s^2 x]\, \boldsymbol{p}}{V (2V^2 - V_a^2 - V_s^2) g^2} .$$

Sostituendo nella (29) si ha

$$(32) \qquad Q - O = V \frac{\boldsymbol{p}}{g} - \frac{V^2 (V^2 - V_a^2 - V_s^2) + V_s^2 x}{V (2V^2 - V_a^2 - V_s^2)} \cdot \frac{\boldsymbol{p}}{g} .$$

Osserviamo che moltiplicando ambo i membri della (31) scalarmente per $\boldsymbol{p}$, in virtù della (30) risulta

$$\operatorname{grad}_{\boldsymbol{p}} V \times \boldsymbol{p} = 0 ,$$

e quindi dalla (29) si ha

$$(33) \qquad (Q - O) \times \boldsymbol{p} = \frac{V \boldsymbol{p}^2}{g} = V g, \quad \text{cioè} \quad (Q - O) \times \bar{\boldsymbol{n}} = V.$$

Ma $(Q - O) \times \boldsymbol{n}$ è la distanza del punto O dal piano tangente in Q alla superficie d'onda; essa è dunque uguale a V.

Elevando ora ambo i membri della (32) a quadrato e tenendo conto della (30), si ottiene

$$r^2 = V^2 + \frac{\{[V^2 (V^2 - V_a^2 - V_s^2) + V_s^2 x] \boldsymbol{p}\}^2}{V^2 (2 V^2 - V_a^2 - V_s^2) g^2} \quad , \quad [r^2 = (Q - O)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2]$$

dalla quale, sviluppando il quadrato del vettore racchiuso tra graffe, avendo sempre riguardo alla (30), segue

$$(34) \qquad r^2 = V^2 - \frac{[(V^2 - V_a^2 - V_s^2) V^2 + V_a^2 V_s^2] (V^2 - V_a^2 - V_s^2)}{(2 V^2 - V_a^2 - V_s^2)^2}$$

D'altra parte moltiplicando ambo i membri della (32) scalarmente per $Q - O$, e ricordando la (33), si ha

$$r^2 = V^2 - \frac{V^3 (V^2 - V_a^2 - V_s^2) g + V_s^2 \cdot \mathbf{V}_a \times \boldsymbol{p} \cdot \mathbf{V}_a \times (Q - O)}{V (2 V^2 - V_a^2 - V_s^2) g}$$

dalla quale, isolando il termine in $\mathbf{V}_a \times \boldsymbol{p}$, elevando quindi a quadrato, ed eliminando $(\mathbf{V}_a \times \boldsymbol{p})^2$, servendosi sempre della (30), si perviene facilmente all'equazione

$$(35) \qquad \frac{V_s^2 (V_a^2 + V_s^2 - V^2)}{(2 V^2 - V_a^2 - V_s^2)^2} [\mathbf{V}_a \times (Q - O)]^2 = \left[\frac{V^4}{2 V^2 - V_a^2 - V_s^2} - r^2 \right]^2 .$$

Non rimane che da eliminare il parametro V^2 fra le (34) e (35) per ottenere l'equazione della superficie d'onda.

Assumendo l'asse x_3 nella direzione costante del campo magnetico $\mathbf{H}$ e quindi della velocità $\mathbf{V}_a$, risulta $\mathbf{V}_a \times (Q - O) = V_a x_3$. Ponendo inoltre

$$(36) \qquad V_1 = \frac{1}{2} (V_s + V_a) , \; V_2 = \frac{1}{2} (V_s - V_a) ;$$

$$\xi = V^2 - \frac{1}{2} (V_a^2 + V_s^2) = V^2 - (V_1^2 + V_2^2) ,$$

le equazioni (34) e (35), scritte sotto forma intera e ordinate rispetto al parametro ξ, diventano

$$(37) \qquad \xi^3 + a_1 \xi^2 + a_2 \xi + a_3 = 0$$

$$(38) \qquad \xi^4 + b_1 \xi^3 + b_2 \xi^2 + b_3 \xi + b_4 = 0$$

con

$$(39) \quad a_1 = \frac{1}{3} [5 (V_1^2 + V_2^2) - 4 r^2] \; , \; a_2 = \frac{4}{3} V_1^2 V_2^2 \; , \; a_3 = -\frac{4}{3} V_1^2 V_2^2 (V_1^2 + V_2^2) ;$$

$$b_1 = 4 (V_1^2 + V_2^2 - r^2] \; , \; b_2 = 2 [2 r^4 - 4 (V_1^2 + V_2^2) r^2 + 3 (V_1^2 + V_2^2)^2] ,$$

$$(39') \qquad b_3 = 4\,(V_1^2 + V_2^2)^3 + (V_1^2 - V_2^2)^2\, x_3^2 - 4\,(V_1^2 + V_2^2)^2\, r^2\,,$$
$$b_4 = (V_1^2 + V_2^2)\,[(V_1^2 + V_2^2)^3 - (V_1^2 - V_2^2)\, x_3^2]\,.$$

Le (37) e (38) sono due equazioni algebriche, l'una di 3° grado e l'altra di 4° nel parametro ξ. Il *risultante* di queste equazioni uguagliato a zero, dà la richiesta equazione della superficie d'onda, che equivale a quella che si ottiene eliminando il parametro ξ fra le (37) e (38).

Detto risultante R si può determinare per esempio col metodo del massimo comune divisore, e posto

$$c_0 = b_2 - a_2 - a_1\,(b_1 - a_1) = \frac{1}{9}\,[4\,r^4 - 4\,(V_1^2 + V_2^2)\,r^2 +$$
$$+ 19\,(V_1^2 + V_2^2)^2 - 12\,V_1^2 \cdot V_2^2]$$

$$c_1 = b_3 - a_3 - a_2\,(b_1 - a_1) = -\frac{4}{9}\,[9\,(V_1^2 + V_2^2)^2 - 8\,V_1^2\,V_2^2]\,r^2 + (V_1^2 - V_2^2)^2\, x_3^2 +$$
$$+ \frac{4}{9}\,(V_1^2 + V_2^2)\,[9\,(V_1^2 + V_2^2)^2 - 4\,V_1^2\,V_2^2]$$

$$c_2 = b_4 - a_3\,(b_1 - a_1) = (V_1^2 + V_2^2)^2 \left[(V_1^2 + V_2^2)^2 + \frac{28}{9}\,V_1^2\,V_2^2\right] -$$
$$- (V_1^2 + V_2^2)\,(V_1^2 - V_2^2)^2\, x_3^2 - \frac{32}{9}\,V_1^2\,V_2^2\,(V_1^2 + V_2^2)\,r^2\,,$$

risulta

$$R = c_2 - c_1\,\frac{a_3\,c_0^2 - a_1\,c_2\,c_0 + c_1\,c_2}{a_2\,c_0^2 - (c_2 + a_1\,c_1)\,c_0 + c_1^2} + c_0\,\frac{(a_3\,c_0^2 - a_1\,c_2\,c_0 + c_1\,c_2)^2}{[a_2\,c_0^2 - (c_2 + a_1\,c_1)\,c_0 + c_1^2]^2}\,.$$

Uguagliando a zero e ordinando rispetto a c_0 si ha l'equazione

$$a_3^2\,c_0^5 + [(a_2^2 - 2\,a_1\,a_3)\,c_2 - a_2\,a_3\,c_1]\,c_0^4 +$$
$$+ [a_1\,a_3\,c_1^2 + (a_1^2 - 2\,a_2)\,c_2^2 + (3\,a_3 - a_1\,a_2)\,c_1\,c_2]\,c_0^3 +$$
$$+ (c_2^3 - a_1\,c_1\,c_2^2 + a_2\,c_1^2\,c_2 - a_3\,c_1^2)\,c_0^2 = 0\,,$$

che si scinde nelle due:

$$(40) \qquad c_0 = 0 \quad ; \quad a_3^2\,c_0^3 + [(a_2^2 - 2\,a_1\,a_3)\,c_2 - a_2\,a_3\,c_1]\,c_0^2 +$$
$$+ [a_1\,a_3\,c_1^2 + (a_1^2 - 2\,a_2)\,c_2^2 + (3\,a_3 - a_1\,a_2)\,c_1\,c_2]\,c_0 +$$
$$+ (c_2^3 - a_1\,c_1\,c_2^2 + a_2\,c_1^2\,c_2 - a_3\,c_1^2) = 0\,.$$

La prima rappresenta delle sfere immaginarie. La seconda rappresenta una superficie algebrica del 12° ordine. Si conclude che nel caso considerato le superficie d'onda epicentrali sono delle superficie algebriche di 12° ordine.

Nel caso particolare in cui la velocità V_a delle onde di Alfvèn è in grandezza uguale a quella V_s del suono ($V_a = V_s$), si ha:

$$V_2 = 0 \quad , \quad a_1 = \frac{1}{3}\,(5\,V_1^2 - 4\,r^2) \quad , \quad a_2 = 0 \quad , \quad a_3 = 0\,;$$
$$b_1 = 4\,(V_1^2 - r^2) \quad , \quad b_2 = 4\,(r^2 - V_1^2)^2 + 2\,V_1^4\,,$$
$$b_3 = V_1^4\,[4\,(V_1^2 - r^2) + x_3^2] \quad , \quad b_4 = V_1^6\,(V_1^2 - x_3^2)$$

e l'equazione della superficie d'onda si riduce alla seguente

$$c_2^2 (a_1^2 c_0 + c_2 - a_1 c_1) = 0 ,$$

che si scinde in una coppia di piani simmetrici rispetto al piano $x_1 x_2$ [$c_2 \equiv$ $\equiv V_1^6 (V_1^2 - x_3^2) = 0$] , e nella superficie di equazione

$$(2 V_1^2 - r^2) \{27 V_1^4 x_3^2 - (2 V_1^2 - r^2) (4 r^2 + V_1^2)^2\} = 0 ,$$

che a sua volta è composta di una sfera di raggio $r = V_1 \sqrt{2}$, e di una superficie algebrica di 6° ordine, tutta contenuta nella sfera precedente e che tocca lungo il cerchio equatoriale. Essa è compresa fra i piani $x_3 = \pm V_1 \sqrt{2}$. Si tratta quindi di una superficie rotonda schiacciata in corrispondenza dei poli. Agli stessi risultati si perviene ponendo nelle (34) e (35) $V_a = V_s = V_1$.

Chimica inorganica. — *Alogenuri idrazinici di* Rh. – II Parte. *Cloruri paramagnetici* (*). Nota (**) di Livio Cambi, Ernestina Dubini Paglia e Carlo Giuffrida, presentata dal Socio L. Cambi.

1. – Nella Nota precedente (I Parte) abbiamo riferito sulle nostre ricerche riguardanti la serie, da noi individuata, di Rh–cloruri idrazinici, diamagnetici, con ogni probabilità riferibili a Rh^{III} (1). Accennammo ai sali analoghi paramagnetici, che ora descriviamo e che corrispondono ai rapporti:

$$1\ Rh : 2{,}5\ Cl \quad ; \quad 1Rh : 2\ Cl \quad ; \quad 1\ Rh : 1{,}66\ Cl \quad ; \quad 1\ Rh : 1{,}5\ Cl\ .$$

Nella serie diamagnetica non abbiamo finora ottenuto il termine, $Rh_2Cl_3 : 2\ N_2H_4$, che abbiamo individuato soltanto nella forma paramagnetica. Invece abbiamo riconosciuto solo nello stato diamagnetico il monocloruro in diversi rapporti con l'idrazina:

$$RhCl : 2{,}75\ N_2H_4 \quad ; \quad RhCl : 2{,}5\ N_2H_4 \quad ; \quad RhCl : 2N_2H_4\ .$$

Aggiungiamo che, nelle ricerche in corso, al fine di ottenere eventuali complessi non clorurati, abbiamo isolato il sale a composizione vicina a $Rh_3Cl : 5{,}5\ N_2H_4$ (2) risultato pure diamagnetico.

Sono all'indagine le probabili forme paramagnetiche di questi complessi, su cui riferiremo in seguito.

Ai fini della presente discussione è opportuno il richiamo che assistiamo in effetto ad un graduale spostamento del Cl^- mediante l'idrazina, che avvalora la nostra ipotesi dell'intervento di radicali idrazidici.

I clorosali che riguardano questa Nota sono riportati nella Tabella I.

Analogamente a quanto osservammo già per la serie diamagnetica, non abbiamo finora dati sufficienti per riconoscere come composti definiti i sali paramagnetici in questione. Non possiamo escludere l'intervento di sali doppi, od anche di miscele a composizioni determinate da rapporti di solubilità, di velocità di precipitazione.

(*) Ricerca eseguita presso il Centro di Chimica Metallurgica del C.N.R. dell'Università di Milano.

(**) Pervenuta all'Accademia il 23 luglio 1960.

(1) Questi « Rend. », XXVIII (1960).

(2) Indichiamo come per altri sali il rapporto grezzo alogenuro : idrazina.

TABELLA I.

Rh – *Clorosali – Idrazinici*: *Paramagnetici.*

	Composizione analitica						Suscettività magnetica	
	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*
Sali	Rh	Cl	N	N_2H_4	Rapporti molecolari	Formule brute	$\chi_{mol} \cdot 10^6$ a 16° C	μ_{eff} M.B.
I	1	2,5	3	1,5	$Rh_2Cl_5 : 3\,N_2H_4$	$\{Rh_2Cl_5N_6H_{10}\}\ 3\,H_2O$	195	0,96
II_1	1	2	4	2	$Rh_2Cl_4 : 4\,N_2H_4$	$\{Rh_2Cl_4N_8H_{13}\}\ 1,5\,H_2O$	1187	1,73
II_2	1	2	3,5	1,75	$Rh_2Cl_4 : 3,5\,N_2H_4$	$\{Rh_2Cl_4\ N_7H_{11}\}\ 2\,H_2O$	1190	1,73
II_3	1	2	3,5	1,75	$RhCl_2 : 1,75\,N_2H_4$	$\{RhCl_2N_{3,5}H_5\}\ 1\,H_2O$	1180	1,73
III	1	1,66	2,66	1,33	$Rh_3Cl_5 : 4\,N_2H_4$	$\{Rh_3Cl_5N_8H_{11}\}\ 7,5\,H_2O$	1045	1,76
IV_1	1	1,5	2,25	1,12	$Rh_2Cl_3 : 2,25\,N_2H_4$	$\{Rh_2Cl_3N_{4,5}H_5\}\ 5,5\,H_2O$	1715	2,15
IV_2	1	1,5	2	1	$Rh_2Cl_3 : 2\,N_2H_4$	$\{Rh_2Cl_3N_4H_4\}\ 6\,H_2O$	4700	

In riferimento alla tabella, avvertiamo:

i cloruri II_1 e II_2 si assumono con la formula doppia, presumendo in essi il rapporto 1 Rh^{III} : 1 Rh^{IV}; il momento magnetico è riferito a 1 Rh, considerando Rh^{III} diamagnetico;

il sale II_3 è riportato con formula semplice, nella ipotesi che derivi da Rh^{IV};

il sale III lo consideriamo, per ipotesi, come derivato da 2 Rh^{III} : 1 Rh^{IV};

il sale IV_1 viene assunto come 1 Rh^{III} : 1 Rh^{IV}, attribuendo la suscettività al Rh^{IV};

per il cloruro IV_2 indichiamo soltanto la elevata suscettibilità molare: è ancora allo studio il suo comportamento chimico.

2. – *Il comportamento paramagnetico*, dalle nostre attuali ricerche, appare come dipendente da un processo di ossidazione del rodio, dei sali diamagnetici primari, che vennero tutti ottenuti in atmosfera inerte, con filtrazione nella stessa atmosfera, oppure separati per rapida centrifugazione. I composti paramagnetici sono apparsi in generale operando all'aria. Il paramagnetismo si accentua allorché la massa del sale amorfo o microcristallino, in strati di circa 1 mm su piastra di vetro porosa, è attraversata da aria, per due o più ore, a temperatura ambiente e operando lavaggi successivi con acqua.

L'azione dell'aria può recare a demolizioni anche notevoli, che indaghiamo, con possibile formazione di ossisali.

Il sale IV_2, $Rh_2Cl_3 \cdot 2\,N_2H_4$, con il paramagnetismo relativamente elevato, attesta già un'alterazione spinta.

L'azione dell'ossigeno atmosferico appare concomitante alla parziale eliminazione di idrazina, anche per effetto dei ripetuti lavaggi con acqua sul filtro [3]. L'eccesso di idrazina in genere è apparso deprimente del processo. L'azione dell'aria è per contro accelerata, in diversi casi, dalla presenza di rodio metallico molto disperso.

In sospensione acquosa, a freddo, i sali diamagnetici puri, reagiscono molto lentamente con l'ossigeno atmosferico; in qualche caso non si è notata la formazione del derivato paramagnetico.

L'acqua ossigenata diluita attacca in parte l'idrazina, senza produrre i derivati che discutiamo.

3. *Il paramagnetismo* è probabilmente dovuto ad una variazione della valenza del rodio. È ben noto che i sali di Rh^{III} sono diamagnetici; sono tali anche il solfato $Rh_2(SO_4)_3 \cdot 14\,H_2O$ e gli allumi $KRh(SO_4)_2 \cdot 12\,H_2O$. Del Rh^{II}, che possiede un numero dispari di elettroni 4d, non si hanno dati nella letteratura sul momento magnetico. Per Rh^{IV}, il fluoruro presenta 1,1 M.B.

(3) Riportiamo il seguente esempio di formazione di un sale paramagnetico. Dalla reazione in atmosfera inerte dell'esaclorosale rodico, con rapporto 1 Rh : 3,5 N_2H_4, separammo alla centrifuga il sale insolubile diamagnetico corrispondente a:

A) $$Rh_2Cl_5 : 3{,}5\ N_2H_4\ ,$$

considerando in schema l'idrazina come libera.

Una porzione umida del cloruro stesso venne portata su filtro poroso e ripetutamente lavata con acqua per tre ore: il residuo solido era paramagnetico ($\mu_{eff} = 1{,}76$ M.B.) e risultava:

B) $$Rh_3Cl_5 : 4\,N_2H_4\ .$$

La frazione discioltasi in acqua con i lavaggi, ha fornito il residuo totale diamagnetico dalla composizione:

C) $$Rh_3Cl_7 : 5\,N_2H_4\ .$$

Cioè, oltre alla supposta ossidazione parziale del rodio, si è avuta, nella somma di *B*) e *C*), rispetto 3 *A*) di partenza, l'eliminazione di $3\,Cl^-$ e di $1{,}5\,N_2H_4$.

e, nella serie del fluorosali alcalini, $Me_2[Rh^{IV}F_6]$, si manifesta il momento di circa 1,73 M.B. [4].

Abbiamo indagato l'eventuale presenza di rodio bivalente, supponendo che i radicali idrazinici generassero per ossidazione degli azo-derivati intermedi labili, i quali per decomposizione recassero a rodio bivalente, ad esempio secondo lo schema:

$$\text{I)} \quad X_2Rh^{III}—NH—NH—Rh^{III}X_2 \xrightarrow[H_2O]{+(O)} X_2Rh^{III}—N=N—Rh^{III}X_2$$

$$\text{II)} \quad X_2Rh^{III}—N=N—Rh^{III}X_2 \longrightarrow X_2Rh^{II}+N_2+Rh^{II}X_2 .$$

Tutti i saggi chimici compiuti non hanno attestato però Rh^{II}. Le determinazioni ossidimetriche con $KBrO_3$ e KIO_3, che pure recano alla ossidazione completa dell'azoto idrazinico, non hanno offerto alcun indizio della presunta bivalenza.

Esaminammo l'eventuale presenza di perossidi, $—O_2—$, ma, a parte l'incompatibilità con l'idrazina, non abbiamo rivelato finora alcun fatto che ne attesti la presenza.

Non trascurammo l'eventuale intervento di N_3^- dovuto alla nota reazione di Broowne [5], fra idrazina e acqua ossigenata, supponendo la formazione intermedia di questa nel processo di ossidazione, ma abbiamo dovuto escludere questa ipotesi.

D'altra parte, la presenza dell'anione azotidrico non implicherebbe una variazione dello stato magnetico del rodio nel complesso.

Non abbiamo trascurato le tracce di rodio ridotto che sono apparse in alcune preparazioni, che comunque abbiamo scartato, ma queste, rilevate da ripetute centrifugazioni del sale grezzo, non potevano influire notevolmente sui valori del paramagnetismo determinato.

Allo stato attuale delle nostre esperienze, appare più probabile che il paramagnetismo debba riferirsi ad un processo di ossidazione del rodio, da tri- a tetravalente, almeno nei sali primari. Cioè, per il caso già considerato nella Nota precedente in cui supponevamo un doppio ponte idrazinico, si avrebbe lo schema:

$$\text{I)} \quad X_2Rh^{III}\begin{matrix}\diagup NH—NH_2 \\ \diagdown NH_2—NH\end{matrix}Rh^{III}X_2 \xrightarrow[-0,5\ H_2O]{+0,5\ (O)} X_2Rh^{III}\begin{matrix}\diagup NH—NH \\ \diagdown NH_2—NH\end{matrix}Rh^{IV}X_2$$

$$\text{II)} \quad X_2Rh^{III}\begin{matrix}\diagup NH—NH \\ \diagdown NH_2—NH\end{matrix}Rh^{IV}X_2 \xrightarrow[-0,5H_2O]{+0,5\ (O)} X_2Rh^{IV}\begin{matrix}\diagup NH—NH \\ \diagdown NH—NH\end{matrix}Rh^{IV}X_2 .$$

In effetto, i sali diamagnetici e paramagnetici analoghi, all'analisi in diversi casi appaiono come isomeri, per lo scarso rilievo analitico del contenuto in idrogeno.

(4) R. N. Nyholm e A. G. Sharpe, « J. Chem. Soc. », 3579 (1952).
(5) « J. Am. Chem. Soc. », *27*, 551 (1905); « Ber. », *38* 258 (1916).

In realtà, con frequenza riscontrammo sali corrispondenti a circa $\mu_{eff} = 1{,}73$ M.B., il che induce a supporre che il processo di ossidazione da noi considerato tenderebbe almeno nel primo stadio, al rapporto 1 Rh^{III} : 1 Rh^{IV}.

Finora non abbiamo osservato la reazione di riduzione inversa, semplice.

Avvertiamo infine che abbiamo in corso saggi chimico–fisici diversi per meglio definire i processi e le strutture che discutiamo.

Parte sperimentale.

Premettiamo che, come per i derivati diamagnetici, incontrammo difficoltà nel riprodurre le composizioni singole che riportiamo. Anche piccole variazioni di concentrazione, di tempo, temperatura, possono recare a prodotti con rapporti Rh : Cl diversi, se pure con caratteri analoghi.

I sali indicati nelle descrizioni che seguono recano lo stesso numero d'ordine della tabella sopra riportata.

I) $\{Rh_2Cl_5(3\ N_2H_4—2\ H)\}\cdot 3\ H_2O$. – A K_3RhCl_6 al 4% a temperatura di circa 15°, con viva agitazione, viene aggiunta lentamente la soluzione molare di idrazina nel rapporto 1Rh : 3,2 N_2H_4. Il sale giallo ocra che precipita viene raccolto e lavato con acqua su filtro di vetro poroso. Essiccato nel vuoto per 12 ore, all'analisi è risultato:

	trov. %	Rh 39,0 ;	Cl 33,10;	N 16,43	
per $\{Rh_2Cl_5\cdot N_6H_{10}\}\cdot 3H_2O$	calc. %	38,65;	33,29;	15,79	

Il sale è paramagnetico.

$$\chi_{2Rh}\cdot 10^6 = 410 \quad ; \quad \mu_{1Rh} = 0{,}96 \text{ M.B.}$$

Come abbiamo detto, la formula bruta riportata, per il tenore di idrogeno, risulta dall'ipotesi della presenza della coppia 1 Rh^{III} : 1 Rh^{IV}, per quanto, per la bassa suscettività magnetica, debba considerarsi un sale non completamente ossidato.

II_1) $\{Rh_2Cl_4(4\ N_2H_4—3\ H)\}\cdot 1{,}5\ H_2O$. – Alla soluzione di K_3RhCl_6, a 60°, si è aggiunta la soluzione mol. di idrazina nel rapporto 1 Rh : 4,5 N_2H_4, sotto viva agitazione; pH = 10. Precipita il sale giallo ocra, che viene filtrato e lavato su filtro poroso, ed essiccato come sopra.

Risulta:

	trov. %	Rh 40,70;	Cl 28,60;	N 22,75;	H 3,63	
per $\{Rh_2Cl_4N_8H_{13}\}$ 1,5 H_2O	calc. %	41,10;	28,40;	22,41;	3,21	

Il sale è paramagnetico.

$$\chi_{2Rh}\cdot 10^6 = 1270 \quad ; \quad \mu_{1Rh} = 1{,}73 \text{ M.B.}$$

II_2) $\{Rh_2Cl_4(3,5\ N_2H_4—3\ H\}\cdot 2H_2O$. – *a*) Si opera a freddo come sopra, ma con rapporto 1 Rh : 3,5 N_2H_4 ; pH finale 6 portato a 7,5 con aggiunta di idrazina.

b) Si opera come sopra, con lo stesso rapporto 1 Rh : 3,5 N_2H_4 ; pH finale 6 portato a 5 con ac. cloridrico diluito.

I due preparati all'analisi hanno fornito:

a) trov. % Rh 41,70; Cl 28,67; N 19,64; H 3,72.

b) trov. % 41,40; 28,60; 19,71; 3,50.

per $\{Rh_2Cl_4N_7H_{11}\}\cdot 2H_2O$

calc. % 41,81; 28,88; 19,91; 3,05.

a) $\chi_{2Rh}\cdot 10^6 = 1250$; $\mu_{1Rh} = 1{,}728$ M.B.

b) $\chi_{2Rh}\cdot 10^6 = 1270$; $\mu_{1Rh} = 1{,}730$ M.B.

Si considera come sopra, il rapporto 1 Rh^{III} : 1 Rh^{IV}.

II_3) $\{Rh_2Cl_4(3,5\ N_2H_4—4\ H\}\cdot 2H_2O$. – Alla soluzione di K_3RhCl_6 si è aggiunta la soluzione molare di idrazina, nel rapporto 3,5 N_2H_4 : 1 Rh, operando in corrente di argon con viva agitazione.

Il sale giallo ocra, che precipita, viene raccolto su filtro di vetro poroso e lavato ripetutamente all'aria; dopo essiccamento ha colore ocra scuro.

All'analisi è risultato:

trov. % Rh 41,90; Cl 29,20; N 19,95

per $\{Rh_2Cl_4\cdot N_7H_{10}\}\cdot 2H_2O$ calc. % 41,78; 28,85; 19,94

$\chi_{2Rh}\cdot 10^6 = 2560$; $\mu_{1Rh} = 1{,}73$ M.B.

III) $\{Rh_3Cl_5(4\ N_2H_4—5\ H)\}\cdot 7{,}5\ H_2O$. – Alla soluzione di K_3RhCl_6 a 35° è stata aggiunta la soluzione molare di idrazina nel rapporto 3,5 N_2H_4 : Rh. Il sale giallo ocra che precipita viene filtrato e ripetutamente lavato all'aria. Essiccato ha dato alle analisi:

trov. % Rh 41,22; Cl 23,65; N 15,21 H 3,29

per $\{Rh_3Cl_5N_8H_{11}\}\cdot 7{,}5\ H_2O$ calc. 41,41; 23,48; 15,03; 3,45

$\chi_{3Rh}\cdot 10^6 = 1320$; $\mu_{1Rh} = 1{,}76$ M.B.

IV_1) $\{Rh_2Cl_3(2,25\ N_2H_4—4\ H)\}\cdot 5{,}5\ H_2O$. – Alla soluzione di K_3RhCl_6 al 5%, a temperatura di 60–70°, in atmosfera ambiente, venne aggiunta la soluzione molare di idrazina nel rapporto 3,5 N_2H_4 : Rh. Il pH finale viene portato a 8, per aggiunta di idrazina, Il sale giallo ocra viene separato e lavato alla centrifuga.

Essiccato ha dato all'analisi:

trov. % Rh 43,20; Cl 21,50; N 13,34; H 3,67

per $\{Rh_2Cl_3N_{4,5}H_5\}\cdot 5{,}5\ H_2O$ calc. % 43,00; 22,02; 13,16; 3,55

$\chi_{2Rh}\cdot 10^6 = 1890$; $\mu_{1Rh} = 2{,}15$ M.B.

IV_2) $\{Rh_2Cl_3(2\,N_2H_4—4\,H)\}\cdot 6H_2O$. – Il sale preparato come sopra descritto, venne separato su filtro di vetro poroso e lavato ripetutamente con acqua. Umido, ha assunto colore ocra scuro. Essiccato è risultato:

	trov. %	Rh 42,85;	Cl 22,21;	N 11,80;	H 3,39
per $\{Rh_2Cl_3N_4H_4\}\,6H_2O$	cal. %	42,80;	22,19;	11,66;	3,34

$$\chi_{2Rh}\cdot 10^6 = 4890 \quad ; \quad \mu_{1Rh} = 3{,}38 \text{ M.B.}$$

Le ricerche proseguono.

ERRATA CORRIGE

Chimica inorganica. — *Alogenuri idrazinici di* Rh^{III}. – I Parte. *Cloruri diamagnetici*. Nota di Livio Cambi ed Ernestina Dubini Paglia, presentata dal Socio Livio Cambi. (Seduta del 7 giugno 1960).

A pag. 770, riga 20 del paragrafo I in luogo di:

di-platino-IV-diidrazidi-tetracarbilammine

deve leggersi:

di-platino-II-diidrazidi-tetracarbilammine.

Analogamente a pag. 773 riga 11, in luogo di:

idrazino-Pt^{IV}-carbilamminici

deve leggersi:

idrazino-Pt^{II}-carbilamminici.

Chimica inorganica. — *Complessi idrazinici del rodio: cianuri idrazinici* (*). Nota di Livio Cambi ed Ernestina Dubini Paglia, presentata (**) dal Socio L. Cambi.

Rimandiamo alle Note apparse in precedenza (1), riguardanti i rodio-cloruri-idrazinici, per la discussione generale sui complessi idrazinici.

1. *Rodio-cianuri-idrazinici.* – Come è noto, le conoscenze sui cianuri del rodio finora erano limitate. Oltre $K_3[Rh(CN)_6]$, si sono descritti da antica data, alcuni sali riferiti a $Rh(CN)_3$, di natura non bene identificata. La serie che illustriamo amplia notevolmente il capitolo dei cianocomplessi del metallo stesso.

I nostri sali ripetono, in genere, la molteplicità dei rapporti $Rh : CN^-$ da noi verificata nei cloruri, dipendente dal peculiare intervento della idrazina. Riportiamo nella Tabella I la serie dei cianuri da noi ottenuti.

Dalla tavola che segue risulta la corrispondenza dei ciano-sali con i cloro-sali da noi individuati: si verifica la semplice sostituzione di Cl^- con CN^-, pure variando il rapporto metallo-idrazina.

Come per i cloruri, non possiamo però finora affermare che in ogni caso i cianuri indicati siano sali definiti, oppure miscele o sali doppi, ma, dal comportamento chimico, appare probabile che alcuni di essi corrispondano in effetto a complessi definiti, particolarmente quelli derivati da $Rh(CN)_2$ che illustreremo.

Dall'insieme dei caratteri appare molto probabile che anche i ciano-sali siano polimeri, alcuni assai elevati.

2. – Le preparazioni vennero eseguite con due metodi distinti. La cianurazione a freddo con soluzioni di KCN diluito dei diversi clorosali in sospensione acquosa, già isolati ed essiccati. La cianurazione con HCN, sempre a freddo, di soluzioni dell'esaclorosale, K_3RhCl_6, contenenti acido acetico e idrazina a diverso pH, variando il rapporto base : acido.

(*) Ricerca eseguita presso il Centro di Chimica Metallurgica del C.N.R. dell'Università di Milano.

(**) Nella seduta del 9 aprile 1960.

(1) Questi « Rend. », XXVII (1960).

Questa Nota, nel suo contenuto essenziale, è stata presentata alla seduta del 9 aprile 1960. Nella mora della stampa, le nostre ricerche sui cloruri rodioidrazinici si svilupparono più rapidamente e con ampiezza maggiore del previsto, tanto da indurci alla comunicazione, nella seduta del 7 giugno 1960, della 1ª Nota sui clorosali idrazinici diamagnetici, e ad inviare all'Accademia in data 20 luglio 1960, la 2ª Nota sugli analoghi cloruri paramagnetici.

Abbiamo perciò ritardato la pubblicazione della presente ricerca per le relazioni da noi osservate fra cianuri e alogenuri di rodio idrazinici, che ampliano notevolmente l'argomento.

Tabella I.

Rodio – Cianuri – Idrazinici.

Sali	Composizione analitica						Suscettività magnetica	
	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*
	Rh	CN	N_{tot}	N_2H_4	Rapporti molecolari	Formule brute	(a 17°) $\chi_{mol} \cdot 10^6$	μ_{eff} M.B. per 1 Rh
I	1	3	5	1	$Rh(CN)_3 : 1\ N_2H_4$	$\{Rh(CN)_3N_2H_3\}\ 3\ H_2O$	665	1,33
II_1	1	2,5	4	0,75	$Rh_2(CN)_5 : 1,5\ N_2H_4$	$\{Rh_2(CN)_5N_3H_3\}\ 8,5\ H_2O$	3075	1,96
II_2	1	2,5	4,5	1	$Rh_2(CN)_5 : 2\ N_2H_4$	$\{Rh_2(CN)_5N_4H_7\}\ 6\ H_2O$	— 34	
III_1	1	2	5	1,5	$Rh(CN)_2 : 1,5\ N_2H_4$	$\{Rh(CN)_2N_3H_5\}\ 3\ H_2O$	16	
III_2	1	2	5	1,5	$Rh(CN)_2 : 1,5\ N_2H_4$	$\{Rh(CN)_2N_3H_5\}\ 2,5\ H_2O$	0	
III_3	1	2	5	1,5	$Rh(CN)_2 : 1,5\ N_2H_4$	$\{Rh(CN)_2N_3H_5\}\ 2\ H_2O$	25	
III_4	1	2	5,5	1,75	$Rh(CN)_2 : 1,75\ N_2H_4$	$\{Rh(CN)_2N_{3,5}H_6\}\ 2,5\ H_2O$	— 70	
IV	1	2	3	0,5	$Rh_2(CN)_4 : 1\ N_2H_4$	$\{Rh_2(CN)_4N_2H_2\}\ 6\ H_2O$	— 92	
V_1	1	1,87	3,88	1	$Rh_4(CN)_{7,5} : 4\ N_2H_4$	$\{Rh_4(CN)_{7,5}N_8H_{10,5}\}\ 11,5\ H_2O$	766	1,63
V_2	1	1,87	3,12	0,625	$Rh_4(CN)_{7,5} : 2,5\ N_2H_4$	$\{Rh_4(CN)_{7,5}N_5H_{5,5}\}\ 12\ H_2O$	146	
VI_1	1	1,66	5	1,66	$Rh_3(CN)_5 : 5\ N_2H_4$	$\{Rh_3(CN)_5N_{10}H_{16}\}\ 14\ H_2O$	— 175	
VI_2	1	1,66	5,67	2	$Rh_3(CN)_5 : 6\ N_2H_4$	$\{Rh_3(CN)_5N_{12}H_{20}\}\ 6\ H_2O$	— 70	
VII_1	1	1	4	1,5	$Rh_2(CN)_2 : 3\ N_2H_4$	$\{Rh_2(CN)_2N_6H_7\}\ H_2O$	946	1,61
VII_2	1	1	3	1	$Rh_2(CN)_2 : 2\ N_2H_4$	$\{Rh_2(CN)_2N_4H_4\}\ 3,5\ H_2O$	250	

I valori μ_{eff} sono riferiti ad 1 Rh per ciascuna molecola, supposto per ipotesi tetravalente, e considerando diamagnetici i restanti ioni rodio assunti come trivalenti. Per i sali VII_1 e VII_2 assumiamo per ipotesi e per il calcolo del momento magnetico, la formula doppia.

Per la prima via ottenemmo i complessi da III a VII_2, eccettuato VI_1, della seguente tabella. Con la seconda, i cianuri I, II_2 e VI_1 che risultarono paramagnetici.

Proseguiamo le ricerche sulla cianurazione con ac. cianidrico.

In merito al comportamento magnetico abbiamo osservato che in generale, cianurando con KCN, dai cloruri paramagnetici si produssero cianuri con suscettività magnetica analoga. Appare cioè che la costituzione corrispondente al momento magnetico può conservarsi nella sostituzione di Cl^- con CN^-. In alcuni casi però notammo il passaggio ad un ciano–complesso diamagnetico, da un cloro–sale paramagnetico, con evidente decomposizione di una parte della idrazina combinata.

3. – *La costituzione dei cianuri* che illustriamo possiamo discuterla soltanto in linea generale, nell'attesa dei risultati degli esami chimico–fisici che abbiamo in corso.

I cianuri diamagnetici, più stabili, e più frequenti, debbono riferirsi con ogni probabilità a Rh^{III}. Per soddisfare la valenza dello ione metallico, dobbiamo ammettere ancora l'intervento probabile della idrazina, in funzione di radicali idrazidici. Rimandiamo in merito alla discussione esposta nelle nostre Note precedenti sui Rh–cloruri idrazinici.

I cianuri offrono però alcuni dati sperimentali che avvalorano l'ipotesi predetta. Fra i complessi più stabili, come si è detto, abbiamo quello corrispondente al rapporto $Rh(CN)_2 : 1{,}5\ N_2H_4$. L'ossidazione di questo cianuro con KIO_3 0,5 *n*, a freddo e controllata, porta all'eliminazione di 1 mol. di idrazina. Cioè riferendoci in schema al rapporto fra cianuro e diammina si verifica:

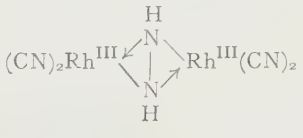
$$Rh(CN)_2 : 1{,}5\ N_2H_4 \xrightarrow[-2\ H_2O]{+\ 2\ (O)} Rh(CN)_2 : 0{,}5\ N_2H_4 + N_2 .$$

L'idrazina appare come legata in due forme: l'una più labile e facilmente ossidabile; l'altra più stabile. L'ossidazione parziale rispetterebbe il ponte idrazidico più stabile:

$$\{(CN)_2Rh^{III}{-}N_2H_2{-}Rh^{III}(CN)_2\}\ ^{(2)}.$$

Abbiamo anche verificato l'eliminazione completa dell'idrazina, con analoga ossidazione più spinta a caldo, e con sviluppo quantitativo all'azoto idrazinico. Residuano cianuri ossigenati non idrazinici, con rapporto Rh : 2 CN, che stiamo indagando.

(2) La simmetria del complesso è subordinata al problema dei radicali idrazidici: non possiamo escludere nel caso di cianuri il radicale bi–covalente:



Deve anche considerarsi la possibilità di ponti —CN—, che peraltro complicherebbero la simmetria cui accenniamo.

Per l'interpretazione dei sali paramagnetici si presenta lo stesso problema dei clorosali analoghi. Assumiamo ancora in via provvisoria l'ipotesi della presenza di Rh^{IV}.

Parte sperimentale.

Premettiamo che, per le analisi, abbiamo disgregato con ac. solforico i singoli cianosali procedendo di poi al dosaggio del Rh per riduzione. La determinazione di C ; H ; N venne eseguita con i metodi microanalitici. L'azoto idrazinico venne dosato in generale per via gasometrica, ossidando a caldo i singoli cianuri con HgO; KIO_3 oppure $KBrO_3$ in soluzione alcalina in corrente di CO_2.

I. $\{Rh(CN)_3N_2H_4—H\}\cdot 3H_2O$. – Venne ottenuto da K_3RhCl_6 con aggiunta di acetato di idrazina in soluzione fino a pH 5,5, nel rapporto 1 Rh : 3 N_2H_4, e cianurazione con HCN gassoso, a freddo. Il sale giallo chiaro si purifica e si riproduce difficilmente. Alla analisi è risultato, ammettendo, in via di ipotesi Rh^{IV}, per il paramagnetismo che presenta:

calc. % Rh 38,75; C 13,53; N 26,32; H 3,39

per $\{Rh(CN)_3\cdot N_2H_3\}\cdot 3\,H_2O$

trov. 38,22 14,09 25,98 3,70

$\chi_{Rh}\cdot 10^6 = 766$; $\mu = 1{,}33$ M. B.

Il complesso, incerto, è tuttora allo studio.

II_1. $\{Rh_2(CN)_5\cdot 1{,}5\,N_2H_4—3\,H\}\cdot 8{,}5\,H_2O$. – Preparato come il precedente con acetato di idrazina a pH = 7, nel rapporto 1 Rh : 1 N_2H_4.

Il cianuro giallo insolubile all'analisi ha dato:

calc. % Rh 38,50; C 11,22; N 20,95; H 3,93

per $\{Rh_2(CN)_5N_3H_3\}$ 8,5 H_2O

trov. 38,50 11,10 21,10 3,93

In ipotesi si considera la presenza di Rh^{IV}. Il sale è paramagnetico:

$\chi_{2\,Rh}\cdot 10^6 = 3305$; $\mu_{1\,Rh}$ 1,96 M. B.

II_2. $\{Rh_2(CN)_5\cdot 2\,N_2H_4—H\}\cdot 6\,H_2O$. – La soluzione al 5 % di K_3RhCl_6 è stata prima saturata a freddo con HCN. Si è aggiunta idrazina nel rapporto 1 Rh : 5 N_2H_4 con pH finale = 8. Si è proseguita la cianurazione fino a pH = 5,5. Dopo qualche ora si forma un precipitato giallo chiaro. Il sale diamagnetico, essiccato ha dato all'analisi:

trov. % Rh 40,60; C 12,2; N 25,25; H 3,36

per $\{Rh_2(CN)_5\cdot N_4H_7\}\cdot 6\,H_2O$

calc. 40,61 11,84 24,86 3,75

$\chi_{mol}\cdot 10^6 = -34$.

III. $\{Rh(CN)_2\ 1{,}5\ N_2H_4—1\ H\}$. – Il complesso è quello che appare con maggiore frequenza, fra i cianuri che si descrivono. Si è prodotto in condizioni diverse, come indichiamo:

1° da K_3RhCl_6 in soluzione acquosa circa al 4%, acetato di idrazina, nel rapporto 1 Rh : 3 N_2H_4 e aggiunta finale di 3 KCN per 1 Rh a freddo. Il sale, insolubile, ha color giallo–ocra chiaro. All'analisi è risultato:

trov. % Rh 39,90; C 9,50; N_{tot} 28,07; N_{idraz} 15,80; H 4,09

per $\{Rh(CN)_2N_3H_5\}\cdot 3\ H_2O$

calc.	40,20	9,38;	27,40	16,40	4,30

$\chi_{mol}\cdot 10^6 = 16$;

2° nelle stesse condizioni con cloridrato di idrazina nel rapporto 1 Rh : 2 N_2H_4 e cianurazione con 3 KCN per 1 Rh. Le analisi sono:

trov. % Rh 41,75; C 10,30; N_{tot} 27,61; N_{idraz} 16,70; H 3,19

per $\{Rh(CN)_2N_3H_5\}\cdot 2{,}5\ H_2O$

calc.	41,70	9,72	28,40	17,00	4,05

$\chi_{mol}\cdot 10^6 = 0$;

3° da RhI_3 dopo aggiunta di idrazina in eccesso circa 1 Rh : 14 N_2H_4, precipita il complesso rodio–iodo idrazinico rossastro. Dal sale iodurato, per aggiunta di 2 KCN : 1 Rh si ottiene il sale giallo, che è risultato:

trov. % Rh 43,60; C 10,30; N_{tot} 30,06; N_{idraz} 18,40; H 3,55

per $\{Rh(CN)_2N_3H_5\}\ 2\ H_2O$

calc.	43,30	10,10	29,40	17,65	3,78

$\chi_{mol}\cdot 10^6 = -70$;

4° dal sale $\{Rh_4Cl_{7,5} : 10{,}5\ N_2H_4\}$ diamagnetico, in sospensione acquosa, per azione di KCN in soluzione all' 1 % circa, nel rapporto 1 Rh : 3 KCN

trov. % Rh 40,70; C 9,91; N_{tot} 30,40; H 3,85

per $\{Rh(CN)_2N_{3,5}H_6\}\ 2{,}5\ H_2O$

calc.	40,50	9,40	30,20	3,14

$\chi_{mol}\cdot 10^6 = -25$.

I preparati 1°, 2° e 3°, corrispondono tutti esattamente ai rapporti $Rh(CN)_2$: 1,5 N_2H_4 e, in base alla ipotesi dei radicali idrazidici, risulta la formula bruta del dimero presunto:

$$Rh_2(CN)_4(3\ N_2H_4—2\ H)\ ,\ \text{cioè}\ Rh_2(CN)_4N_6H_{10}\ .$$

Varia l'idratazione per l'essiccamento più o meno prolungato.

IV. $\{Rh_2(CN)_4N_2H_4—2\ H\}\cdot 6\ H_2O$. – L'ossidazione dei sali III precedenti venne attuata, con KIO_3 1/2 N, in ambiente debolmente alcalino per

potassa sui sali sospesi in acqua e con viva agitazione. Il residuo solido, giallo ocra, venne lavato ed essiccato e all'analisi è risultato:

trov. % Rh 46,75; C 10,50; N 18,29; H 2,50

per $\{Rh_2(CN)_4 \cdot N_2H_2\}\ 6\ H_2O$

calc. 46,00 10,72 18,75 3,12

$$\chi_{mol} \cdot 10^6 = -92\ .$$

V_1. $\{Rh_4(CN)_{7,5} \cdot 4\ N_2H_4 — 5,5H\}\ 11,5\ H_2O$. – Al cloruro paramagnetico $\{Rh_2Cl_4 \cdot N_8H_{12}\}\ 3\ H_2O$ in sospensione acquosa, è stato aggiunto KCN in soluzione diluita nel rapporto 1 Rh : 3,5 CN^-. Si agita per 3 ore: si nota sviluppo di N_2.

Il cianuro insolubile formatosi, separato al filtro, lavato, essiccato ha dato:

trov. % Rh 44,50; C 9,27; N 23,27; H 3,43

per $\{Rh_4(CN)_{7,5}N_8H_{10,5}\}\ 11,5\ H_2O$

calc. 44,05 9,61 23,16 3,58

Il sale è debolmente paramagnetico.

$$\chi_{4\ Rh} \cdot 10^6 = 1130 \qquad \mu_{1\ Rh} = 1,63$$

supponendo l'ipotetico rapporto 3 Rh^{III} : 1 Rh^{IV}.

V_2. $\{Rh_4(CN)_{7,5} \cdot 2,5\ N_2H_4 — 4,5\ H\}\ 12\ H_2O$. – Al cloruro paramagnetico, $\{Rh_2Cl_4 \cdot N_8H_{13}\}\ H_2O$ sospeso in acqua, è stato aggiunto KCN in soluzione diluita, nel rapporto 1 Rh : 3,5 CN^-. Si è avvertito sviluppo di N_2. Il cianuro insolubile formatosi separato e lavato al filtro all'analisi ha fornito

trov. % 45,30; C 9,89; N 19,71; H 2,83

per $\{Rh_4(CN)_{7,5} \cdot N_5H_{5,5}\}\ 12\ H_2O$

calc. 45,80 10,01 19,46 3,28

$$\chi_{mol} \cdot 10^6 = 146.$$

VI_1. $\{Rh_3(CN)_5 \cdot 5\ N_2H_4 — 4\ H\} \cdot 14\ H_2O$. – Al cloroesasale K_3KhCl_6 in acqua al 5 %, si aggiunge cloridrato di idrazina, per 1 Rh : 3 N_2H_4, e 3 Mol. di acetato di potassio a 30°; quindi si cianura a morte con HCN gassoso. Dalla soluzione, che rimane di colore rosso cupo con pH = 3, l'idrazina aggiunta nel rapporto di 1 Rh : 7 N_2H_4 precipita il cianuro giallo chiaro, diamagnetico. Il sale si separa e si lava alla centrifuga. Dopo essiccamento risulta:

trov. % Rh 36,70; C 6,87; N 24,74; H 4,21

per $\{Rh_3(CN)_5N_{10}H_{16}\}\ 14\ H_2O$

calc. % 36,70 7,12 24,90 4,63

$$\chi_{mol} \cdot 10^6 = -175.$$

VI_2. $\{Rh_3(CN)_5 6\ N_2H_4 — 4\ H\} \cdot 6\ H_2O$. – Venne ottenuto per azione di KCN in debole eccesso rispetto a 1 KCN/1 Rh, sul cloruro idrazinico preci-

cipitato con metanolo dalla soluzione fortemente idrazinica rispetto a K_3RhCl_6.

Dopo centrifugazione ed essiccamento il sale diamagnetico ha dato alle analisi:

trov. % Rh 42,00; C 7,80; N 32,15; H 4,60

per $\{Rh_3(CN)_5N_{12}H_{20}\}\,6\,H_2O$

calc.	41,80	8,12	32,20	4,87

$$\chi_{mol} \cdot 10^6 = -17.$$

VII_1. $\{Rh_2(CN)_2\,3\,N_2H_4{-}5\,H\}\cdot H_2O$. – Dalla soluzione fortemente idrazinica dell'esaclorosale, per aggiunta di metanolo precipita un sale giallo che, filtrato all'aria e ripetutamente lavato, è risultato essere un monocloruro.

Al monocloruro solido, sospeso in acqua, è stato aggiunto KCN nel rapporto 1,25 KCN : Rh. Il colore della sospensione passa da giallo aranciato a giallo chiaro. Il sale centrifugato e lavato a lungo con acqua, ha dato alle analisi:

trov. % Rh 56,00; C 6,40; N 30,65

per $\{Rh_2(CN)_2N_6H_7\}\cdot H_2O$

calc.	56,10	6,54	30,58

$$\chi_{2\,Rh} \cdot 10^6 = 1050 \qquad \mu_{1\,Rh} = 1{,}61.$$

VII_2. $\{Rh_2(CN)_22\,N_2H_4{-}4\,H\}\cdot 3{,}5\,H_2O$. – Al monocloruro diamagnetico, ottenuto per precipitazione con metanolo dalla soluzione fortemente idrazinica dell'esaclorosale, solido sospeso in acqua è stata aggiunta, operando sotto argon, una soluzione all'1 % di KCN nel rapporto 1 KCN : 1 Rh. Il sale centrifugato e lavato ripetutamente con acqua, essiccato su H_2SO_4 e KOH ha dato alle analisi:

trov. % Rh 53,70; C 6,56; N 22,15; N_{idraz} 14,70; H 2,94

per $\{Rh_2(CN)_2N_4H_4\}\cdot 3{,}5\,H_2O$

calc.	54,00	6,28	22,00	14,60	2,86

Il sale è debolmente paramagnetico.

$$\chi_{mol} \cdot 10^6 = 250.$$

Ringraziamo il laureando Carlo Giuffrida che ci ha aiutato validamente nella parte sperimentale.

Biochimica. — *Sintesi biologica della trifosfotiamina: sintesi ad opera del* Mycobacterium *Milch* (*). Nota di Alessandro Rossi-Fanelli, Pier Luigi Ipata, Paolo Fasella e Angela Marchetti, presentata (**) dal Corrisp. Alessandro Rossi-Fanelli.

La sintesi biologica della cocarbossilasi è stata estesamente studiata da numerosi Autori, sia nei micro-organismi che nei tessuti animali e in animali viventi [1]; solo scarse notizie si trovano invece nella letteratura a riguardo della sintesi biologica della trifosfotiamina (TPT) (1).

Nel 1952, nel nostro laboratorio [2] abbiamo dimostrato che nell'animale vivente il donatore di radicali fosforici per la sintesi della cocarbossilasi e del TPT è, direttamente o indirettamente, l'ATP. Successivamente abbiamo messo in evidenza la presenza nei mitocondri epatici di un sistema enzimatico che scinde in modo specifico il TPT in DPT e fosfato inorganico [3].

Nel 1956 Kiessling [4] ha osservato che il lievito è capace di fosforilare la tiamina a DPT ed a TPT, e che la incorporazione del P^{32} inorganico da parte delle cellule è molto maggiore nel TPT che non nel DPT e nell'MPT [5].

Nel 1958 Greiling [6] ha dimostrato la presenza nel lievito di un sistema enzimatico capace di fosforilare la tiamina a cocarbossilasi e a TPT traendo i radicali fosforici dall'ATP.

Studi di Kiessling del 1959 [7] compiuti con cellule di lievito integre, incubate aerobicamente con tiamina libera e fosfato inorganico radioattivo, hanno indirettamente dimostrato che la tiamina viene prima fosforilata a cocarbossilasi e che questa viene successivamente fosforilata a TPT.

Sullo scorcio del 1959, infine, Barnabei e Wildemann [8] hanno comunicato di aver osservato la comparsa di cocarbossilasi e di TPT nel sangue refluo dal fegato di ratto isolato e perfuso con sangue al quale era stata aggiunta tiamina.

Nel presente lavoro descriveremo alcuni studi sulla sintesi del TPT da parte di estratti grezzi e parzialmente purificati di *Mycobacterium* Milch nella fase logaritmica di crescita.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Biologica della Università di Roma.

(**) Nella seduta del 7 giugno 1960.

(1) Nel testo faremo uso delle seguenti abbreviazioni:

TPT = trifosfotiamina
DPT = difosfotiamina
MPT = monofosfotiamina
t_i = tiamina
ATP = adenosintrifosfato
ADP = adenosindifosfato
AMP = adenosinmonofosfato
Tris = tri(ossimetil-)aminometano.

Parte sperimentale.

Preparazione degli estratti.

Culture di *Mycobacterium Lacticola*, specie Milch, cresciute per 5–8 giorni sul terreno sintetico di Sauton, venivano raccolte per filtrazione; le cellule umide, raccolte dal filtro con una spatola, venivano rotte nel mulino refrigerato a palle, modello Zampieri (1959) [9], con una resa dell'80–90 % di cellule rotte. Dopo centrifugazione a 15.000 ×g, il precipitato, costituito da frammenti delle pareti cellulari e da cellule integre, veniva scartato ed il sopranatante limpido era utilizzato per la preparazione dei sistemi enzimatici. Al microscopio elettronico esso appariva costituito da materiale amorfo, contenente particelle sferoidali del diametro di 50–400 Å.

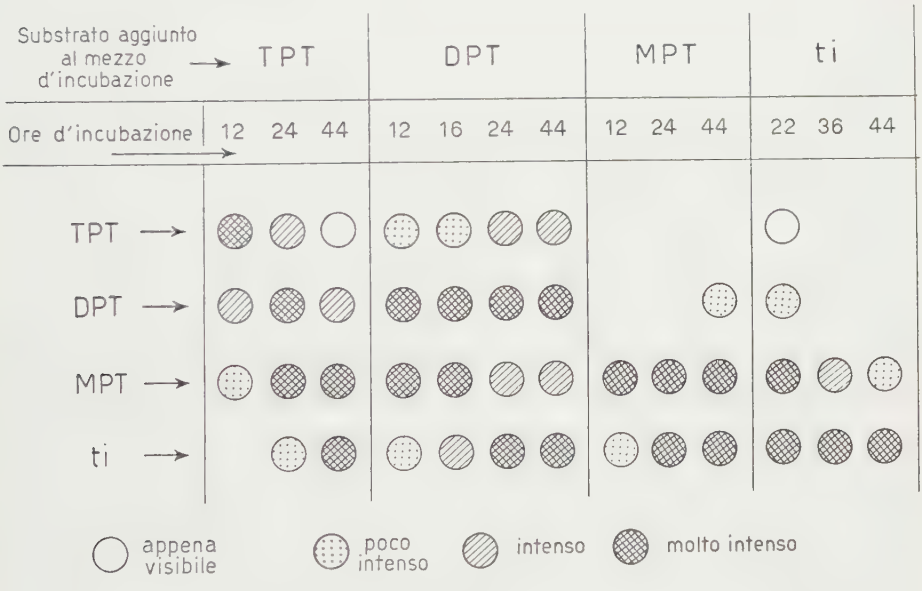


Fig. 1. – Azione dell'estratto batterico totale sulla tiamina e sui suoi esteri fosforici.

La figura riproduce i cromatogrammi eseguiti sulle miscele di reazione dopo diversi tempi di incubazione. La identità delle macchie è indicata nell'estremo sinistro della figura. Per la composizione della miscela di reazione vedere il testo.

A questo estratto grezzo, contenente dal 4 all'1 % di proteine determinate al micro-Kjeldhal, si aggiungeva a freddo e sotto continua agitazione solfato di ammonio solido nella misura di 500 mg/ml. Dopo 10 minuti il precipitato veniva raccolto per centrifugazione, disciolto in un volume di tampone tris 0,05 M pH 8,2 uguale a quello della soluzione iniziale e dializzato contro acqua distillata aggiustata a pH 8,2 con Tris, fino a scomparsa dei solfati.

Una parte dell'estratto così ottenuto e contenente circa l'1 % di proteine veniva direttamente utilizzato per alcune prove (*estratto totale*).

Un'altra parte dell'estratto veniva sottoposta a precipitazione frazionata attraverso 5 successive aggiunte di 100 mg di solfato di ammonio per ml di estratto o di sopranatante della frazione precedente; ciascuna delle frazioni precipitate veniva disciolta e dializzata per allontanare i solfati come descritto per l'estratto totale. Tutta la preparazione veniva compiuta tra 0° e + 5° C.

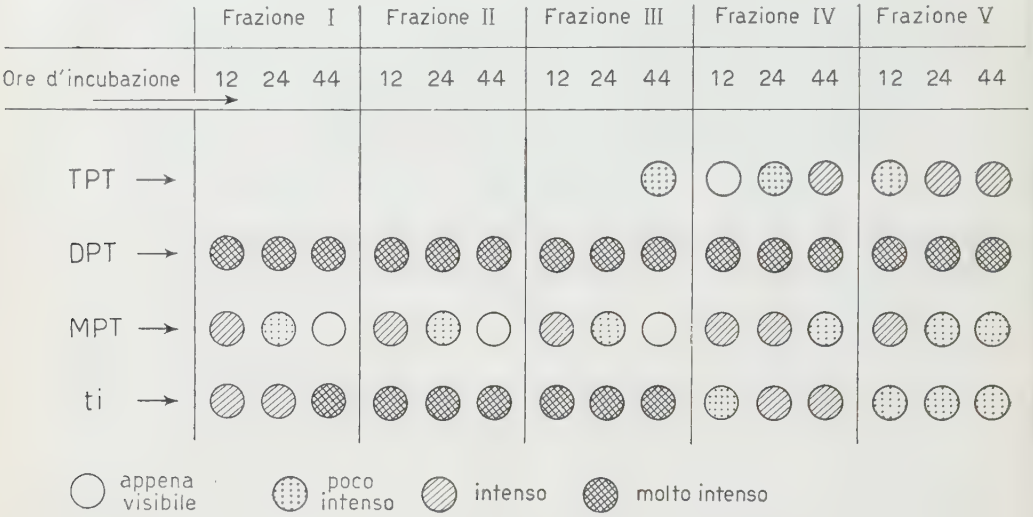


Fig. 2. – Attività sul DPT delle varie frazioni dell'estratto batterico.

La figura riproduce i cromatogrammi eseguiti sulle miscele di reazione dopo diversi tempi di incubazione. La identità delle macchie è indicata all'estremo sinistro della figura.

Per la composizione della miscela vedere il testo. Le frazioni sono state precipitate alle seguenti concentrazioni finali di solfato di ammonio: frazione I: 100 mg/ml; frazione II: 200 mg/ml; frazione III: 300 mg/ml; frazione IV: 400 mg/ml; frazione V: 500 mg/ml.

Prove di incubazione.

Se non diversamente indicato, la miscela di incubazione era composta di:

soluzione di DPT (o MPT o tiamina) 0,02 M, portata a pH 8,2 con NaOH : 0,1 ml;

tampone tris 0,05 M, pH 8,2 : 0,1 ml;

soluzione di ATP 0,015 M, portato a pH 8,2 con NaOH : 0,1 ml [2];

$MgCl_2$ 0,03 M : 0,1 ml;

K_2HPO_4 0,03 M : 0,1 ml;

estratto batterico (1 % di proteine): 0,2 ml;

volume finale portato a 0,8 ml con H_2O.

In alcune prove veniva aggiunto NaF 0,08 M nella proporzione di 0,1 ml per ml di miscela.

La incubazione veniva condotta, a 38° C, in provette tappate a tenuta.

(2) In alcune prove sono state usate quantità equivalenti di ADP in quanto in un precedente lavoro [10] era stato dimostrato che tutti gli estratti usati catalizzano una rapida trasformazione dell'ADP in ATP secondo la seguente reazione 2 ADP = ATP + AMP.

Determinazione dei composti.

Aliquote di 0,1 ml della miscela di reazione venivano prelevate a vari intervalli di tempo e cromatografate secondo Siliprandi [11].

Risultati.

I risultati sono riportati nelle figure 1, 2 e 3.

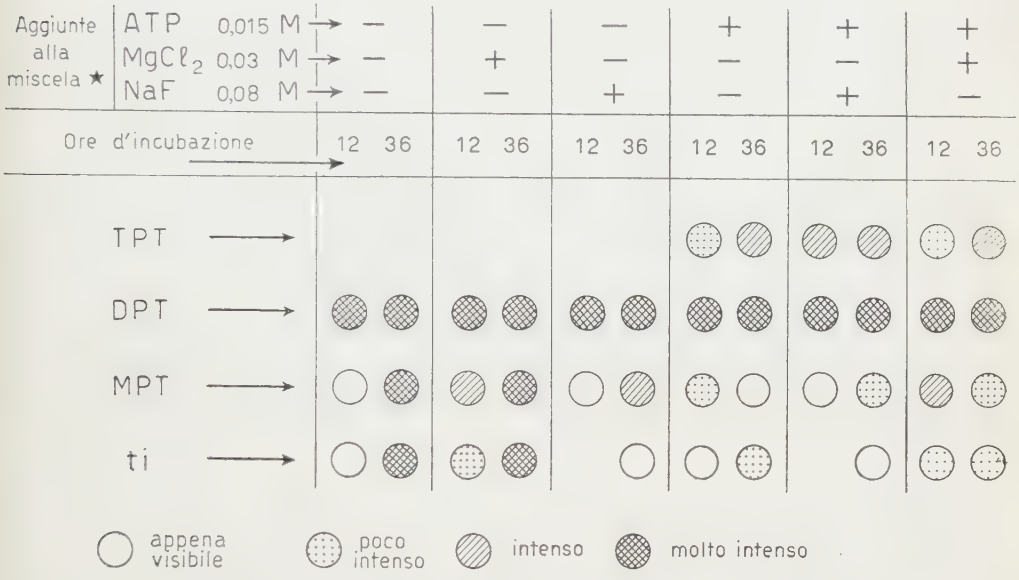


Fig. 3. – Effetto della composizione della miscela sull'azione delle frazioni IV e V sul DPT.

La figura riproduce i cromatogrammi eseguiti sulle miscele di reazione dopo 12 e 36 ore di incubazione. La identità delle macchie è indicata all'estremo sinistro della figura.

(*) In tutte le prove un ml di miscela di reazione conteneva: DPT 2 μmoli; tampone tris pH 8·2,50 μmoli; ATP, 1,5 μmoli; K_2HPO_4 30 μmoli; frazioni batteriche IV e V riunite: 1 mg di proteina. ATP, $MgCl_2$ e NaF venivano aggiunti in alcune prove nella concentrazione indicata nella tabella e nella proporzione di 0,1 ml per ml di miscela.

Discussione e conclusione.

I risultati sopra riportati suggeriscono le seguenti conclusioni.

L'estratto totale di *Mycobacterium* Milch contiene sistemi enzimatici capaci di catalizzare, a pH 8,2 sia la fosforilazione che la defosforilazione della tiamina e dei suoi esteri.

Per quanto concerne la defosforilazione, un esame delle quantità relative dei prodotti di defosforilazione dopo diversi tempi di incubazione indica che la reazione avviene precipuamente per distacco successivo di radicali fosforici. Ulteriori studi quantitativi potranno svelare se una quota minore degli esteri venga defosforilata per distacco di radicali pirofosforici.

L'estratto totale è anche capace di catalizzare, in presenza di ATP, la sintesi dei vari esteri fosforici della tiamina.

Un paragone dei risultati ottenuti usando come substrati i vari esteri e l'andamento delle reazioni nel tempo indicano che, con molta probabilità, la sintesi dei tre esteri fosforici procede attraverso le seguenti tappe:

$$\text{Tiamina} + \text{ATP} = \text{DPT} + \text{AMP}$$

$$\text{DPT} + \text{ATP} = \text{TPT} + \text{ADP}$$

$$\text{DPT} = \text{MPT} + \text{P}$$

Si noti infatti che, usando come substrato tiamina, nei primi tempi di incubazione sono visibili le macchie di MPT, DPT e, meno intense, di TPT. Successivamente le macchie di TPT e DPT si attenuano fino a sparire mentre quelle dell'MPT permangono intense più a lungo.

D'altra parte nelle prove in cui il substrato è costituito da MPT, si mette in evidenza solo la formazione di tiamina; il DPT appare in piccole quantità solo dopo 44 ore di incubazione, e si forma, presumibilmente, non direttamente dall'MPT ma dalla tiamina da questo formatasi per defosforilazione. L'MPT quindi non costituisce, nelle condizioni usate, una tappa intermedia nella sintesi degli esteri superiori. Il DPT, messo in evidenza dopo i primi tempi di incubazione con tiamina, si è presumibilmente formato per fosforilazione diretta di quest'ultima.

Resta aperto il problema se l'MPT si formi solo per defosforilazione del DPT o anche per fosforilazione diretta della tiamina.

Negli esperimenti in cui il substrato era inizialmente costituito da DPT, si è potuto mettere in evidenza la formazione sia di TPT che di MPT e, successivamente, di tiamina libera.

Dei tre substrati saggiati, il DPT sembra essere l'unico efficace precursore del TPT. Per tale ragione le successive indagini si sono puntualizzate su questo substrato.

Le prove compiute con l'estratto dopo frazionamento con solfato di ammonio indicano che, mentre gli enzimi defosforilanti rimangono principalmente nelle prime frazioni (precipitate con 100, 200 e 300 mg di solfato ammonio/ml) gli enzimi fosforilanti si trovano quasi esclusivamente nelle ultime due frazioni (precipitate con 400 e 500 mg/ml di solfato di ammonio).

Il successivo studio, compiuto sulle frazioni « fosforilanti » IV e V, e inteso a stabilire l'effetto sulla reazione dei vari componenti della miscela di incubazione, ha dimostrato che la presenza di ATP è indispensabile per la formazione del TPT dal DPT. Questo dato è importante perché esclude che, almeno nelle condizioni impiegate, la formazione del TPT possa essere avvenuta per una reazione del tipo « 2 DPT = TPT + MPT ».

Si è osservato inoltre che l'aggiunta di ioni Mg non è indispensabile. Per escludere la eventualità che tracce di Mg presenti nei reattivi usati potessero essere di per se sufficienti ad attivare la reazione, abbiamo compiuto delle prove aggiungendo un eccesso di NaF alla miscela di reazione. Anche in questo caso si aveva formazione di TPT, non solo, ma questa era ancora più evidente per la contemporanea inibizione della attività fosfatasica.

Sono in corso studi tendenti ad isolare e caratterizzare i sistemi enzimatici messi in evidenza nel presente lavoro.

Siamo grati al sig. Pietro Giovannini per la sua abile collaborazione nella preparazione degli estratti batterici.

Bibliografia.

[1] D. E. Metzler, « The Enzymes », *2*, 293 (1960).
[2] A. Rossi-Fanelli, N. Siliprandi and P. Fasella, « Science », *116*, 711 (1952).
[3] A. Rossi-Fanelli, N. Siliprandi, D. Siliprandi, P. Ciccarone, *Proc. Int. Symp. on Enz. Chem.*, Tokyo 1957, p. 119.
[4] K. H. Kiessling, « Acta Chem. Scand. », *10*, 831 (1956).
[5] K. H. Kiessling, « Biochim. et Biophys. Acta », *20*, 293 (1956).
[6] H. Greiling, *Reported at the 4th Inter. Congr. Biochem.*, Vienna (1958).
[7] K. H. Kiessling, « Acta Chem. Scand. », *13*, 1358 (1959).
[8] O. Barnabei und L. Wildemann, « Naturwissenschaften », *46*, 229 (1959).
[9] A. Zampieri, « Rend. Acc. Naz. Lincei », *27*, 265 (1959).
[10] P. L. Ipata, M. C. Gabrielli, C. Cattaneo, « Ann. Ist. "C. Forlanini" », *19*, 427 (1959).
[11] D. Siliprandi and N. Siliprandi, « Biochim. et Biophys. Acta », *14*, 52 (1954).

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Analisi funzionale. — *Sur la représentation intégrale des applications linéaires continues des espaces* L_F^p $(1 \leq p < +\infty)$. Nota (*) di Ivan Singer, presentata dal Socio M. Picone.

1. Soient Z un espace localement compact, ν une mesure de Radon positive sur Z, E et F deux espaces de Banach. La Note présente est consacrée (comme nous l'avons mentionné à la fin du travail [6]) à la représentation intégrale des applications linéaires continues générales de l'espace $L_F^p = L_F^p(Z, \nu)$ $(1 \leq p < +\infty)$ dans l'espace E. Nous ne ferons aucune hypothèse de dénombrabilité.

2. Soit T. une fonction d'ensemble définie sur le clan $\mathfrak{B}$ de tous les sous-ensembles boréliens de Z, à valeurs dans l'espace $\mathfrak{L}(F, E)$ de toutes les applications linéaires continues de F dans E, telle que toutes les fonctions d'ensemble $T.y$ $(y \in F)$ soient dénombrablement additives sur $\mathfrak{B}$.

Pour $1 \leq p' < +\infty$ nous définissons la *p'–semi–variation* (sur $\mathfrak{B}$) de la fonction d'ensemble T. par (1)

$$(1) \qquad p'\text{–Semivar}_{e \in \mathfrak{B}} T_e = \sup_{\|x'\| \leq 1} p'\text{–Var}_{e \in \mathfrak{B}} T'_e x' = \sup_{\|x'\| \leq 1} \sup \left(\sum_i \frac{\|T'_{e_i} x'\|^{p'}}{[\nu(e_i)]^{p'-1}} \right)^{\frac{1}{p'}},$$

où le dernier sup est pris pour toutes les collections finies d'ensembles disjoints $e_i \in \mathfrak{B}$.

Pour $p' = +\infty$, nous poserons

$$(2) \qquad \infty\text{–Semivar}_{e \in \mathfrak{B}} T_e = \sup_{\|x'\| \leq 1} \sup_{e \in \mathfrak{B}} \frac{\|T'_e x'\|}{\nu(e)} = \sup_{e \in \mathfrak{B}} \frac{\|T'_e\|}{\nu(e)}.$$

L'ensemble de toutes les fonctions d'ensemble T. définies sur $\mathfrak{B}$, à valeurs dans $\mathfrak{L}(F, E)$, à p'–semi–variation bornée et telles que toutes les fonctions $T.y$ $(y \in F)$ soient dénombrablement additives, muni des opérations vectorielles naturelles et de la norme (1), respectivement (2) (suivant que $p' < +\infty$

(*) Pervenuta all'Accademia il 12 luglio 1960.

(1) On désigne par E' le dual de E, par x' les éléments de E', et par T'_e la transposée de T_e. Pour $p' = 1$ l'expression (1) n'est autre que la semi–variation habituelle de la fonction d'ensemble T. (voir [2], proposition 1).

Pour les notations et les notions utilisées dans la suite et non expliquées (p. ex. L_F^p, $\mathfrak{L}_F^p$, N_p, etc.) voir [1].

ou $p' = +\infty$), constitue un espace de Banach, que nous désignerons par $\mathfrak{V}^{p'}$ $(1 \leq p' \leq +\infty)$.

Remarquons que, si Z est compact, $\mathfrak{V}^{p'} \subset \mathfrak{V}^1$ $(1 \leq p' \leq +\infty)$. Donc, pour toute partie compacte K d'un Z localement compact on a $\mathfrak{V}^{p'} \subset \mathfrak{V}^1$ sur $\mathfrak{B}_K = \{e \in \mathfrak{B} \mid e \subset K\}$.

3. Nous allons définir l'intégrale sur Z d'une $y(.) \in L_F^p$ $(1 \leq p < +\infty)$ par rapport à une fonction $T. \in \mathfrak{V}^{p'}$, où

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \qquad \text{si} \quad p > 1, \tag{3}$$

$$p' = +\infty \qquad \text{si} \quad p = 1.$$

Pour toute fonction $y(.)$ (à valeurs dans F) continue et à support compact K, nous poserons

$$\int_Z dT_\zeta\, y(\zeta) = \int_K dT_\zeta\, y(\zeta), \tag{4}$$

où l'intégrale du membre droit est l'intégrale bilinéaire classique de Radon–Gowurin [3]; elle existe, puisque $\mathfrak{V}^{p'} \subset \mathfrak{V}^1$ sur $\mathfrak{B}_K$. En remarquant que pour toute fonction simple[2] $y(.) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{e_i}(.)\, y_i \left(e_i \in \mathfrak{B} \text{ disjoints}, \sum_{i=1}^{n} e_i = K, y_i \subset F \right)$, donc aussi pour toute fonction $y(.)$ continue et à support compact, on a

$$\left\| \int_Z dT_\zeta\, y(\zeta) \right\|_E \leq (p'\text{–Semivar}_{e \in \mathfrak{B}}\ T_e)\, N_p(y(.)), \tag{5}$$

nous définissons l'intégrale d'une fonction $y(.) \in \mathfrak{L}_F^p$ $(1 \leq p < +\infty)$, par rapport a $T. \in \mathfrak{V}^{p'}$, en prolongeant (4) par continuité (au sens de la norme $N_p(y(.))$, et ensuite l'intégrale d'une classe d'équivalence $y(.) \in L_F^p$ $(1 \leq p < +\infty)$ par rapport à $T. \in \mathfrak{V}^{p'}$, par passage au quotient; en vertu de (5) cette intégrale est bien déterminée. De plus, l'inégalité (5) reste évidemment valable pour toute $y(.) \in L_F^p$.

4. THÉORÈME. – *L'espace* $\mathfrak{L}(L_F^p, E)$ $(1 \leq p < +\infty)$ *est équivalent*[3] *à l'espace* $\mathfrak{V}^{p'}$, *ou* p' *est le nombre défini par* (3). *L'équivalence* $u \longleftrightarrow T.$ *entre ces deux espaces est donnée par la relation*

$$uy(.) = \int_Z d\, T_\zeta\, y(\zeta) \qquad \left(y(.) \in L_F^p\right). \tag{6}$$

(2) On désigne par $\varphi_{e_i}(.)$ la fonction caractéristique de l'ensemble $e_i \in \mathfrak{B}$.

(3) C'est–à–dire isométriquement isomorphe.

Démonstration. – Soit $u \in \mathfrak{L}\left(L_F^p, E\right)$. Définissons une fonction d'ensemble T. sur $\mathfrak{B}$, à valeurs dans $\mathfrak{L}(F, E)$, par

$$T_e y = u\left[\varphi_e(\cdot) y\right] \qquad (e \in \mathfrak{B}, y \in F). \tag{7}$$

Les fonctions d'ensemble $T.y$ $(y \in F)$ sont alors dénombrablement additives. Soient, en effet, $e_1, \cdots, e_n, \cdots \in \mathfrak{B}$ disjoints et tels que $\sum_{n=1}^{\infty} e_n \in \mathfrak{B}$, et soit $y \in F$. En vertu du théorème de Lebesgue ([1], chap. IV, p. 140), on a

$$\varphi_{\sum_{n=1}^{\infty} e_n}(\cdot) y = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{e_n}(\cdot) y$$

au sens de la norme de L_F^p. Par conséquent on a, indépendamment de l'ordre des e_n,

$$T_{\sum_{n=1}^{\infty} e_n} y = u\left[\varphi_{\sum_{n=1}^{\infty} e_n}(\cdot) y\right] = u\left[\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{e_n}(\cdot) y\right] = \sum_{n=1}^{\infty} u\left[\varphi_{e_n}(\cdot) y\right] = \sum_{n=1}^{\infty} T_{e_n} y .$$

La fonction d'ensemble T. est aussi à p'–semi–variation bornée. Soit, en effet, $1 < p < +\infty$ et soient $e_1, \cdots, e_n \in \mathfrak{B}$ disjoints, $y_1, \cdots, y_n \in F$, $x' \in E'$. On a

$$\sum_{i=1}^{n} \left|\left\langle T_{e_i} y_i, x'\right\rangle\right| = \sum_{i=1}^{n} \left|\left\langle u\left[\varphi_{e_i}(\cdot) y_i\right], x'\right\rangle\right| = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \left\langle u\left[\varphi_{e_i}(\cdot) y_i\right], x'\right\rangle =$$

$$\left\langle u\left[\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \varphi_{e_i}(\cdot) y_i\right], x'\right\rangle \leq \|u\| \|x'\| N_p\left(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \varphi_{e_i}(\cdot) y_i\right) =$$

$$\|u\| \|x'\| \left[\sum_{i=1}^{n} \|\varepsilon_i y_i\|^p \nu(e_i)\right]^{\frac{1}{p}} \leq \|u\| \|x'\| \left[\sum_{i=1}^{n} \|y_i\|^p \nu(e_i)\right]^{\frac{1}{p}},$$

puisque les e_i sont disjoints et que

$$|\varepsilon_i| = \left|\frac{\overline{\left\langle u\left[\varphi_{e_i}(\cdot) y_i\right], x'\right\rangle}}{\left|\left\langle u\left[\varphi_{e_i}(\cdot) y_i\right], x'\right\rangle\right|}\right| \leq 1 \qquad \left(\frac{0}{0} = 0\right).$$

Soit $\varepsilon > 0$ arbitraire et choisissons les $y_1, \cdots, y_n \in F$ de façon qu'on ait

$$\|y_i\| = \left(\frac{\|T'_{e_i} x'\|}{\nu(e_i)}\right)^{p'-1}$$

et

$$\left|\left\langle T_{e_i} y_i, x'\right\rangle\right| = \left|\left\langle y_i, T'_{e_i} x'\right\rangle\right| \geq \|T'_{e_i} x'\| \|y_i\| - \frac{\varepsilon}{n}$$

$(i = 1, \cdots, n)$. On aura alors

$$\sum_{i=1}^{n} \|T'_{e_i} x'\| \left(\frac{\|T'_{e_i} x'\|}{\nu(e_i)}\right)^{p'-1} \leq \|u\| \|x'\| \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\|T'_{e_i} x'\|}{\nu(e_i)}\right)^{pp'-p} \nu(e_i)\right]^{\frac{1}{p}} + \varepsilon ,$$

d'où, comme $\varepsilon > 0$ a été arbitraire et comme $pp' - p = p'$,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\| T'_{e_i} x' \|^{p'}}{[\nu(e_i)]^{p'-1}} \leq \| u \| \| x' \| \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\| T'_{e_i} x' \|^{p'}}{[\nu(e_i)]^{p'-1}} \right)^{\frac{1}{p}},$$

c'est-à-dire

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\| T'_{e_i} x' \|^{p'}}{[\nu(e_i)]^{p'-1}} \right)^{\frac{1}{p'}} \leq \| u \| \| x' \|.$$

Par conséquent, comme la collection finie d'ensembles disjoints $\{e_1, \cdots, e_n\} \subset \mathfrak{B}$ et l'élément $x' \in E'$ ont été arbitraires, on a

$$p'\text{–Semivar}_{e \in \mathfrak{B}} T_e \leq \| u \|. \tag{8}$$

Dans le cas où $p = 1$ on a, pour $e \in \mathfrak{B}$, $y \in F$,

$$| T_e y | = \| u [\varphi_e(\cdot) y] \| \leq \| u \| N_1 [\varphi_e(\cdot) y] = \| u \| \| y \| \nu(e),$$

donc

$$\| T_e \| \leq \| u \| \nu(e) \qquad (e \in \mathfrak{B}),$$

d'où

$$\infty\text{–Semivar}_{e \in \mathfrak{B}} T_e \leq \| u \|. \tag{9}$$

Cela étant, (6) résulte du (7) et de la définition de l'intégrale. Une comparaison des inégalités (8), respectivement (9) (suivant que $1 < p < +\infty$ où $p = 1$), et (5), nous donne l'égalité

$$\| u \| = p'\text{–Semivar}_{e \in \mathfrak{B}} T_e . \tag{10}$$

Enfin, l'unicité de la fonction d'ensemble T. résulte du fait que (6) entraîne toujours (7).

Soit, réciproquement, $T. \in \mathfrak{V}^{p'}$. L'application $u \in \mathfrak{L}(L^p_F, E)$ définie (univoquement) par (6) est alors linéaire sur L^p_F, et, en vertu de (5), continue sur L^p_F. Enfin, en vertu de l'unicité de la fonction d'ensemble $T. \in \mathfrak{V}^{p'}$ satisfaisant à (6), il s'ensuit de ce qui précède qu'on a aussi (10).

Le théorème est démontré.

5. *Remarques.* – 1° L'intérêt du théorème ci-dessus réside dans sa généralité. D'une part, dans le cas particulier où $F = K$, le champ de scalaires, on retrouve le théorème de R. S. Phillips ([4], théorème 4.1) concernant la représentation des applications linéaires continues de L^p $(1 \leq p < +\infty)$ dans E. En effet, en désignant l'image de $T_e \in \mathfrak{L}(K, E)$ par l'équivalence $\mathfrak{L}(K, E) \equiv E$ encore par T_e, on aura, pour $1 < p' < +\infty$,

$$p'\text{–Semivar}_{e \in \mathfrak{B}} T_e = \sup_{\| x' \| \leq 1} \sup \left(\sum_i \frac{| T'_{e_i} x' |^{p'}}{[\nu(e_i)]^{p'-1}} \right)^{\frac{1}{p'}} =$$

$$= \sup_{\| x' \| \leq 1} \sup \left(\sum_i \frac{| \langle T_{e_i}, x' \rangle |^{p'}}{[\nu(e_i)]^{p'-1}} \right)^{\frac{1}{p'}}.$$

D'autre part, dans le cas particulier où $E = K$, on retrouve du théorème ci–dessus le théorème 5 du travail antérieur [5], concernant la représentation des formes linéaires continues sur L_F^p $(1 \leq p < +\infty)$. En effet, dans ce cas la fonction d'ensemble $T_\cdot \in \mathfrak{V}^{p'}$ prend ses valeurs dans $\mathfrak{L}(F, K) \equiv F'$, et l'on a

$$p'\text{–Semivar } T_e = \sup_{\substack{x' \subset K' \\ \|x'\| \leq 1}} p'\text{–Var } T'_e x' = p'\text{–Var } T'_e = p'\text{–Var } T_e .$$
$$e \in \mathfrak{B} \qquad\qquad e \subset \mathfrak{B} \qquad\qquad e \subset \mathfrak{B} \qquad\qquad e \in \mathfrak{B}$$

2° Si l'on admet comme point de départ la valabilité du théorème ci–dessus dans l'un quelconque des deux cas particuliers mentionnés dans la remarque 1°, on peut donner des démonstrations plus courtes du théorème ci–dessus, par des méthodes analogues à celles utilisées pour la démonstration du théorème 1 de [2] (concernant la représentation des applications linéaires continues de $C_F(K)$ dans E).

3° Le cas particulier $p = 1$, $E = G'$ (G espace de Banach) du théorème ci–dessus nous l'avons obtenu dans le travail [6] aussi.

4° Le résultat de cette Note peut être étendu, par les méthodes de [5], au cas de l'espace $\mathfrak{L}(L_\Lambda^p, E)$, où Λ est une famille fondamentale de champs de vecteurs continus sur Z, et où L_Λ^p désigne l'espace de toutes les classes d'équivalence des champs de vecteurs de puissance $p^{\text{ième}}$ sommable (relativement à ν et Λ), muni de sa norme naturelle N_p.

Bibliographie.

[1] N. Bourbaki, *Intégration, Éléments de Mathématique*, livre VI, chap. I–IV, Paris (1952).

[2] C. Foiaș et I. Singer, *Some remarks on the representation of linear operators in spaces of vector–valued continuous functions*, « Revue de Math. pures et appl. », t. V, nr. 3–4 (1960), sous presse.

[3] M. Gowurin, *Ueber die Stieltjessche Integration abstrakter Funktionen*, « Fundam. Math. », t. 27, pp. 254–268 (1936).

[4] R. S. Phillips, *On linear transformations*, « Trans. Amer. Math. Soc. », t. 48, pp. 516–541 (1940).

[5] I. Singer, *Les duals de certains espaces de Banach de champs de vecteurs*. II, « Bull. Sci. math. », t. 83, pp. 73–96 (1959).

[6] I. Singer, *Sur une classe d'applications linéaires continues des espaces* L_F^p $(1 \leq p < +\infty)$, « Ann. Éc. Norm. Sup. » (1960), sous presse.

Meccanica. — *Influenza del taglio nella dinamica e nella statica delle piastre sottili* (*). Nota II di ENRICO VOLTERRA, presentata (**) dal Socio A. SIGNORINI.

Continuo in questa Nota lo studio dell'influenza del taglio nella dinamica e nella statica delle piastre sottili elastiche.

Per le premesse ed il significato dei simboli mi riferisco alla precedente Nota I, pubblicata su cotesti « Rendiconti ». Anche la numerazione delle formule e delle figure è fatta in continuazione.

3. – ONDE DI FLESSIONE NELLE PIASTRE SOTTILI. VELOCITÀ DI FASE SECONDO LA TEORIA CLASSICA E SECONDO LA TEORIA ESATTA DEL LAMB. INFLUENZA DELL'INERZIA ROTATORIA E DEL TAGLIO.

Ponendo:

$$w_0 = A e^{i\gamma(x-ct)} \tag{24}$$

ove A è una costante, $i = \sqrt{-1}$, $\gamma = \frac{2\pi}{L}$ il numero d'onda, L la lunghezza d'onda e c la velocità di fase. Sostituendo l'equazione (24) nelle equazioni (18), (19), (20) e (21) dopo avervi posto $p = 0$, si ottengono le seguenti espressioni per le velocità di fase.

Dalla teoria classica (equazione 21):

$$\frac{c}{c_0} = \frac{H}{L} \frac{\pi}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} . \tag{25}$$

Dall'equazione (18) si ottiene:

$$\left(\frac{H}{L}\right)^2 = \frac{3}{\pi^2} \frac{k}{2(1+\nu)} \frac{\left(\frac{c}{c_0}\right)^2}{\left[\left(\frac{c}{c_0}\right)^2 - \frac{k}{2(1+\nu)}\right]\left[\left(\frac{c}{c_0}\right)^2 - \frac{1}{1-\nu^2}\right]} . \tag{26}$$

Dalle equazioni (19), (20) e (23) si ottiene rispettivamente:

$$\left(\frac{H}{L}\right)^2 = \frac{3}{\pi^2} \frac{\left(\frac{c}{c_0}\right)^2}{\left[\frac{1}{1-\nu^2} - \left(\frac{c}{c_0}\right)^2\right]} \tag{27}$$

$$\left(\frac{H}{L}\right)^2 = \frac{3k(1-\nu)}{2\pi^2} \frac{\left(\frac{c}{c_0}\right)^2}{\left[\frac{k}{2(1+\nu)} - \left(\frac{c}{c_0}\right)^2\right]} \tag{28}$$

$$\left(\frac{H}{L}\right)^2 = \frac{3}{2\pi^2(1+\nu)} \frac{\left(\frac{c}{c_0}\right)^2}{\left[\left(\frac{c}{c_0}\right)^2 - \frac{1}{2(1+\nu)}\right]\left[\left(\frac{c}{c_0}\right)^2 - \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\right]} . \tag{29}$$

(*) Il presente lavoro è stato eseguito sotto gli auspici della National Science Foundation, Washington, D. C.; e viene pubblicato col consenso della National Science Foundation.

(**) Nella seduta del 7 giugno 1960.

La teoria esatta del Lamb dà invece la seguente equazione trascendente per la frequenza [17]:

$$\frac{\tan h\left(n\frac{H}{2}\right)}{\tan h\left(m\frac{H}{2}\right)} = \frac{(\gamma^2 + n^2)^2}{4\gamma^2 mn} \tag{30}$$

con

$$\gamma = \frac{2\pi}{L} \quad ; \quad m^2 = \gamma^2\left[1 - \frac{c^2}{c_1^2}\right] \quad ; \quad n^2 = \gamma^2\left[1 - \frac{c^2}{c_2^2}\right]$$

$c_1 = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)\rho}}$ velocità delle onde di dilatazione

$c_2 = \sqrt{\frac{E}{2(1+\nu)\rho}}$ velocità delle onde di distorsione.

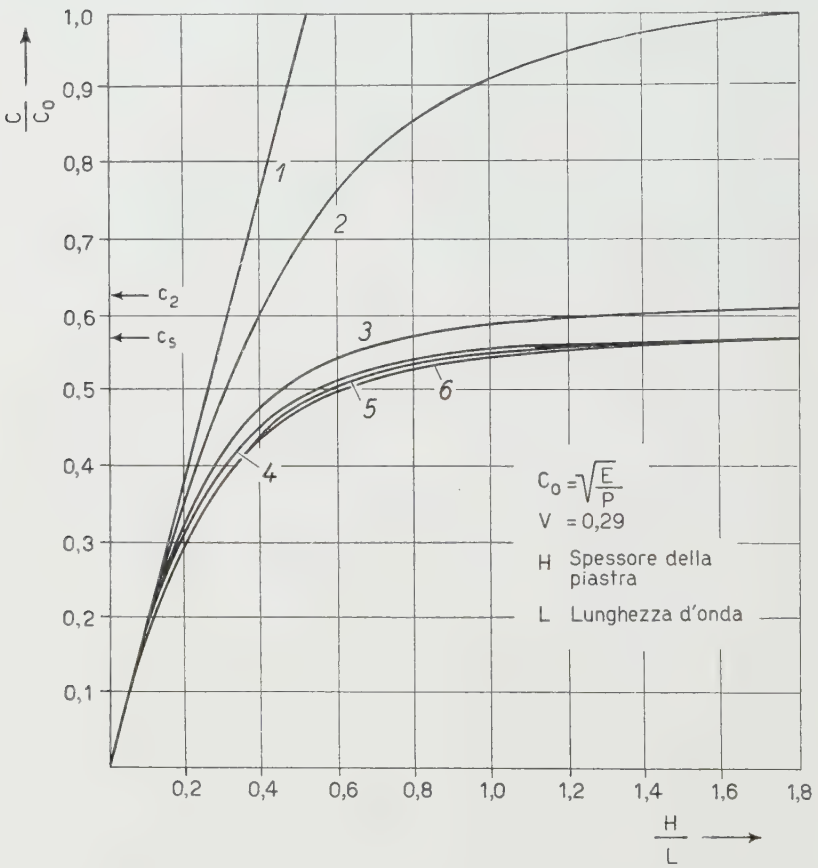


Fig. 3. – Velocità di fase per onde di flessione in piastre sottili.

1. Teoria classica (equazione 25). 2. Presente teoria trascurando il taglio (equazione 26). 3. Presente teoria Ia approssimazione (equazione 27). 4. Presente teoria trascurando l'inerzia rotatoria (equazione 28). 5. Teoria esatta secondo il Lamb (equazione 30). 6. Presente teoria tenendo conto del taglio e dell'inerzia rotatoria (equazione 29).

(17) Vedi H. Lamb, op. cit.

L'equazione (30) si riduce, come ha mostrato il Lamb, nel caso di onde lunghe rispetto allo spessore della piastra (L $\gg$ H) all'equazione (25) della teoria elementare, mentre nel caso di onde corte (L $\ll$ H) l'equazione (30) può venire scritta sotto la forma seguente:

$$(31) \qquad \left(\frac{c_S^2}{c_2^2}\right)^3 - 8\left(\frac{c_S^2}{c_2^2}\right)^2 + \left(\frac{c_S^2}{c_2^2}\right)\left(24 - 16\,\frac{c_2^2}{c_1^2}\right) - 16\left(1 - \frac{c_2^2}{c_1^2}\right) = 0\,.$$

L'equazione (31) è l'equazione delle onde superficiali di Lord Rayleigh. Nel caso $\nu = 0{,}29$ l'unica soluzione dell'equazione (31) è la radice $c_S = 0{,}9258\, c_2$ cioè $c_S = 0{,}5763\, c_1$.

Nella fig. 3 sono riportate le curve delle velocità di fase per onde di flessione per piastre sottili secondo le equazioni (26), (27), (28), (29) e (30). Le ordinate della fig. 3 rappresentano il rapporto c/c_0 mentre le ascisse il rapporto H/L.

4. – LE EQUAZIONI DI EQULIBRIO. CONFRONTO COLLA TEORIA DEL REISSNER.

Nel caso statico le equazioni (11) diventano:

$$(32) \quad \begin{cases} D\,\dfrac{\partial^2 \mu_x}{\partial x^2} + \dfrac{1+\nu}{2}\,D\,\dfrac{\partial^2 \mu_y}{\partial x\,\partial y} + \dfrac{1-\nu}{2}\,D\,\dfrac{\partial^2 \mu_x}{\partial y^2} - \dfrac{EH\,k}{2(1+\nu)}\,\dfrac{\partial w_0}{\partial x} - \dfrac{EH\,k}{2(1+\nu)}\,\mu_x = 0 \\ D\,\dfrac{\partial^2 \mu_y}{\partial y^2} + \dfrac{1+\nu}{2}\,D\,\dfrac{\partial^2 \mu_x}{\partial x\,\partial y} + \dfrac{1-\nu}{2}\,D\,\dfrac{\partial^2 \mu_y}{\partial x^2} - \dfrac{EH\,k}{2(1+\nu)}\,\dfrac{\partial w_0}{\partial y} - \dfrac{EH\,k}{2(1+\nu)}\,\mu_y = 0 \\ \dfrac{EH\,k}{2(1+\nu)}\,\Delta w_0 + \dfrac{EH\,k}{2(1+\nu)}\left(\dfrac{\partial \mu_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \mu_y}{\partial y}\right) = -\,p\,(x,y) \end{cases}$$

mentre le condizioni al contorno rimangono le medesime equazioni (12). Le equazioni (16); diventano:

$$(33) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \mathfrak{M}_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \mathfrak{M}_{yx}}{\partial y} = T_x \\ \dfrac{\partial \mathfrak{M}_{yx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \mathfrak{M}_y}{\partial y} = T_y \\ \dfrac{\partial T_x}{\partial x} + \dfrac{\partial T_y}{\partial y} = -\,p\,(x,y) \end{cases}$$

mentre l'equazione (18) diventa:

$$D\Delta\Delta w_0\,(x,y) = \left[1 - \frac{H^2}{6(1-\nu)\,k}\,\Delta\right] p\,(x,y)\,.$$

Dalle equazioni (14) e (15) si ottiene:

$$\frac{EH}{2(1+\nu)}\,\mu_x = \frac{T_x}{k} - \frac{EH}{2(1+\nu)}\,\frac{\partial w_0}{\partial x}$$

$$\frac{EH}{2(1+\nu)}\,\mu_y = \frac{T_y}{k} - \frac{EH}{2(1+\nu)}\,\frac{\partial w_0}{\partial y}$$

$$M_x = D\left(\frac{\partial \mu_x}{\partial x} + \nu\,\frac{\partial \mu_y}{\partial y}\right) = \frac{H^2}{6(1-\nu)}\left[\frac{1}{k}\left(\frac{\partial T_x}{\partial x} + \nu\,\frac{\partial T_y}{\partial y}\right) - D\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + v\,\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right)\right]$$

oppure

$$M_x - \frac{H^2}{6k}\frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\nu H^2}{6(1-\nu)k}\left(\frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y}\right) = -D\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right)$$

ed in vista dell'ultima equazione (33) si ottiene:

$$M_x - \frac{H^2}{6k}\frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\nu H^2}{6(1-\nu)k}p = -D\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right). \tag{35}$$

Analogamente di ottiene:

$$M_y - \frac{H^2}{6k}\frac{\partial T_y}{\partial y} + \frac{\nu H^2}{6(1-\nu)k}p = -D\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right). \tag{36}$$

Dalle equazioni (14) e (15) discende

$$M_{xy} = M_{yx} = \frac{1-\nu}{2}D\left(\frac{\partial \mu_x}{\partial y} + \frac{\partial \mu_y}{\partial x}\right) = \frac{H^2}{12}\left[\frac{1}{k}\left(\frac{\partial T_x}{\partial y} + \frac{\partial T_y}{\partial x}\right) - \frac{EH^3}{12(1+\nu)}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\,\partial y}\right]$$

e finalmente:

$$\mathfrak{M}_{xy} - \frac{H^2}{12k}\left(\frac{\partial T_x}{\partial y} + \frac{\partial T_y}{\partial x}\right) = -(1-\nu)D\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\,\partial y}. \tag{37}$$

Sostituendo per M_x e M_y nelle prime delle equazioni (33) i valori dati dalle equazioni (35) e (37) ed in vista dell'ultima delle equazioni (33) si ottiene:

$$T_x - \frac{H^2}{12k}\Delta T_x + \frac{H^2}{12(1-\nu)k}\frac{\partial p}{\partial x} = -D\frac{\partial}{\partial x}\Delta w_0. \tag{38}$$

Analogamente si ottiene

$$T_y - \frac{H^2}{12k}\Delta T_x + \frac{H^2}{12(1-\nu)k}\frac{\partial p}{\partial y} = -D\frac{\partial}{\partial y}\Delta w_0. \tag{39}$$

Nel caso statico il valore del coefficiente del taglio k dovrebbe essere $k = 1/1{,}2 = 0{,}833$ [18].

Nel caso di una piastra sottilissima ($H \to 0$) e le equazioni precedenti si riducono alle seguenti:

$$D\Delta\Delta w_0 = p(x, y) \tag{34'}$$

$$M_z = -D\left[\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right] \tag{35'}$$

$$M_x = -D\left[\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right] \tag{36'}$$

$$M_{xy} = M_{yx} = -(1-\nu)D\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\,\partial y} \tag{37'}$$

$$T_x = -D\frac{\partial}{\partial x}(\Delta w_0) \tag{38'}$$

$$T_y = -D\frac{\partial}{\partial y}(\Delta w_0) \tag{39'}$$

della teoria classica.

(18) Vedi: L. Bolle, op. cit.

Le equazioni (34), (35), (36), (37), (38) e (39) corrispondono alle seguenti equazioni della teoria del Reissner:

$$(34'') \qquad D\Delta\Delta w_0 = \left[1 - \frac{H^2}{10}\frac{2-\nu}{1-\nu}\Delta\right] p$$

$$(35'') \qquad M_x - \frac{H^2}{S}\frac{\partial T_x}{\partial x} - \frac{H^2}{10}\frac{\nu}{(1-\nu)}p = -D\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w_0}{\partial y}\right)$$

$$(36'') \qquad M_y - \frac{H^2}{S}\frac{\partial T_y}{\partial y} - \frac{H^2}{10}\frac{\nu}{(1-\nu)}p = -D\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right)$$

$$(37'') \qquad M_{xy} - \frac{H^2}{10}\left(\frac{\partial T_x}{\partial y} - \frac{\partial T_y}{\partial x}\right) = -(1-\nu)D\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\,\partial y}$$

$$(38'') \qquad T_x - \frac{H^2}{10}\Delta T_x + \frac{H^2}{10(1-\nu)}\frac{\partial p}{\partial x} = -D\frac{\partial}{\partial x}(\Delta w_0)$$

$$(39'') \qquad T_y - \frac{H^2}{10}\Delta T_y \times \frac{H^2}{10(1-\nu)}\frac{\partial p}{\partial y} = -D\frac{\partial}{\partial y}(\Delta w_0).$$

Aerodinamica. — *Regione di arresto per un solido di rotazione a prora schiacciata in corrente ipersonica assiale.* Nota (*) di ALDO MUGGIA, presentata dal Corrisp. C. FERRARI.

1. In un precedente lavoro (1) si è studiata la regione di arresto per un solido a prora arrotondata in corrente ipersonica permanente assiale non viscosa. La forma della prora del corpo è caratterizzata dal parametro adimensionale

$$\beta = R_B R_B''$$

essendo R il raggio di curvatura della linea meridiana del solido, R'' la sua derivata seconda rispetto all'ascissa curvilinea di tale linea e B il punto di arresto. La ricerca citata non è valida nel caso in cui β è molto grande in valore assoluto, il che corrisponde a un solido con prora schiacciata (tale è il caso, ad esempio, di una prora a forma di ellissoide molto schiacciato; in tale caso β è negativo e con valore assoluto assai grande).

In questa Nota verrà esteso il precedente studio al caso in cui $\beta = O(\sigma^{-2})$, essendo

$$\sigma = \sqrt{\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}}$$

dove γ è il rapporto dei calori specifici (supposto di poco maggiore di 1). Il fluido è supposto non viscoso, con numero di Mach infinitamente grande a monte dell'onda d'urto. Per semplicità trascureremo le variazioni di densità a valle dell'urto, il che non porta a gravi errori nella regione degli urti forti, regione che è particolarmente estesa nel caso della prora schiacciata; se si volesse tener conto della compressibilità del fluido, si può usare il metodo esposto nella precedente Nota già citata, che porta a calcoli alquanto più laboriosi.

Per una data forma dell'onda d'urto, determineremo la forma del solido corrispondente, nella regione di prora; e inoltre la distribuzione di velocità, pressione e vorticità lungo la parete, in vicinanza del punto di arresto.

2. La corrente indisturbata, di velocità V_∞, sia diretta secondo l'asse di simmetria x del solido. Siano A e B i punti in cui l'asse x incontra rispettivamente l'onda d'urto e la superficie del solido (fig. 1), d la distanza fra i punti A e B, y la normale a x in A sul generico piano meridiano.

L'equazione dell'onda d'urto sia del tipo:

$$x = \sigma (C_1 y^2 + C_2 y^4 + C_3 y^6 + \cdots).$$

(*) Pervenuta all'Accademia il 12 luglio 1960.

(1) A. MUGGIA, *Sul flusso ipersonico di un fluido non viscoso nell'intorno del punto di arresto per un solido a prora arrotondata*, « L'Aerotecnica », vol. XL, n. 2, 1960 (Comunicazione presentata al XVI Congresso Nazionale di Aerotecnica, Pisa, ottobre 1959).

Allora il suo raggio di curvatura in A è:

$$R_A = \frac{1}{2\sigma C_1}$$

e il prodotto di R_A per la derivata seconda (calcolata in A) del raggio di curvatura della linea meridiana d'urto rispetto all'ascissa curvilinea è:

$$R_A R_A'' = 3 - \frac{3 C_2}{C_1^3 \sigma^2}$$

ed è dell'ordine di σ^{-2}.

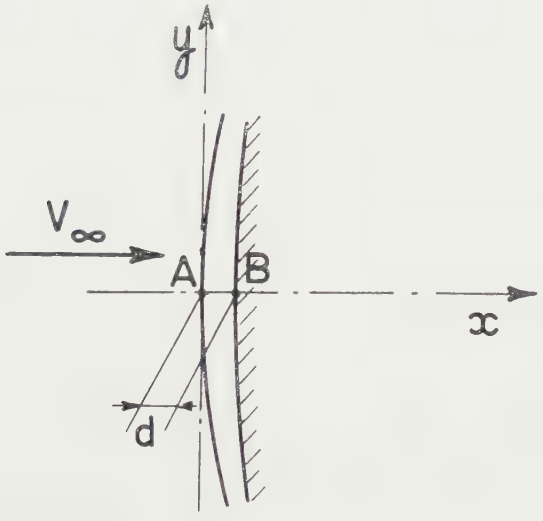


Fig. 1. – Prora del solido e onda d'urto.

Detta ψ la funzione di corrente, le componenti della velocità secondo x e y sono rispettivamente:

$$\frac{\sigma^2}{y}\psi_y \qquad -\frac{\sigma^2}{y}\psi_x$$

(gli indici di ψ indicano derivazione parziale). Sull'onda d'urto:

$$\psi = \frac{1}{2} V_\infty y^2$$

$$\psi_x = -V_\infty \frac{1-\sigma^2}{\sigma} 2 C_1 y^2 \left[1 + \left(2\frac{C_2}{C_1} - 4\sigma^2 C_1^2\right) y^2 + \right.$$

$$\left. + \left(16\sigma^4 C_1^4 - 24 C_1 C_2 \sigma^2 + 3\frac{C_3}{C_1}\right) y^4 + \cdots \right].$$

Sempre sull'onda d'urto, la vorticità ω è:

$$\omega = -(1-\sigma^2)^2 4 C_1^2 y V_\infty \left[1 + 8\left(\frac{C_2}{C_1} - \sigma^2 C_1^2\right) y^2 + \right.$$

$$\left. + \left(18\frac{C_3}{C_1} - 96\sigma^2 C_1 C_2 + 48\sigma^4 C_1^4 + 12\frac{C_2^2}{C_1^2}\right) y^4 + \cdots \right].$$

L'equazione indefinita a cui la ψ deve soddisfare si ottiene scrivendo che ω/y è costante lungo ogni linea di corrente, cioè è funzione solo di ψ, quella funzione che risulta dalle condizioni sull'onda d'urto. Tale equazione è quindi:

$$(1) \qquad \frac{\sigma^2}{y^2}\left(\psi_{xx} + \psi_{yy} - \frac{1}{y}\psi_y\right) = (1-\sigma^2)^2\, 4\, C_1^2\, V_\infty \left[1 + 8\left(\frac{C_2}{C_1} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \sigma^2 C_1^2\right)\frac{2\psi}{V_\infty} + \left(18\,\frac{C_3}{C_1} - 96\,\sigma^2 C_1 C_2 + 48\,\sigma^4 C_1^4 + 12\,\frac{C_2^2}{C_1^2}\right)\frac{4\psi^2}{V_\infty^2} + \cdots\right].$$

3. Conviene introdurre quantità adimensionali e trasformare leggermente il sistema di coordinate. Precisamente poniamo:

$$x = \sigma\,(C_1 y^2 + C_2 y^4 + C_3 y^6 + \cdots) + \frac{\sigma}{2\,C_1}\,\xi$$

$$y = \frac{1}{2\,C_1}\,\eta$$

$$\frac{4\,C_1^2}{V_\infty}\,\psi = F_1(\xi)\,\eta^2 + F_2(\xi)\,\eta^4 + F_3(\xi)\,\eta^6 + \cdots$$

$$k_1 = \frac{C_2}{C_1^3} \qquad k_2 = \frac{C_3}{C_1^5} \cdots$$

Le funzioni incognite $F_1, F_2, \cdots$ devono essere tali da far sì che la ψ soddisfi la (1) e le condizioni al contorno sull'onda d'urto; queste condizioni, espresse per le funzioni $F_1, F_2, \cdots$, sono (gli apici indicano derivazione rispetto a ξ):

$$F_1(0) = \frac{1}{2} \qquad F_2(0) = 0 \qquad F_3(0) = 0$$

$$F_1'(0) = -(1-\sigma^2) \qquad F_2'(0) = -(1-\sigma^2)\left(\frac{1}{2}\,k_1 - \sigma^2\right)$$

$$F_3'(0) = -(1-\sigma^2)\left(\sigma^4 - \frac{3}{2}\,k_1\,\sigma^2 + \frac{3}{16}\,k_2\right).$$

. . . . . .

Posto:

$$F_1(\xi) = F_{10}(\xi) + \sigma^2 F_{11}(\xi) + \sigma^4 F_{12}(\xi) + \cdots$$

$$F_2(\xi) = F_{20}(\xi) + \sigma^2 F_{21}(\xi) + \cdots$$

$$F_3(\xi) = F_{30}(\xi) + \cdots$$

si ricava:

$$F_{10} = \frac{1}{2}(\xi - 1)^2$$

$$F_{11} = k_1\left(-\frac{2}{45}\,\xi^6 + \frac{4}{15}\,\xi^5 - \frac{2}{3}\,\xi^4 + \frac{2}{3}\,\xi^3\right) + \left(\frac{2}{3}\,\xi^3 - 3\,\xi^2 + \xi\right)$$

$$F_{12} = k_1^2\left(\frac{59}{28350}\xi^{10} - \frac{59}{2835}\xi^9 + \frac{59}{630}\xi^8 - \frac{68}{315}\xi^7 + \frac{1}{5}\xi^6\right) +$$
$$+ k_1\left(-\frac{32}{315}\xi^7 + \frac{8}{9}\xi^6 - \frac{13}{5}\xi^5 + \frac{13}{3}\xi^4 - \frac{2}{3}\xi^3\right) +$$
$$+ k_2\left(\frac{1}{700}\xi^{10} - \frac{1}{70}\xi^9 + \frac{9}{140}\xi^8 - \frac{6}{35}\xi^7 + \frac{3}{10}\xi^6 - \frac{3}{10}\xi^5\right) +$$
$$+ \left(\frac{2}{45}\xi^6 - \frac{4}{15}\xi^5 + \frac{5}{3}\xi^4 - \frac{16}{3}\xi^3 + \frac{5}{2}\xi^2\right)$$

$$F_{20} = k_1\left(\frac{1}{6}\xi^4 - \frac{2}{3}\xi^3 + \xi^2 - \frac{1}{2}\xi\right)$$

$$F_{21} = k_1^2\left(-\frac{59}{2520}\xi^8 + \frac{59}{315}\xi^7 - \frac{59}{90}\xi^6 + \frac{17}{15}\xi^5 - \frac{3}{4}\xi^4\right) +$$
$$+ k_1\left(\frac{2}{5}\xi^5 - \frac{8}{3}\xi^4 + \frac{31}{6}\xi^3 - \frac{11}{2}\xi^2 + \frac{1}{2}\xi\right) +$$
$$+ k_2\left(-\frac{9}{560}\xi^8 + \frac{9}{70}\xi^7 - \frac{9}{20}\xi^6 + \frac{9}{10}\xi^5 - \frac{9}{8}\xi^4 + \frac{3}{4}\xi^3\right) +$$
$$+ \left(-\frac{1}{6}\xi^4 + \frac{2}{3}\xi^3 - \frac{3}{2}\xi^2 + \xi\right)$$

$$F_{30} = k_1^2\left(\frac{17}{360}\xi^6 - \frac{17}{60}\xi^5 + \frac{17}{24}\xi^4 - \frac{5}{6}\xi^3 + \frac{3}{8}\xi^2\right) +$$
$$+ k_2\left(\frac{3}{80}\xi^6 - \frac{9}{40}\xi^5 + \frac{9}{16}\xi^4 - \frac{3}{4}\xi^3 + \frac{9}{16}\xi^2 - \frac{3}{16}\xi\right).$$

. . . . . .

4. Sulla parete è $\psi = 0$ e quindi:

$$F_1(\xi) + F_2(\xi)\eta^2 + F_3(\xi)\eta^4 + \cdots = 0.$$

Scritta l'equazione della parete nella forma:

$$\xi = \xi_B + \xi_1\eta^2 + \xi_2\eta^4 + \cdots$$

si ha allora:

$$F_1(\xi_B) = 0$$
$$F_1'(\xi_B)\xi_1 + F_2(\xi_B) = 0$$
$$F_1'(\xi_B)\xi_2 + \frac{1}{2}F_2''(\xi_B)\xi_1^2 + F_2'(\xi_B)\xi_1 + F_3(\xi_B) = 0$$
. . . . . .

Di conseguenza:

$$\xi_B = 1 - \frac{2}{3}\sqrt{6 - k_1}\cdot\sigma + \left(3 - \frac{2}{5}k_1\right)\sigma^2 - \frac{3}{2\sqrt{6 - k_1}}\left(\frac{11}{525}k_1^2 - \frac{1102}{315}k_1 + \right.$$
$$\left. + \frac{3}{25}k_2 + \frac{77}{9}\right)\sigma^3 + O(\sigma^4)$$

$$\xi_1 = -\frac{1}{6}k_1 + \frac{3}{2\sqrt{6 - k_1}}\left(-\frac{7}{40}k_1^2 - \frac{8}{5}k_1 + \frac{3}{16}k_2\right)\sigma + O(\sigma^2)$$

$$\xi_2 = \left(\frac{1}{20}k_1^2 - \frac{3}{80}k_2\right) + O(\sigma)$$

. . . . . .

La distanza fra i punti A e B è dunque data da:

$$\frac{d}{R_A} = \sigma^2 \left| 1 - \frac{2}{3}\left(6 - k_1\right)\sigma + \left(3 - \frac{2}{5}k_1\right)\sigma^2 - \frac{3}{2\sqrt{6 - k_1}}\left(\frac{11}{525}k_1^2 - \frac{1102}{315}k_1 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{2}{25}k_2 + \frac{77}{9}\right)\sigma^3 + O(\sigma^4)\right| .$$

Questa serie ha una struttura analoga a quella corrispondente nel caso del corpo a prora arrotondata, il che fa presumere che le due serie abbiano analoghe proprietà per quanto riguarda la convergenza.

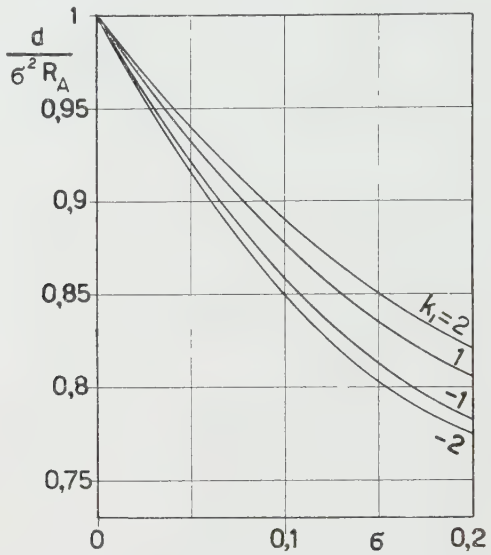


Fig. 2. – Distanza fra il solido e l'onda d'urto.

Possiamo aggiungere le seguenti considerazioni. Essendo $F_2(0) = 0$, approssimiamo $F_2(\xi)$ ponendo $F_2(\xi) = A\xi$. Allora, prendendo nella (1) i termini in η^2, si ricava:

$$F_1(\xi) = -\frac{(1-\sigma^2)^2}{4\sigma^2}\xi + \frac{1 - 6\sigma^2 + 5\sigma^4 - 2A}{16\sigma^4}e^{4\sigma^2\xi} - \frac{1 - 6\sigma^2 - 3\sigma^4 - 2A}{16\sigma^4} + A\xi^2.$$

La ricerca di ξ_B equivale allora, in questa approssimazione, alla risoluzione dell'equazione:

$$G(\xi, \sigma) = -4\sigma^2(1-\sigma^2)^2\xi + (1 - 2A - 6\sigma^2 + 5\sigma^4)e^{4\sigma^2\xi} -$$

$$-(1 - 2A - 6\sigma^2 - 3\sigma^4) + 16\sigma^4 A\xi^2 + 8\sigma^2 A\xi = 0.$$

È $\frac{\partial G}{\partial \xi} = 0$ per $\sigma = 0$; però ponendo:

$$\xi = 1 - 2\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma + \eta\sigma^2$$

risulta:

$$G(\xi, \sigma) = \sigma^7 g(\eta, \sigma)$$

con:

$$g(\eta, \sigma) = -2\left[\frac{2}{3}(16\eta - 64A - 48) + O(\sigma)\right].$$

Essendo $\frac{\partial g}{\partial \eta} = 0$ per $\sigma = 0$, ne risulta che la serie che fornisce η (e quindi anche quella che fornisce ξ_B) ha raggio di convergenza non nullo, qualunque sia il valore della costante A.

I diagrammi di fig. 2 forniscono $d/\sigma^2 R_A$ in funzione di σ per vari valori di k_1 (l'influenza di k_2 è trascurabile per σ piccolo); a parità di σ, d/R_A aumenta leggermente al crescere di k_1.

5. Ritornando alle coordinate x, y, l'equazione della parete è:

$$x = \frac{\sigma}{2C_1}\xi_B + \sigma C_1(1 + 2\xi_1)y^2 + \sigma C_1^3(k_1 + 8\xi_2)y^4 + \cdots$$

e quindi:

$$R_B = \frac{1}{2\sigma C_1(1 + 2\xi_1)}$$

$$\frac{R_A}{R_B} = \left(1 - \frac{1}{3}k_1\right) + \frac{3}{\sqrt{6 - k_1}}\left(-\frac{7}{40}k_1^2 - \frac{8}{5}k_1 + \frac{3}{16}k_2\right)\sigma + O(\sigma^2)$$

$$\beta = R_B R_B'' = -\frac{3}{\sigma^2}\,\frac{k_1 + \frac{2}{5}k_1^2 - \frac{3}{10}k_2}{\left(1 - \frac{1}{3}k_1\right)^3} + O(\sigma^{-1})$$

$$\frac{d}{R_B} = \sigma^2\left\{\left(1 - \frac{1}{3}k_1\right) + \left[\frac{3}{\sqrt{6 - k_1}}\left(-\frac{7}{40}k_1^2 - \frac{8}{5}k_1 + \frac{3}{16}k_2\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{2}{3}\sqrt{6 - k_1}\left(1 - \frac{1}{3}k_1\right)\right]\sigma + O(\sigma^2)\right\}.$$

Si ha allora che d/R_B, a parità di σ, diminuisce al crescere di k_1. Inoltre $R_A \gtrless R_B$ secondo che $k_1 \lessgtr 0$, cioè secondo che l'onda d'urto ha in A un massimo o un minimo di curvatura.

Se per esempio l'andamento dell'onda d'urto in vicinanza dell'asse è quello di un ellissoide schiacciato oppure di un iperboloide, si ha $k_2 = 2k_1^2$ e k_1 è nei due casi rispettivamente positivo e negativo. Per urto ellissoidico o iperboloidico:

$$\frac{R_A}{R_B} = \left(1 - \frac{1}{3}k_1\right) + \frac{3}{\sqrt{6 - k_1}}\left(\frac{1}{5}k_1^2 - \frac{8}{5}k_1\right)\sigma + O(\sigma^2)$$

$$\beta = -\frac{3k_1}{\sigma^2}\cdot\frac{1 - \frac{1}{5}k_1}{\left(1 - \frac{1}{3}k_1\right)^3} + O(\sigma^{-1}).$$

La fig. 3 rappresenta, per tale tipo di urto, R_A/R_B in funzione di σ e k_1.

I risultati ottenuti sono in ottimo accordo qualitativo e soddisfacente accordo quantitativo con quelli ottenuti da Vinokur [2] per il caso di corpi a forma di quadriche di rotazione, sviluppando due teorie basate rispettivamente sulle seguenti ipotesi arbitrarie: *a*) che l'onda d'urto e il corpo siano omofocali; *b*) che l'onda d'urto abbia curvatura costante.

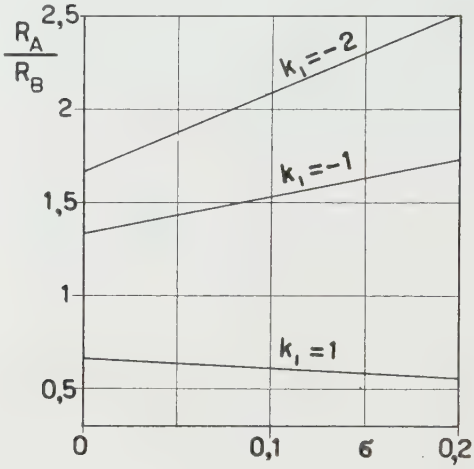


Fig. 3. – Rapporto dei raggi di curvatura dell'onda d'urto e del solido, nel caso di urto ellissoidico o iperboloidico.

6. Possiamo ora calcolare la velocità V lungo la parete. Si ha:

$$V^2 = \frac{\sigma^4}{y^2}(\psi_x^2 + \psi_y^2)$$

e quindi sulla parete:

$$\frac{V^2}{V_\infty^2} = \left[\frac{4}{9}(6 - k_1)\sigma^4 + O(\sigma^6)\right]\eta^2 + \left[\left(\frac{7}{20}k_1^2 + \frac{16}{5}k_1 - \frac{3}{8}k_2\right)\sigma^4 + O(\sigma^5)\right]\eta^4 +$$

$$+ O(\eta^6) = \left[\frac{4}{9}(6 - k_1)\sigma^2 + O(\sigma^4)\right]\left(\frac{y}{R_A}\right)^2 + \left[\left(\frac{7}{20}k_1^2 + \frac{16}{5}k_1 - \frac{3}{8}k_2\right) +$$

$$+ O(\sigma)\right]\left(\frac{y}{R_A}\right)^4 + O\left[\left(\frac{y}{R_A}\right)^6\right]$$

$$\frac{V}{V_\infty} = \left[\frac{2}{3}\sqrt{6 - k_1}\cdot\sigma + O(\sigma^3)\right]\frac{y}{R_A} + \left[\frac{3}{4\sqrt{6 - k_1}}\left(\frac{7}{20}k_1^2 + \frac{16}{5}k_1 - \frac{3}{8}k_2\right)\frac{1}{\sigma} +\right.$$

$$\left. + O(\sigma^3)\right]\left(\frac{y}{R_A}\right)^3 + O\left[\left(\frac{y}{R_A}\right)^5\right].$$

(2) M. VINOKUR, *Hypersonic flow around bodies of revolution which are generated by conic sections*, 6th Midwestern Conference on fluid mechanics, University of Texas, 1959.

La figura 4 rappresenta il gradiente di velocità nel punto di arresto B. C'è da notare che, a parità di σ, al crescere di k_1 $\frac{R_A}{V_\infty}\left(\frac{dV}{dy}\right)_B$ diminuisce e $\frac{R_B}{V_\infty}\left(\frac{dV}{dy}\right)_B$ cresce.

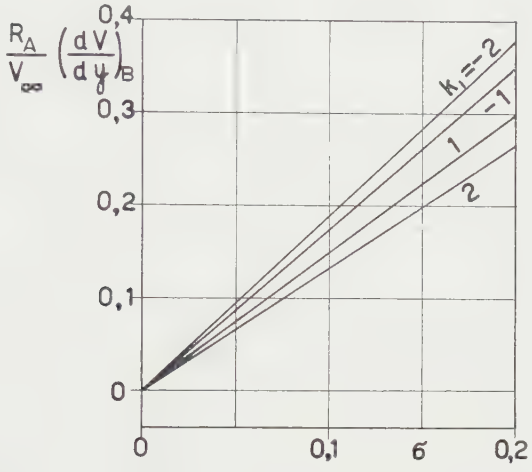


Fig. 4. – Gradiente di velocità nel punto di arresto.

Possiamo ora passare al calcolo della pressione p. Lungo la parete, se ρ è la densità dopo l'urto e ρ_∞ la densità prima dell'urto, si ha:

$$p + \frac{1}{2}\rho V^2 = p_A + \frac{1}{2}\rho V_A^2 = \frac{\gamma+3}{2(\gamma+1)}\rho_\infty V_\infty^2$$

e quindi:

$$\frac{p}{\rho_\infty V_\infty^2} = \left[1 - \frac{1}{2}\sigma^2 + O(\sigma^4)\right] - \left[\frac{2}{9}(6-k_1) + O(\sigma^2)\right]\left(\frac{y}{R_A}\right)^2 - \left[\left(\frac{7}{40}k_1^2 + \frac{8}{5}k_1 - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{3}{16}k_2\right)\frac{1}{\sigma^2} + O(\sigma^{-1})\right]\left(\frac{y}{R_A}\right)^4 + O\left[\left(\frac{y}{R_A}\right)^6\right].$$

Quando poi alla vorticità, alla parete si ha:

$$\frac{\omega R_A^2}{V_\infty y} = -\frac{(1-\sigma^2)^2}{\sigma^2}$$

e quindi:

$$\frac{\omega R_A}{V_\infty} = -\frac{(1-\sigma^2)^2}{\sigma^2}\frac{y}{R_A}.$$

Astronomia. — *Fotometria fotoelettrica nella penombra durante l'eclisse parziale di luna del 24 marzo 1959.* Nota (*) di Alfonso Fresa, presentata dal Corrisp. M. Cimino.

Con l'eclisse lunare del 13–14 maggio 1957 l'Osservatorio Astronomico di Capodimonte iniziò a Napoli (1) un programma di osservazioni fotoelettriche di particolari zone della superficie lunare che, secondo la teoria del Link (2), presenterebbero un eccesso di brillanza durante la fase di penombra.

Per un ipotetico osservatore posto sulla Luna, coll'avanzare dell'eclisse di Sole, cominciano a prevalere le radiazioni provenienti dal bordo solare; anzi ad un certo punto prenderanno il sopravvento le radiazioni cromosferiche e coronali che sono particolarmente intense nell'ultravioletto. Mentre sulla Terra la radiazione ultravioletta è fortemente assorbita dall'atmosfera, specialmente per opera dell'ozono, sulla Luna, invece, raggiunge integralmente il suolo, eccitandovi una specie di luminescenza.

Anche per l'eclisse del 24 marzo 1959 lo strumento adoperato per le osservazioni è il refrattore di Fraunhofer (cm 17,5 di apertura e cm 302 di distanza focale) il cui obbiettivo fu fortemente diaframmato (diametro cm 1) mentre il diaframma sul piano focale aveva un diametro di mm 0,1. La fotocella è del tipo RCA 1 P 21, il circuito amplificatore è del tipo Kron ed il microamperometro registratore è della casa CGS di Monza.

Il metodo di osservazione è stato il seguente. Furono scelte sei zone lunari, delle quali cinque in prossimità del bordo ed indicate con numeri nella fig. 1; convenzionalmente li chiameremo punti e sono contrassegnati come appresso:

1 : nel *Mare Anguis*, vicinissimo al cratere Delmotte;
2 : parte meridionale del *Mare Crisium*;
3 : nel *Mare Aestatis*, quasi a contatto con Grimaldi;
4 : zona del cratere Crüger, a sud del *Mare Aestatis*;
5 : nel *Mare Undarum*, tra Firmicus e il bordo lunare;
6 : nel mezzo del *Mare Serenitatis*.

La grandezza dell'eclisse d'ombra, di appena 0,27 (essendo 1 il diametro della Luna), ha permesso solo nella penombra l'osservazione dei suddetti punti. Le osservazioni sono cominciate alle 18^h51^m (T. U.) quando già la

(*) Pervenuta all'Accademia il 30 luglio 1960.

(1) M. Cimino e A. Fresa, *Fotometria fotoelettrica dell'eclisse totale di Luna del 13–14 maggio 1957*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, vol. XXV, 58–64 (1958); « Contr. scient. Capodimonte », nuova serie, n. 13.

(2) F. Link, *Théorie photométrique de la pénombre pendant les eclipses de lune*, « Journ. Soc. Mat. Phys. Tchèque », 72–65 (1947).

Fig. 1. – Zone lunari scelte per la fotometria.

Luna era quasi tutta immersa nella penombra; esse sono continuate anche dopo l'uscita dalla penombra, onde stabilire fuori eclisse il rapporto delle intensità luminose dei punti scelti. Le osservazioni ebbero termine alle 23^h15^m.

Per quanto riguarda le condizioni meteorologiche, si notarono alcuni veli dalle 20^h9^m alle 20^h50^m.

Indicando con $\Delta\mu_o$ la differenza di grandezza stellare di due punti lunari a e b fuori eclisse, e con $\Delta\mu$ la stessa differenza che si ha quando il punto a è penetrato nella penombra ad una distanza γ' (in primi d'arco) dall'orlo della penombra stessa, mentre b (che si assume come riferimento) è ancora fuori della penombra), la quantità:

$$\Delta m = \Delta\mu - \Delta\mu_o$$

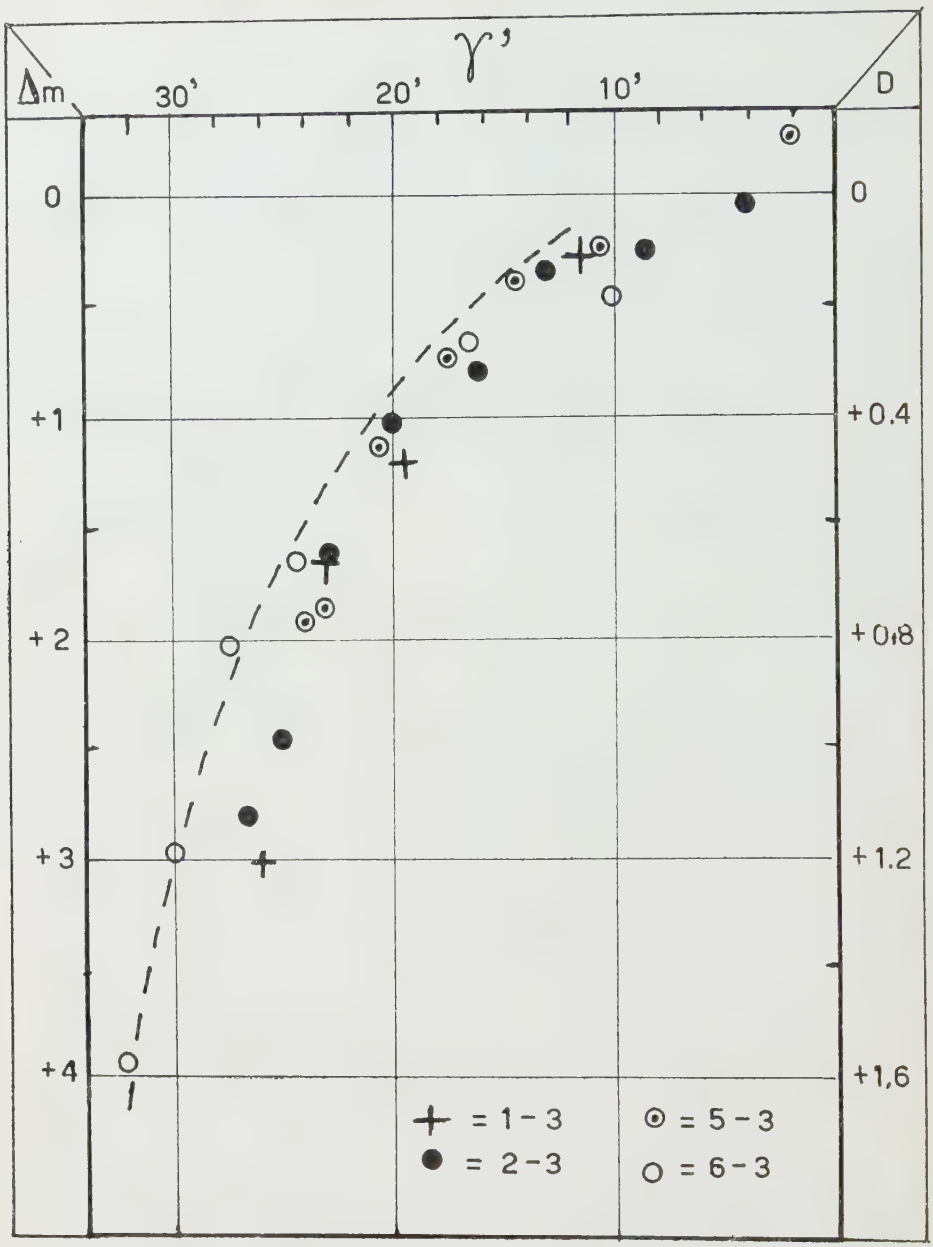


Fig. 2. – Densità della penombra: *fase di entrata.* (γ' = distanza angolare dall'orlo della penombra; la tratteggiata rappresenta la curva di densità nella penombra calcolata in base alla cosiddetta teoria semplificata del Link).

fornisce, istante per istante, la variazione di grandezza stellare subita dal punto *a* man mano che esso si immerge nella penombra. Si ottiene in tal modo una curva di densità della penombra *relativa al punto a.*

Il procedimento ora indicato è stato applicato alle coppie di punti 1–3 ed 1–4, 2–3 e 2–4, 5–3 e 5–4, 6–3 e 6–4, tanto nella fase di entrata quanto

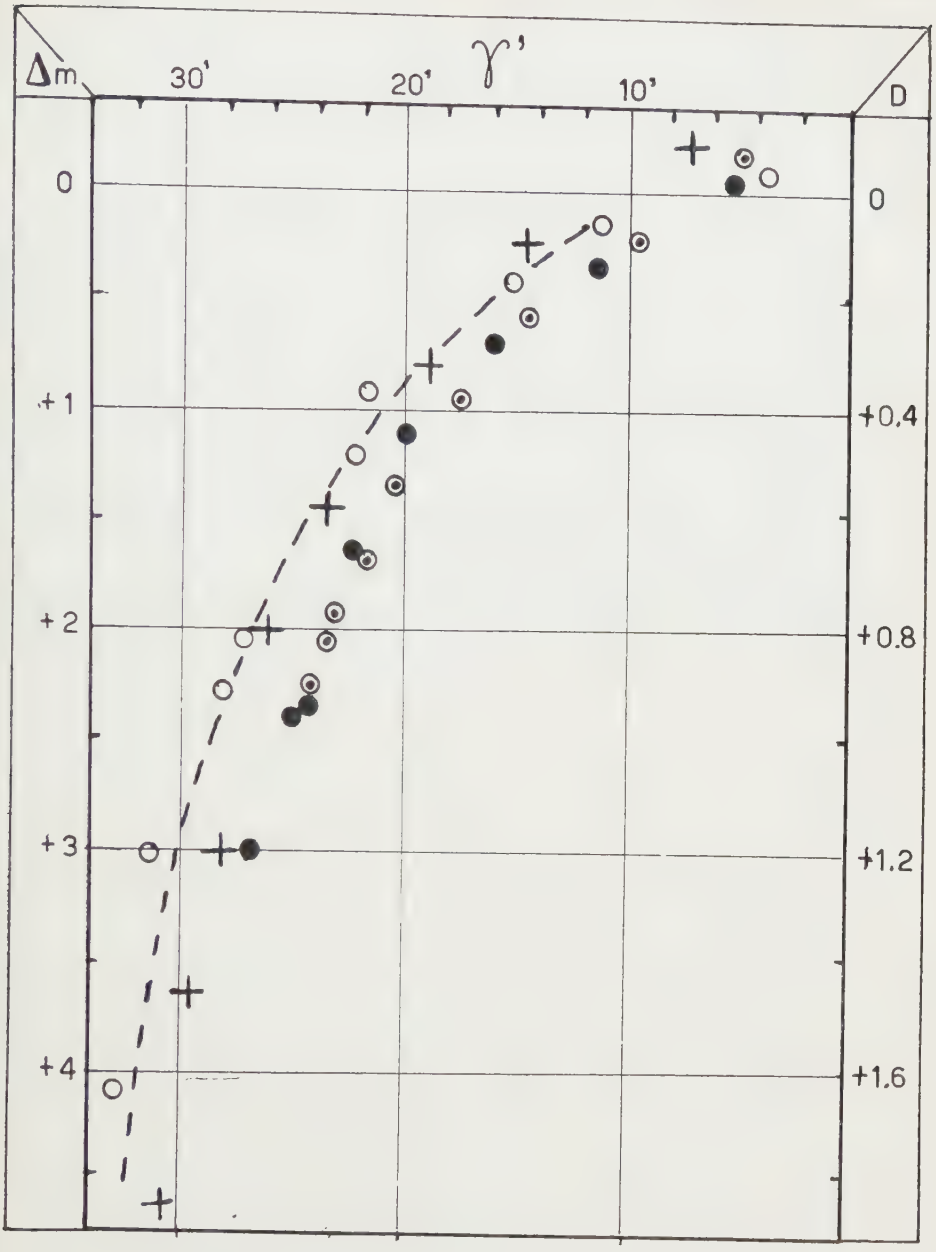


Fig. 3. – Densità della penombra: *fase di uscita*. (γ' = distanza angolare dall'orlo della penombra).

in quella di uscita dalla penombra. Pertanto, i punti usciti per primi sono stati il 3 e, subito dopo, il 4. Di conseguenza essi hanno assunto il ruolo di punti di riferimento; è stata costruita in tal modo la presente Tabella, nella quale la fase di entrata è separata da quella di uscita da una linea orizzontale. Giova qui notare che, fuori eclisse, essendo risultato per i punti 3 e 4 rispettivamente $\log I_3 = 1{,}618$ e $\log I_4 = 1{,}619$ (in unità convenzionali),

le coppie 1–3 ed 1–4 dànno quasi gli stessi valori; analogamente avviene per le altre coppie 2–3 e 2–4, e così di seguito. Quindi, nel caso delle due prime coppie si ottengono, per la legge di Pogson ($\Delta\mu_o = -2{,}5$ [log I_a — — log I_b) rispettivamente: $\Delta\mu_o = +0{,}207$ e $\Delta\mu_o = +0{,}210$, ecc., come indicato in Tabella.

TABELLA.

Densità dalla penombra (λ 4000) *in funzione della distanza dall'orlo della penombra.*

Coppia 1–3 Coppia 1–4 $\Delta\mu_o = +0{,}207$ $\Delta\mu_o = \ ,210$		Coppia 2–3 Coppia 2–4 $\Delta\mu_o = +0{,}152$ $\Delta\mu_o = \ ,155$		Coppia 5–3 Coppia 5–4 $\Delta\mu_o = +0{,}410$ $\Delta\mu_o = \ ,412$		Coppia 6–3 Coppia 6–4 $\Delta\mu_o = +0{,}522$ $\Delta\mu_o = \ ,525$	
γ'	Δm	γ'	Δm	γ'	Δm	γ'	Δm
11,5	+ 0,29	4,0	+ 0,07	2,0	— 0,02	10,0	+ 0,47
19,5	+ 1,22	8,5	+ 0,29	10,5	+ 0,25	16,5	+ 0,66
23,0	+ 1,66	13,0	+ 0,35	14,5	+ 0,39	24,5	+ 1,93
26,0	+ 3,03	16,0	+ 0,80	17,5	+ 0,75	27,5	+ 2,02
----------		20,0	+ 1,07	20,5	+ 1,16	30,0	+ 2,95
30,5	+ 4,61	23,0	+ 1,66	22,5	+ 1,89	32,0	+ 3,91
29,5	+ 3,64	25,0	+ 2,47	23,5	+ 1,91	----------	
28,0	+ 3,03	26,5	+ 2,81	----------		32,5	+ 4,08
26,0	+ 2,01	----------		24,0	+ 2,27	31,0	+ 3,01
23,5	+ 1,45	26,5	+ 2,99	23,5	+ 2,05	28,0	+ 2,29
19,0	+ 0,79	25,0	+ 2,39	23,0	+ 1,91	27,0	+ 2,02
14,5	+ 0,29	24,0	+ 2,31	21,5	+ 1,69	22,0	+ 1,21
7,0	— 0,19	22,0	+ 1,62	20,5	+ 1,35	21,5	+ 0,90
		20,0	+ 1,09	17,5	+ 0,93	15,0	+ 0,40
		16,0	+ 0,67	14,5	+ 0,57	11,0	+ 0,14
		11,0	+ 0,36	9,5	+ 0,21	3,5	— 0,09
		5,0	— 0,06	4,5	— 0,18		

I grafici delle figure 2 e 3, corrispondenti rispettivamente alle fasi di entrata e di uscita, sono tracciati in funzione di Δm (cui corrisponde D = densità della penombra) e della distanza γ'. Quest'ultima viene misurata graficamente, in direzione radiale, a partire dall'orlo della penombra fino

al punto osservato della Luna. Allo scopo di confrontare i singoli valori posti in grafico con la teoria del Link, basta tracciare la curva teorica in funzione dei D e dei γ' fornitici dalla Tavola I dell'op. cit. [3], assumendo però il valore $\chi = 0{,}8$, funzione della zona spettrale λ 4000 che è prossima alla sensibilità cromatica del nostro fotomoltiplicatore.

La curva ottenuta della densità della penombra sembra svolgersi sia nella fase di entrata che in quella di uscita, al di sotto della curva teorica del Link, da noi adattata a titolo di confronto, e ciò contrariamente ad altre eclissi, nelle quali si aveva invece un eccesso di luminosità [4]. Anche il punto 2 del Mare Crisium, che altre volte appariva particolarmente attivo, non presenta, questa volta, un comportamento eccezionale. Se l'eccesso di brillanza del suolo lunare durante le eclissi è dovuto ad eccitazione da parte della radiazione U. V. solare, si sarebbe tentati di arguire che, all'epoca della presente eclisse, la componente U. V. solare, era inferiore al solito. Ricerche intese a chiarire questo punto sarebbero assai interessanti, ma occorre certamente un materiale più abbondante di osservazione. A questo scopo tendono le nostre osservazioni sistematiche della densità della penombra nelle eclissi lunari, eseguite fotoelettricamente, in parallelo alle osservazioni fotografiche che da più anni si eseguono all'Osservatorio Astronomico di Roma.

(3) LINK, op. cit. p. 66.

(4) Vedi bibliografia nella citata Nota di M. Cimino e A. Fresa.

Fisica. — *Scambio termico per fluidi non-Newtoniani in moto laminare in condotti circolari.* – I. *Scambio termico per temperatura della parete costante* (*). Parte I. Nota (**) di MARIO DENTE, presentata dal Socio G. NATTA.

INTRODUZIONE.

Il problema della determinazione dei profili di temperatura e, conseguentemente dei coefficienti di scambio termico per i fluidi in modo laminare (Problema di Gräetz–Nusselt), è un tipico problema accessibile per via matematica, purché siano soddisfatte certe ipotesi restrittive. Da qualche tempo questo problema ha ricevuto attenzione per il caso di profili di velocità diversi da quello parabolico [1], [2], [3], [4].

In particolare tali profili possono essere generati nel movimento laminare in condotti circolari da fluidi non–Newtoniani del tipo soddisfacente alla cosidetta legge di potenza:

$$\tau = -K\left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)^{n'}. \tag{1}$$

Il comportamento reologico espresso da tale legge approssima il comportamento reale di molte soluzioni, sospensioni, emulsioni non–Newtoniane ed è quello che permette i più facili sviluppi matematici.

In questo lavoro si è appunto preso in considerazione il problema di Gräetz–Nusselt per i profili di velocità generati dalla legge (1), proponendosene la risoluzione per diversi valori nell'indice n' e per condizioni al contorno diverse dalla solita $t_w = \text{cost}$.

Equazione differenziale del profilo di temperatura e sua risoluzione.

Nelle seguenti ipotesi:

1° moto laminare con profilo di velocità pienamente sviluppato;

2° trasmissione in senso longitudinale trascurabile;

3° fluido con proprietà fisiche costanti;

per un condotto circolare l'equazione differenziale del profilo di temperatura $t(\eta, \varphi)$ è la seguente, proveniente da un bilancio termico:

$$\rho c_p u \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{k}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial t}{\partial r}\right). \tag{2}$$

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Industriale del Politecnico di Milano con il contributo della Soc. Montecatini.

(**) Pervenuta all'Accademia il 30 giugno 1960.

Per fluidi soddisfacenti alla legge (1), introdotto il parametro $m = \frac{1}{n'} + 1$, l'espressione della velocità è

$$u = u_0 \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^m \right] \tag{3}$$

con

$$u_0 = u\,(r = 0) = \frac{m+2}{m}\,\bar{u}\,. \tag{4}$$

Le condizioni al contorno per l'equazione (2) che consideriamo in questa Nota sono le seguenti:

1° $\quad t = t_0 = \text{cost} \qquad \text{per } x \leq 0$

2° $\quad t = t_w = \text{cost} \qquad \text{per } x > 0 \qquad r = R$

In tal modo non ci sono discontinuità tra le temperature del fluido e della parete.

Introducendo le nuove variabili $\varphi\,,\ \eta\,,\ \theta$ che permettono di esprimere l'equazione (2) in forma adimensionale, si ottiene:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \eta} = \frac{1}{\varphi\,(1 - \varphi^m)}\,\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\varphi\,\frac{\partial \theta}{\partial \varphi} \right) \tag{5}$$

l'integrale di tale equazione è esprimibile per separazione di variabili nella forma seguente

$$\theta = \sum_n C_n\,F_n\,(\varphi)\,e^{-\beta_n^2 \eta} \tag{6}$$

dove $F_n\,(\varphi)\,,\ \beta_n$ sono autofunzioni e autovalori soddisfacenti alla seguente equazione differenziale ordinaria

$$\varphi F_n'' + F_n' + \beta_n^2\,\varphi\,(1 - \varphi^m)\,F_n = 0 \tag{7}$$

e alla condizione al contorno

$$F_n\,(1) = 0\,. \tag{8}$$

L'equazione (7) del tipo di Sturm-Liouville, è integrabile in modo semplice per serie di potenze, per valori interi di m. Scegliamo ad esempio una serie di potenze pari [1]; si può scrivere

$$F_n\,(\varphi\,,\,m) = \sum_i a_{2i}\,(\beta_n\,,\,m)\,\varphi^{2i}\,. \tag{9}$$

Sostituendo la (9) nella (7) si ottiene la formula di ricorrenza per i coefficienti a_{2i}

$$a_{2i} = \frac{\beta^2}{(2\,i)^2}\,(a_{2i-m-2} - a_{2i-2})\,. \tag{10}$$

L'equazione (5) è stata integrata in questo modo per $m = 2,\ 4,\ 6,\ 10,\ \infty$.

(1) Ovviamente questa non è una condizione necessaria: essa richiede anche che sia $m =$ pari.

Le soluzioni per $m = 2$, (Fluidi Newtoniani) e $m = \infty$ (fluido « infinitamente pseudo plastico ») erano già note [5] [6].

Il caso $m = 4$ è stato oggetto di una recente pubblicazione [1].

La (10) per i diversi valori di m assume le espressioni della Tabella I. Si determinano in tal modo i coefficienti delle serie come funzioni di β^2, scelto sempre $a_0 = 1$.

TABELLA I.

m	a_{2i}
2	$\frac{\beta^2}{(2i)^2}(a_{2i-4} - a_{2i-2})$
4	$\frac{\beta^2}{(2i)^2}(a_{2i-6} - a_{2i-2})$
6	$\frac{\beta^2}{(2i)^2}(a_{2i-8} - a_{2i-2})$
10	$\frac{\beta^2}{(2i)^2}(a_{2i-12} - a_{2i-2})$
∞	$-\frac{\beta^2}{(2i)^2} a_{2i-2}$

Gli autovalori si determinano mediante la seguente condizione:

$$F(m, \beta^2, \varphi = 1) = f(\beta^2, m) = \sum_i a_{2i}(\beta^2, m) = 0 . \tag{11}$$

Per i diversi valori di m si ottengono dalla (11) dei polinomi di grado infinito, i cui zeri sono gli autovalori del problema.

Nella Tabella II sono riportati i primi tre autovalori per i diversi casi esaminati.

Per la determinazione dei più elevati autovalori, si farà uso di un procedimento approssimato, analogo a quello già seguito da J. R. Sellars, M. Tribus, J. S. Klein [5] [2] per i fluidi Newtoniani. È interessante osservare che la determinazione di un numero elevato di autovalori è indispensabile per la risoluzione dello stesso problema con condizioni al contorno diverse.

Per la determinazione dei coefficienti C_n ci si deve valere della condizione iniziale:

$$\text{per} \quad \eta = 0 \qquad \theta \equiv 1 .$$

Le (auto) funzioni F_n hanno proprietà analoghe a quelle di Fourier e di Bessel.

Si può dimostrare che

$$C_n = \frac{\int_0^1 \varphi (1 - \varphi^m) F_n \, d\varphi}{\int_0^1 \varphi (1 - \varphi^m) F_n^2 \, d\varphi} = - \frac{2}{\beta_n \left(\frac{\partial F}{\partial \beta}\right)_{\beta = \beta_n ;\ \varphi = 1}} . \tag{12}$$

TABELLA II.

m	β_0	β_1	β_2	β_0^2	β_1^2	β_2^2	C_0	$-C_1$	C_2	$F'_0(1)$	$F'_1(1)$	$F'_2(1)$	$C_0F'_0(1)$	$C_1F'_1(1)$	$C_2F'_2(1)$	Nu_∞
2 (1)	2,7044	6,6790	10,6734	7,314	44,609	113,921	1,4662	0,80248	0,58709	1,0214	1,3564	1,5769	1,4976	1,0885	0,92576	3,657
4	2,502	6,0332	9,5968	6,26	36,4	92,1	1,5120	0,8678	0,6324	1,1098	1,4632	1,7030	1,6780	1,2698	1,0770	4,173
6	2,4495	5,8029	9,1687	6,00	33,7	84,2	1,5342	0,9075	0,6560	1,1624	1,5439	1,8017	1,7834	1,4011	1,1819	4,500
10	2,4187	5,6516	8,9314	5,85	31,78	79,77	1,5622	0,9761	0,7217	1,2046	1,6705	1,9023	1,8818	1,6306	1,3729	4,875
∞	2,4048	5,5201	8,6537	5,7831	30,4715	74,8865	1,6022	1,0647	0,8512	1,2433	1,8785	2,3495	2,0000	2,0000	2,0000	5,784

(1) M. ABRAMOWITZ, « J. of Math. and Ph. », Vol. 32, p. 184 (1953).

Si possono perciò calcolare i C_n con procedimento grafico o numerico. Qui si è seguito il secondo. I risultati sono riportati in Tabella II.

Calcolo della temperatura media di miscela.

Per il calcolo della temperatura media di miscela t_b e del numero di Nusselt importa la determinazione del gradiente di temperatura sulla parete $\left(\frac{\partial\theta}{\partial\varphi}\right)_w \cdot \frac{t_0 - t_w}{R}$.

Dalla (6) risulta

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial\varphi}\right)_w = \sum_n C_n F'_n(1)\, e^{-\beta_n^2 \eta} \tag{13}$$

e dalla (9)

$$F'_n(1) = \sum_j 2\, j a_{2j}(\beta_n, m)\,. \tag{14}$$

Lo stesso $F'_n(1)$ si può calcolare anche per altra via, legandolo alla temperatura di miscela. Questa è definita dalla relazione

$$t_b = \frac{\int_0^1 t\varphi\,(1-\varphi^m)\,d\varphi}{\int_0^1 \varphi\,(1-\varphi^m)\,d\varphi} \tag{15}$$

perciò

$$\theta_b = 2\,\frac{m+2}{m}\int_0^1 \varphi\,(1-\varphi^m)\,\theta\,d\varphi\,. \tag{16}$$

Combinando con le (6) e (9) si ottiene

$$\theta_b = \sum_i C_i\, B_i\, e^{-\beta_i^2 \eta} \tag{17}$$

dove

$$B_i = 2\,(m+2)\sum_j \frac{a_{2j}(\beta_i^2)}{(2j+2)\,(2j+m+2)}\,. \tag{18}$$

Dalla stessa equazione differenziale (5), moltiplicando entrambi i membri per $\varphi\,(1-\varphi^m)\,d\varphi$, integrando tra 0 e 1, e ricordando la (16), si ha

$$\frac{d\theta_b}{d\eta} = 2\,\frac{m+2}{m}\left(\frac{\partial\theta}{\partial\varphi}\right)_w \tag{19}$$

Combinando con la (13) e integrando si ottiene

$$\theta_b = \sum_i C_i\, D_i\, e^{-\beta_i^2 \eta} \tag{20}$$

con

$$D_i = -2\frac{m+2}{m}\frac{F_i'(1)}{\beta_i^2}. \tag{21}$$

Deve ovviamente essere verificata la identità tra la (17) e la (20) e quindi

$$F_i'(1) = -\frac{m}{2(m+2)} B_i \beta_i^2. \tag{22}$$

Per il calcolo di $F_i'(1)$ è stato adottato questo procedimento: calcolo di B_i con la 18 e di $F_i'(1)$ con la (22).

Come verifica nel caso di $m = 6$ si è calcolato θ_b attraverso le due formule (17) e (20) [2]. Nella Tabella II sono riportati i valori di $F_i'(1)$ e $-C_i F_i'(1)$.

Numero di Nusselt.

Il numero di Nusselt locale è il parametro che serve a caratterizzare sinteticamente la forma di un profilo trasversale di temperatura.

Esso è definito dalla seguente formula.

$$\mathrm{Nu} = \frac{hd}{k} = \frac{qd}{k(t_w - t_b)} = -2\frac{\left(\frac{\partial\theta}{\partial\varphi}\right)_w}{\theta_b}. \tag{23}$$

Dalle (23) (13) e (17) si ottiene

$$\mathrm{Nu} = \frac{m}{m+2}\frac{\sum_i C_i F_i'(1) e^{-\beta_i^2\eta}}{\sum_i \frac{C_i F_i'(1)}{\beta_i^2} e^{-\beta_i^2\eta}}. \tag{24}$$

Se si indica con Nu_∞ il seguente valore

$$\mathrm{Nu}_\infty = \lim_{\eta\to\infty} \mathrm{Nu}(\eta)$$

risulta dalla (24)

$$\mathrm{Nu}_\infty = \frac{m}{m+2}\beta_0^2. \tag{25}$$

Nella Tabella II vengono riportati i valori di Nu_∞ che sono stati calcolati per i diversi fluidi esaminati.

(2) (17) $\theta_b = 0{,}7920\, e^{-6{,}00\eta} + 0{,}11087\, e^{-33{,}7\eta} + 0{,}03743\, e^{-84{,}2\eta} + \cdots$

(20) $\theta_b = 0{,}7926\, e^{-6{,}00\eta} + 0{,}11153\, e^{-33{,}7\eta} + 0{,}04281\, e^{-84{,}2\eta} + \cdots$

La buona coincidenza dei primi due addendi fa ritenere che β_0 e β_1 sono stati determinati con buona precisione; un errore più grande è presente nella più laboriosa determinazione di β_2. Da notare inoltre che B_i è determinato da una serie più rapidamente convergente.

Quando η diventa piccolo (ad esempio: $\eta \ll 10^{-3}$) occorre calcolare un grande numero di termini nella espressione (24), data la lenta convergenza del numeratore.

Finché m non è molto elevato (ad esempio: $m \leq 10$) è allora lecito applicare l'approssimazione di Leveque [5] per la determinazione del numero di Nusselt. Questa approssimazione è basata sulla considerazione che valori molto piccoli di η corrispondono a valori molto elevati di R; per cui la soluzione tende ad avvicinarsi asintoticamente a quella dell'analogo problema per un piatto piano indefinito, con distribuzione lineare di velocità.

Definito il numero di Graetz nel modo seguente:

$$Gz = WC_p/kx$$

combinando con la (4) e ricordando la definizione di η si trova

$$Gz = \pi \frac{m}{m+2} \frac{1}{\eta}. \tag{26}$$

In termini dei due parametri η, Gz l'equazione dell'asintoto risulta

$$Nu = 1{,}3565 \left(\frac{m}{2}\right)^{1/3} \eta^{-1/3} = 1{,}167 \left(\frac{m+2}{4}\right)^{1/3} Gz^{1/3}\ (3). \tag{27}$$

(3) *Osservazione*: nel tracciamento delle curve Nu (η) è facile vedere come, anche nel caso Newtoniano ($m = 2$) l'approssimazione di Leveque contiene un errore sensibile, sia pure per valori di η molto bassi ($\eta \leq 10^{-3}$) [7]; per non ricorrere dunque ad un numero eccessivo di autovalori in questo tracciamento, si può ricorrere al seguente procedimento, che ha anche il pregio di giustificare in altro modo l'espressione di Leveque [7]. La serie a denominatore della (24) converge rapidamente; per $\eta < 10^{-3}$ si può ritenere con un piccolo errore che essa sia eguale al suo limite per $\eta \to 0$, cioè

$$-\sum_n \frac{C_n F'_n(\ )}{\beta_n^2} e^{-\beta_n^2 \eta} \cong \frac{m}{2(m+2)}. \tag{28}$$

Perciò per $\eta < \sim 10^{-3}$

$$Nu \cong -2 \sum_n C_n F'_n(1)\, e^{-\beta_n^2 \eta}. \tag{29}$$

Con il procedimento per serie sono stati calcolati come si è visto (Tabella II) i primi tre autovalori, mentre per i successivi si ritengono soddisfacenti le formule (43), (47). Conviene dunque scrivere:

$$Nu \simeq 2 \left\{ -\sum_0^2{}_n C_n F'_n(1)\, e^{-\beta_n^2 \eta} + \sum_3^\infty{}_n \cos t \left(\frac{2n\pi}{\tau} + \frac{4\pi}{3\tau}\right)^{-1/3} e^{-\left(\frac{2n\pi}{\tau} + \frac{4\pi}{3\tau}\right)^2 \eta} \right\}. \tag{30}$$

La (30) si può scrivere così

$$Nu \simeq 2 \cos t \sum_n \left(\frac{2n\pi}{\tau} + \frac{4\pi}{3\tau}\right)^{-1/3} e^{-\left(\frac{2n\pi}{\tau} + \frac{4\pi}{3\tau}\right)^2 \eta} - \tag{31}$$

$$-2 \left\{ \cos t \sum_0^2{}_n \left(\frac{2n\pi}{\tau} + \frac{4\pi}{3\tau}\right)^{-1/3} e^{-\left(\frac{2n\pi}{\tau} + \frac{4\pi}{3\tau}\right)^2 \eta} - \sum_0^2{}_n \left(-C_n F'_n(1)\right) e^{-\beta_n^2 \eta} \right\}.$$

Per η molto piccolo ($\eta < 10^{-3}$) la parte tra parentesi graffa è costante (K), e assimilando la prima sommatoria con un opportuno integrale, la (31) diventa

$$\text{Nu} \simeq 1{,}3565 \left(\frac{m}{2}\right)^{1/3} \eta_i^{-1/3} - 1{,}61\, m^{1/3} \left(\frac{4\pi}{3\tau}\right)^{-1/3} - 2\,\text{K}. \tag{32}$$

Confrontando con la (27) si chiarisce così ulteriormente il significato della approssimazione di Leveque; essa è effettivamente buona quando la somma delle costanti a secondo membro della (32) è trascurabile (cioè per $\eta \ll 10^{-3}$). La formula (32) è servita per il tracciamento

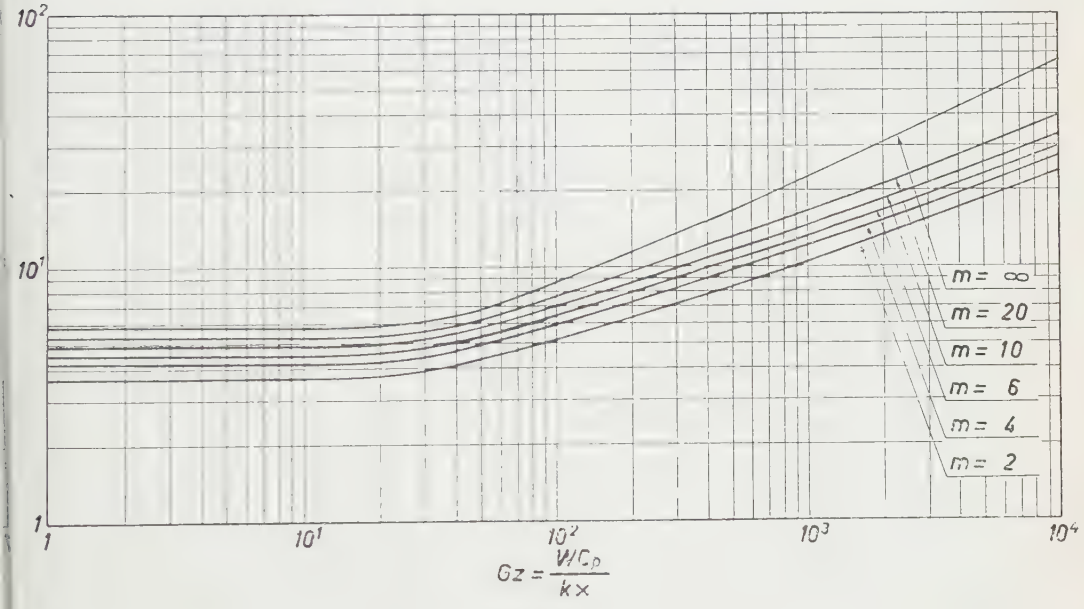


Fig. 1.

delle curve di fig. 1 (che compaiono quindi con un punto di flesso). La stessa (32) dà luogo per i diversi casi esaminati, ai valori riportati in Tabella III. Come sembra ovvio, il termine correttivo della (32) cresce col crescere di m.

TABELLA III.

m	$1{,}3565 \left(\frac{m}{2}\right)^{1/3} \cdot \eta_i^{-1/3} - \text{Nu}$
2	1,3
4	1,7
6	2,0
10	2,9
20	5,1

NOMENCLATURA

In questo lavoro è stata usata la seguente nomenclatura:

a_{2i} = coefficienti dello sviluppo (9).
c_p = calore specifico, Kcal/kg$_m$°C.
d = diametro, m.
f = $f(\beta^2, m)$ formula (11).
h = $\dfrac{q}{t_w - t_b}$, Kcal/m^2 sec °C.
i = indice di sviluppo in serie.
j = indice di sviluppo in serie.
h_{ln} = $\dfrac{Q}{\pi\, dx\, \Delta t_{ln}}$ = coefficiente di scambio medio logaritmico, Kcal/m^2 sec °C.
k = conducibilità termica del fluido, Kcal/m sec °C.
ln = indice di media logaritmica.
m = $\dfrac{1}{n'} + 1$.
n = indice di sviluppo in serie.
n' = «indice di forma» nella legge di potenza (1).
q, q_w = $-\dfrac{k}{R}\left(\dfrac{\partial t}{\partial \varphi}\right)_w$, Kcal/m^2 sec.
r = distanza di un punto dall'asse del condotto, m.
t = variabile definita da: $t = \int_0^{\varphi} (1 - \varphi^m)^{1/2}\, d\varphi$.
t = temperatura in un punto generico del fluido, °C.
t_b = «temperatura media di miscela», °C.
t_0 = $t_{x=0}$ = temperatura iniziale del condotto, °C.
t_w = $t_{\varphi=1}$ = temperatura della parete del condotto, °C.
u = velocità in un punto generico del condotto, m/sec.
u_0 = $\dfrac{m+2}{m}\,\bar{u}$ = velocità sull'asse del condotto, m/sec.
$\bar{u}$ = velocità media, m/sec.
x = ascissa di un punto generico, dall'ingresso del condotto, m.
y = $1 - \varphi$.
z = variabile definita da: $\varphi^{1/2}\ (1 - \varphi^m)^{1/4}\, F(\varphi)$ (equazione (57)).
A = coefficiente nella formula (36).
B_i = coefficienti dello sviluppo (17).
C_n = coefficienti nello sviluppo (6).
C_p = calore specifico per unità di peso, Kcal/kg$_p$ °C.
D = coefficiente nella equazione (39).
D_i = coefficienti nello sviluppo (20).
E = coefficiente nella equazione (39).
F_n = $F_n(\varphi)$ autofunzione
Gz = numero di Graetz = $\dfrac{WC_p}{kx} = \dfrac{\pi m}{(m+2)\,\eta}$.
K = «indice di consistenza del fluido» nella legge di potenza (1).
J_0 = funzione di Bessel di prima specie, di ordine zero.
J_1 = funzione di Bessel di prima specie, di ordine uno.
$J_{\pm 1/3}$ = funzioni di Bessel di prima specie, di ordini $\pm$ 1/3.

$\mathrm{Nu} = \dfrac{hd}{k}$ = numero di Nusselt locale.

$\mathrm{Nu}_\infty = \lim_{\eta \to \infty} \mathrm{Nu}\,(\eta)$.

$\overline{\mathrm{Nu}}_m = \dfrac{h_{\ln} d}{k}$ = numero di Nusselt, basato sul coefficiente di scambio medio (logaritmico).

Q = calore totale scambiato lungo un tratto x di condotto, Kcal/sec.

R = raggio del condotto, m.

W = portata, in peso, del condotto, kg_p/sec.

α = costante nella formula (36).

β = autovalori.

$\delta = \dfrac{m+2}{4}$ nella formula (27).

$\left(\dfrac{\partial}{\partial \varphi}\right)_w = \left(\dfrac{\partial}{\partial \varphi}\right)_{\varphi = 1}$.

$\dfrac{\partial v}{\partial n}$ = velocità di deformazione, nella legge di potenza (1).

$\varphi = r/R$.

ρ = densità, kg/m^3.

$\eta = \dfrac{kx}{\rho c_p R^2 u_0}$.

$\theta = \dfrac{t - t_w}{t_0 - t_w}$.

τ = sollecitazione tangenziale unitaria, nella legge di potenza (1).

$\tau = 2\int_0^1 (1 - \varphi^m)^{1/2}\, d\varphi = \dfrac{2}{m} \dfrac{\Gamma(1/m)\cdot\Gamma(3/2)}{\Gamma\left(\dfrac{1}{m} + \dfrac{3}{2}\right)}$ = costante nella formula (40).

$\Gamma(x)$ = « funzione gamma » di x.

Δ = $\Delta(\beta, m, \varphi)$ = « quantità piccola » nella formula (48).

$\Delta t_{\ln} = 1 \dfrac{(t_0 - t_w) - (t_b - t_w)}{\ln \dfrac{t_0 - t_w}{t_b - t_w}}$ = differenza di temperatura media logaritmica °C.

BIBLIOGRAFIA.

[1] B. C. LYCHE, R. B. BIRD, « Chemical Engineering Science », vol. 6, pp. 35–41 (1956).

[2] I. R. WHITEMAN, W. B. DRAKE, « Trans. A.S.M.E., », April 1958, pp. 728–732.

[3] E. HIRAI, « A. I. Ch. E. », Journal March, pp. 130–133 (1959).

[4] J. SCHENCK, J. VAN LAAR, « Appl. Sc. Research », 7, 449 (1958).

[5] Dei diversi lavori che riportano i risultati per i fluidi Newtoniani ricordiamo solo il più recente di J. R. SELLARS, MYRON TRIBUS, J. S. KLEIN, « Trans. A.S.M.E. », 78, pp. 441–448.

[6] Per $m = \infty$ ad esempio si veda DREW, « Trans. A. I. Ch. E. », 26, p. 26 (1931).

[7] Discussione di R. P. LIPKIS sul lavoro di W. M. KAYS, « Trans. A.S.M.E. », November 1955, p. 1272.

Chimica. — *Su alcuni composti intermetallici e semimetallici del Gadolinio* (*). Nota (**) di ALDO IANDELLI, presentata dal Socio L. ROLLA.

Il presente lavoro è stato effettuato per completare una parte dei dati strutturali esistenti su composti intermetallici e semimetallici delle terre rare, allo scopo di confrontare il comportamento dei singoli elementi dal La al Gd. Nella serie delle terre rare si hanno, come è noto, variazioni graduali delle proprietà (per esempio dei raggi atomici), ed un comportamento eccezionale per quegli elementi che possono presentare una valenza diversa dalla normale 3 (Ce, Sm, Eu, Yb). Lo studio di una serie di composti può perciò essere utile per esaminare differenze legate alla variazione quasi continua del raggio atomico, ed alla variazione discontinua della valenza per gli elementi anormali.

I composti esaminati, a struttura molto semplice, erano quelli intermetallici del Gd, di formula MX, con X = Ag, Mg, Zn, Cd, Hg; e di formula MX_3 con X = In, Tl, Pb; e quelli semimetallici, di formula MX con X = S, Se, Te, P, As, Sb, Bi. Per completare i dati mancanti sono stati preparati anche vari altri composti intermetallici degli elementi dal La al Sm. In tutto sono state determinate le strutture di 26 nuovi composti.

Il Gadolinio usato è stato in massima parte ottenuto da un ossido al 99,0 % di purezza (con 1 % di Sm e Tb), per riduzione con Ca, e distillazione dell'eccesso di Ca in alto vuoto, secondo Spedding e Daane [1]. La preparazione ha presentato difficoltà maggiori per il Gd che per i metalli precedenti, ed ha fornito un prodotto al 99,1 % in metallo. Esso aveva una struttura esagonale compatta con $a = 3{,}633$; $c = 5{,}777$ Å, in buon accordo con i valori di Spedding e Daane [2] per il metallo purissimo ($a = 3{,}636$; $c = 5{,}783$ Å). Successivamente, specie in vista della sua utilizzazione per misure magnetiche, è stato usato un metallo della Nuclear Corporation americana, con solo 0,1 % di altre terre rare, e 0,3 % di Tantalio, col quale sono stati ripreparati i composti con i 7 metalloidi, ottenendo gli stessi valori delle costanti reticolari. Gli altri metalli delle terre rare usati avevano una purezza del 99,4–99,5, % ed erano stati ottenuti per elettrolisi (La, Ce, Pr), o per calciotermia (Nd), o per distillazione (Sm).

Le leghe del Gadolinio hanno punti di fusione notevolmente più elevati di quelli delle altre terre rare. I composti intermetallici descritti fondono a temperature non troppo alte ($< 1450°$ C), mentre per altri di cui fu tentata la preparazione non è stato possibile ottenere campioni omogenei nelle stesse condizioni, ed il metodo di preparazione dovrà essere corrispondentemente variato.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica fisica dell'Università di Genova.

(**) Pervenuta all'Accademia il 23 luglio 1960.

TABELLA I.

Composti MX *cubici centrati.*

	Costante reticolare a_o	Distanza M — X	Somma dei raggi $R_M^{[8]} + R_X^{[8]}$	$\Delta = D_{M-X} - (R_M + R_X)$	$\Delta\%$
LaAg	3,804	3,294	3,238	+ 0,056	+ 1,7
*CeAg	3,758	3,254	3,186	+ 0,068	+ 2,1
*PrAg	3,735	3,235	3,190	+ 0,045	+ 1,4
*NdAg	3,711	3,214	3,183	+ 0,031	+ 1,0
*SmAg	3,684	3,190	3,165	+ 0,025	+ 0,8
*GdAg	$3,65_3$	$3,16_3$	3,166	— 0,003	— 0,1
LaMg	3,963	3,432	3,392	+ 0,040	+ 1,2
CeMg	3,912	3,388	3,340	+ 0,048	+ 1,4
PrMg	3,885	3,364	3,344	+ 0,020	+ 0,6
*NdMg	3,861	3,344	3,337	+ 0,007	+ 0,2
*SmMg	3,810	3,299	3,319	— 0,020	— 0,6
*GdMg	3,787	3,280	3,320	— 0,040	— 1,2
LaZn	3,760	3,256	3,170	+ 0,086	+ 2,7
CeZn	3,704	3,208	3,118	+ 0,090	+ 2,9
PrZn	3,678	3,185	3,122	+ 0,063	+ 2,0
*NdZn	3,657	3,167	3,115	+ 0,052	+ 1,7
*SmZn	3,622	3,137	3,097	+ 0,040	+ 1,3
*GdZn	3,601	3,118	3,098	+ 0,020	+ 0,6
LaCd	3,905	3,382	3,320	+ 0,062	+ 1,9
CeCd	3,865	3,347	3,268	+ 0,079	+ 2,4
PrCd	3,830	3,317	3,272	+ 0,045	+ 1,4
NdCd	3,811	3,300	3,265	+ 0,035	+ 1,1
*SmCd	3,771	3,266	3,247	+ 0,019	+ 0,6
*GdCd	3,748	3,246	3,248	— 0,002	— 0,1
*LaHg	3,864	3,346	3,350	— 0,004	— 0,1
CeHg	3,816	3,305	3,298	+ 0,007	+ 0,2
PrHg	3,799	3,290	3,302	— 0,012	— 0,4
NdHg	3,780	3,273	3,295	— 0,022	— 0,7
SmHg	3,744	3,242	3,277	— 0,035	— 1,1
*GdHg	3,719	3,221	3,278	— 0,057	— 1,7

TABELLA II.

Composti MX_3 *cubici a facce centrate.*

	Costante reticolare a_o	Semistanza $\frac{1}{2}(M—X)=\frac{1}{2}(X—X)$	Contrazione percentuale	
			X%	M%
$LaIn_3$	4,732	1,673	+ 1,0	— 10,9
$CeIn_3$	4,688	1,657	0	— 9,2
$PrIn_3$	4,670	1,651	— 0,3	— 9,7
$NdIn_3$	4,655	1,646	— 0,6	— 9,6
$SmIn_3$	4,622	1,634	— 1,3	— 9 3
*$GdIn_3$	4,601	1,627	— 1,7	— 9,7
$LaTl_3$	4,806	1,699	— 1,0	— 9,5
$CeTl_3$	7,767	1,685	— 1,9	— 7,6
$PrTl_3$	4,747	1,679	— 2,2	— 8,1
$NdTl_3$	4,733	1,673	— 2,6	— 8,1
$SmTl_3$	4,708	1,665	— 3,0	— 7,6
*$GdTl_3$	4,690	1,658	— 3,4	— 8,0
$LaPb_3$	4,903	1,733	— 1,0	— 7,7
$CePb_3$	4,874	1,723	— 1,6	— 5,5
$PrPb_3$	4,867	1,720	— 1,7	— 5,9
$NdPb_3$	4,852	1,715	— 2,0	— 5,8
$SmPb_3$	4,835	1,709	— 2,4	— 5,2
*$GdPb_3$	4,828	1,707	— 2,5	— 5,3

I composti intermetallici furono preparati per fusione delle quantità calcolate dei componenti in piccoli crogioli di Mo o Ta o di Phytagoras, che venivano saldati sotto Argon in crogioli di ferro più grossi, scaldati fino a 1450°C e raffreddati lentemente, ricuocendoli a lungo a 700°–800°C. I composti con i metalloidi furono invece ottenuti facendo reagire nel vuoto in tubetti di quarzo tornitura di Gd con i vapori del metalloide, a temperature diverse a seconda dei casi (i più facili e reagire a bassa temperatura sono il Se e l'As); comprimendo poi le polveri ottenute in pastiglie che venivano scaldate sotto vuoto, o in Argon, da 1100° a 1400° C. Tutti i prodotti ottenuti, o per fusione o per sinterizzazione, si presentavano come masse

compatte, omogenee, fragili, di aspetto grigio metallico; eccetto i composti con S, Se, Te che avevano una colorazione dal giallo al rosso viola, e lucentezza metallica.

TABELLA III.

Costanti reticolari dei composti MX, *tipo* NaCl (Å).

X = \ M =	La	Ce	Pr	Nd	Sm	Eu	Gd
S	5,854	5,777	5,739	5,692	5,970	5,969	5,563*
Se	6,063	5,992	5,947	5,909	6,200	6,185	5,781*
Te	6,422	6,359	6,322	6,262	6,594	6,585	6,139*
N	5,286	5,021	5,165	5,151	5,042	5,014	4,999*
P	6,025	5,909	5,872	5,838	5,760	—	5,723*
As	6,137	6,072	6,009	5,970	5,921	—	5,862*
Sb	6,488	6,412	6,366	6,322	6,271	—	6,217*
Bi	6,578	6,500	6,461	6,424	6,362	—	6,316*

I composti del Gd (e del Sm) sono stati esaminati con i raggi X, usando la radiazione K del ferro, mentre per quelli delle altre terre rare è stata utilizzata la radiazione K del rame. Si ottengono così ottimi fotogrammi delle polveri, dai quali sono stati ricavati i valori delle costanti reticolari (col metodo di Straumanis) riportati nelle tabelle. Data anche la semplicità delle strutture non sono stati riportati i dati numerici relativi alle θ, d, ed intensità calcolate ed osservate per i singoli composti. Tali dati possono essere naturalmente messi a disposizione.

I composti MX con X = Ag, Mg, Zn, Cd, Hg sono del tipo CsCl; quelli MX_3 con X = In, Tl, Pb sono del tipo $AuCu_3$; i rimanenti con i metalloidi sono del tipo NaCl. Nelle Tabelle I, II, e III sono riportate le costanti reticolari corrispondenti, insieme a quelle degli altri composti analoghi conosciuti: i composti ultimamente esaminati sono segnati con un asterisco [3].

Conviene discutere i resultati separatamente, per i composti propriamente intermetallici, e per gli altri con i metalloidi. Per i primi (MX ed MX_3), le distanze interatomiche non sono additive: non si possono cioè ottenere come somme di due serie di raggi atomici, per gli altri si.

Per i composti cubici centrali MX (Tabella I), la cui costante reticolare è determinata dalla distanza M—X, si trova, calcolando le differenze fra le distanze osservate e le somme dei raggi atomici ordinari, che la differenza percentuale diminuisce in tutti i casi dal La al Gd, come se la terra rara (o l'altro metallo) si contraesse sempre di più. La differenza varia quasi pro-

porzionalmente al numero atomico della terra rara, con l'eccezione, in tutti i casi, del Cerio; come si può osservare anche direttamente dalla fig. 1 (e dalla 2 per i composti MX_3), nella quale i punti per il Cerio sono leggermente sotto le curve che congiungono gli altri. Questo comportamento anormale

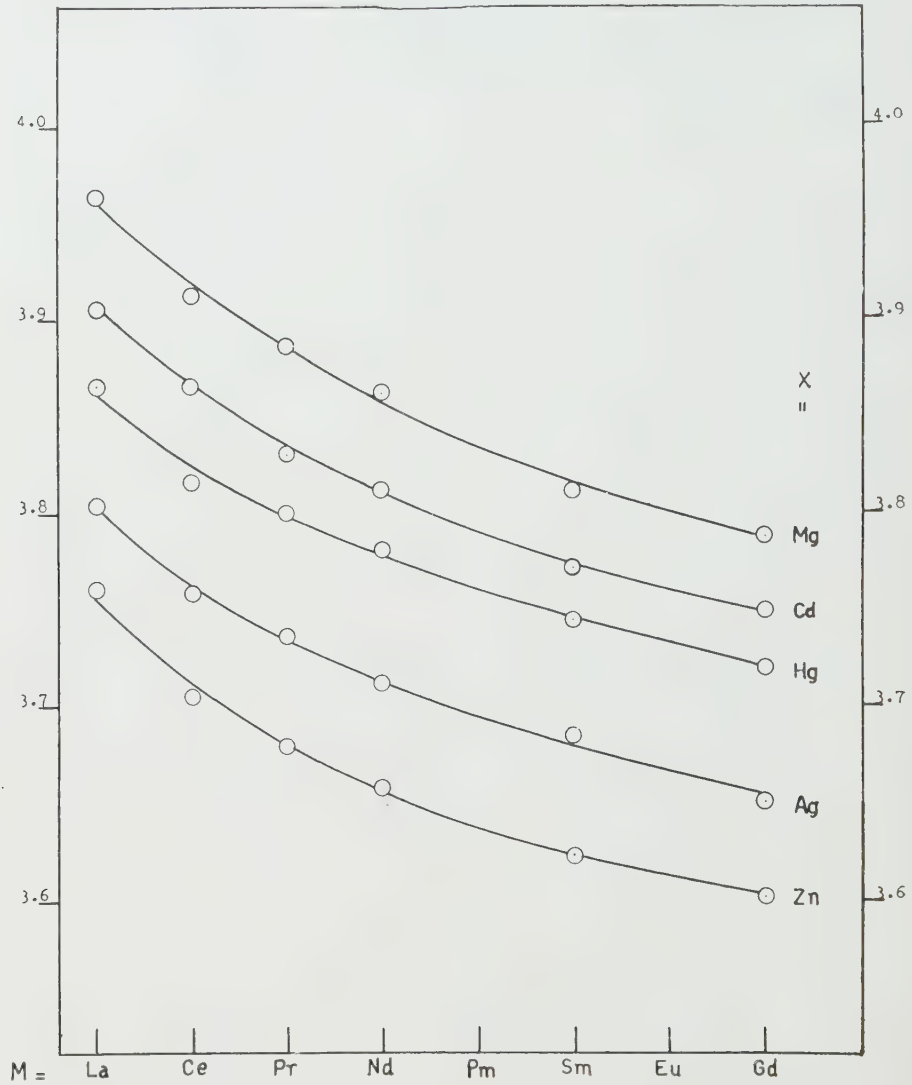


Fig. 1. – Costanti reticolari dei composti MX cubici centrati (Å).

del Cerio era già stato rilevato da Klemm e coll. [4], che l'avevano messo in relazione con la tendenza del Cerio a formare ioni Ce^{4+}. La differenza però è molto piccola, ed i valori di Δ sarebbero più regolari, se si prendesse per raggio atomico un valore più grande di quello ottenuto dal metallo. Per il Sm, invece, non si ha una deviazione dall'andamento regolare, come se la possibilità della comparsa di una sua valenza 2 non entrasse qui in considerazione.

La struttura cubica a facce centrate per i composti MX_3 è, come è noto, frequente per molti composti intermetallici e sembra legata a fattori dimensionali. Così l'Uranio forma composti UX_3 con Al, Ga, In, Tl, Si, Ge, Sn , Pb; le terre rare con raggi atomici più grandi, soltanto con In, Tl, Sn, Pb; il Calcio con Sn, Tl, Pb; lo Stronzio solo con Pb. Nel reticolo le distanze

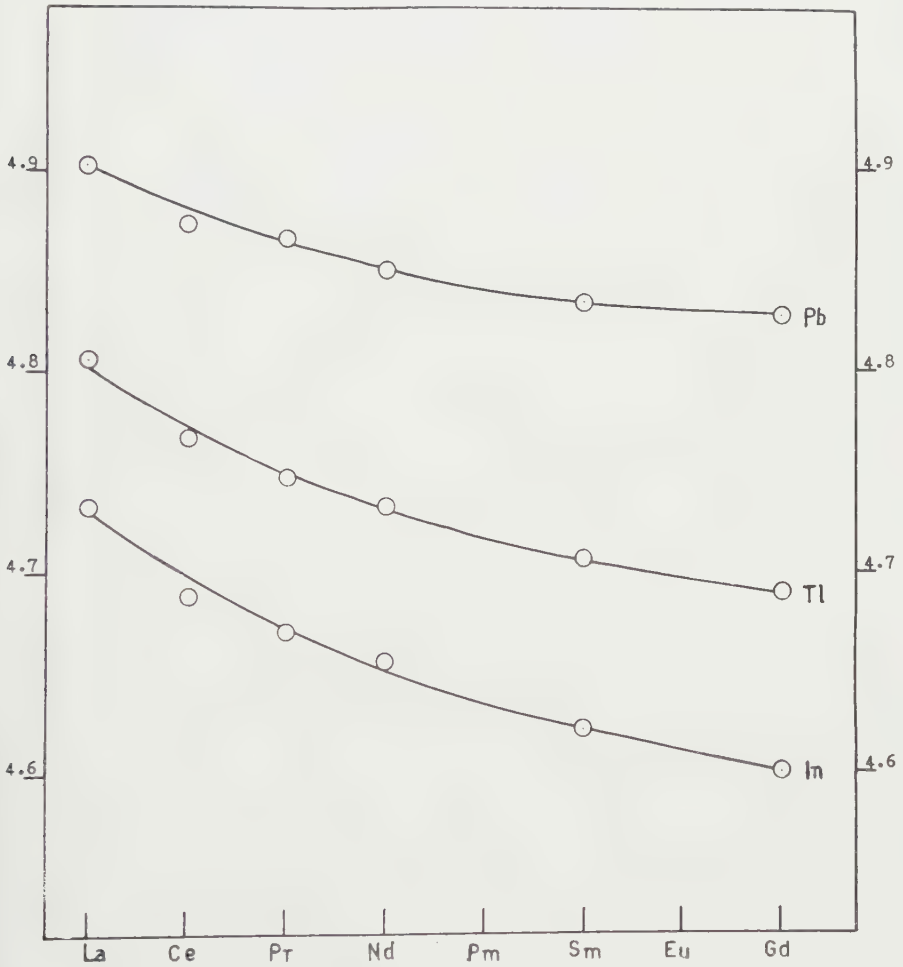


Fig. 2. – Costanti reticolari dei composti MX_3 cubici a facce centrate.

M—X ed X—X devono essere uguali, e, se esse sono minori del doppio dei raggi atomici di M ed X, come succede per i composti delle terre rare, si possono calcolare separatamente le contrazioni delle due specie atomiche. Si trova allora (Tabella II) che mentre la contrazione della specie X aumenta in ogni serie di composti, quella della terra rara diminuisce.

Restano infine da considerare i composti tipo NaCl formati con elementi a carattere metalloidico. Per provare se è valida una legge di additività ($D = R_M + R_X$), sono stati riportati nella fig. 3 i valori delle distanze intera-

tomiche in funzione del raggio ionico delle terre rare trivalenti. I valori usati sono quelli di Templeton e Dauben [5], eccetto per il Lantanio, per il quale è stato scelto un valore poco più alto (1,071 invece di 1,061 Å). Si vede che i punti sperimentali si allineano bene su rette a 45° (nel grafico le

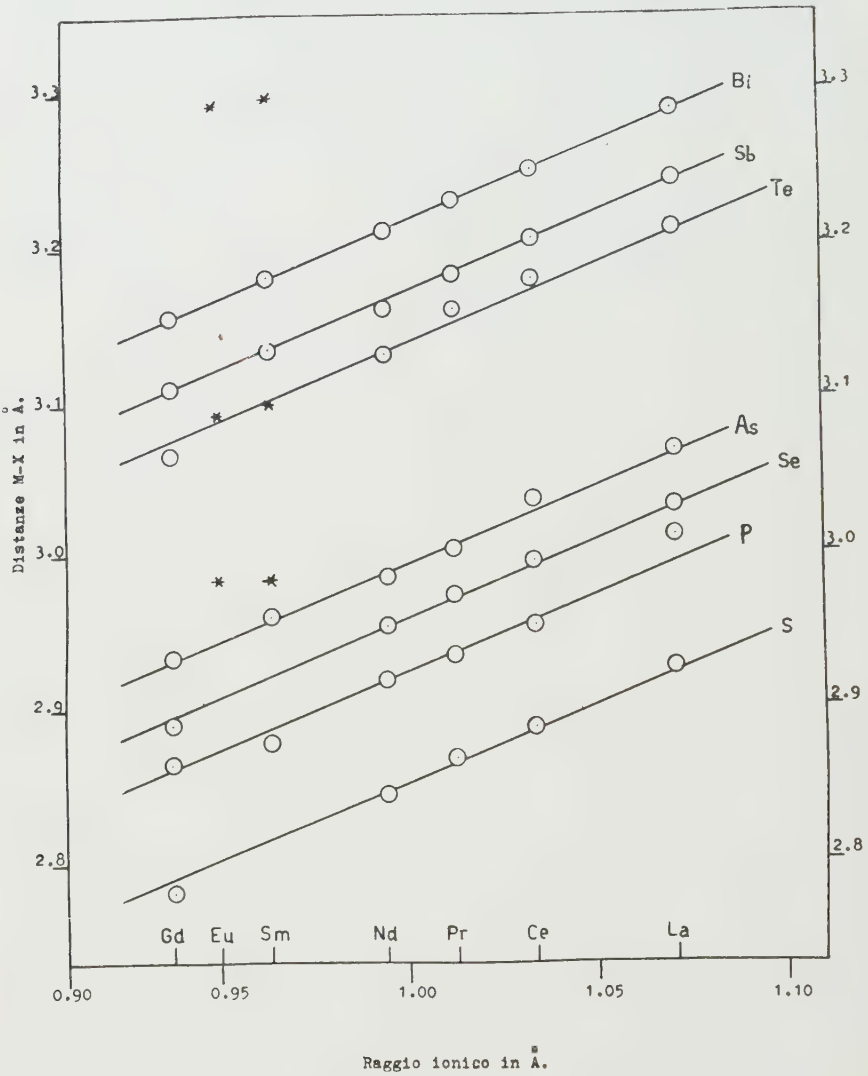


Fig. 3. – Distanze atomiche per i composti MX, tipo NaCl.

ascisse e ordinate hanno scale diverse), e facilmente si potrebbero ricavare valori per i raggi ionici dei metalloidi negativi.

Va rilevata a questo punto una differenza fra i composti tipo NaCl formati con i metalloidi del V e del VI gruppo del sistema periodico. Per i primi si può pensare ad un reticolo costituito in prima approssimazione da ioni con la stessa carica positivi e negativi e con un contributo più o meno grande

di legame metallico; ma per i secondi c'è la difficoltà di una valenza diversa per il metallo ed il metalloide. In questo caso, inoltre, come si vede facilmente dal grafico, dove sono stati indicati con asterischi i valori corrispondenti ai solfuri, seleniuri e tellururi; l'Europio [6] ed il Samario dànno distanze M—X nettamente superiori a quelle degli altri elementi. Eu e Sm devono avere quindi dimensioni assai maggiori, il che è in accordo con la presenza di ion Eu^{2+} e Sm^{2+}. Sm ed Eu si comportano cioè da trivalenti nei composti con i metalloidi del V gruppo e da bivalenti con quelli del VI.

A parte i due elementi Samario ed Europio, che possono dare composti con valenza 2, per gli altri l'andamento delle distanze è lo stesso con i metalloidi del V o del VI gruppo, come se ci fossero sempre ioni M^{3+}; e, del resto il fatto che i composti con i metalloidi del VI gruppo siano colorati li distingue da quelli del Samario ed Europio che sono grigio neri. È abbastanza probabile che per questi si abbia un tipo di valenza ionico con una certa percentuale di valenza metallica che si presenta in un modo particolare: un atomo di terra rara entra a formare uno di questi composti dando un ione trivalente, quello del metalloide dà un ione bivalente negativo, ed il reticolo contiene le due specie ioniche con carica diversa ed un elettrone libero.

Le misure che si presentano più adatte a dare una risposta a tali questioni sono quelle di conducibilità elettrica e di suscettività magnetica, che verranno prossimamente descritte.

BIBLIOGRAFIA.

[1] F. H. SPEDDING, A. H. DAANE, « Journ. of Metals », 504 (1954).
[2] F. H. SPEDDING, A. H. DAANE, K. W. HERRMANN, « Acta Crystall. », *9*, 559 (1956).
[3] Per i valori determinati precedentemente ved. A. IANDELLI, *Proceedings of the 9th Symposium of the NPL*, 3 F (1958); A. IANDELLI, « Zeit. anorg. allgem. Chem. », *288*, 81 (1956).
[4] W. KLEMM, H. BOMMER, F. ENDTER, E. KROSE, « Zeit. anorg. allgem. Chem. », *252*, 67 (1943).
[5] D. H. TEMPLETON, C. H. DAUBEN, « J. Amer. Chem. Soc. », *76*, 5237 (1954).
[6] W. KLEMM, H. SENNF, « Zeit. anorg. allgem. Chem. », *241*, 259 (1939).

Chimica inorganica. — *Ricerche sulle leghe dei metalli nobili con gli elementi più elettropositivi.* – IV. *Le fasi gamma dei sistemi magnesio–rodio e magnesio–palladio*(*). Nota (**) di RICCARDO FERRO, presentata dal Socio L. ROLLA.

In precedenti Note di questa serie sono stati riferiti i risultati ottenuti nello studio di leghe del magnesio col palladio [1], e col platino [2].

Nel caso del sistema magnesio–palladio è stata dimostrata l'esistenza delle seguenti fasi aventi le caratteristiche indicate:

Fase α, soluzioni solide che, ad alta temperatura, si estendono dal palladio fin verso circa $MgPd_3$ e che, all'abbassarsi della temperatura si smiscelano in due fasi: una palladio quasi puro, e l'altra di composizione prossima ad $MgPd_3$ (composto questo che è risultato essere cubico a facce centrate con $a = 3{,}920$ Å).

Fasi β *e* β': due modificazioni allo stato solido esistenti in una regione di omogeneità intorno ad una composizione corrispondente a MgPd.

Fase γ, una ristretta regione di soluzioni solide di composizione prossima a $Mg_{2,7}Pd$, (esagonale con 28 atomi per cella elementare).

Fase δ, corrispondente al composto Mg_3Pd, esagonale tipo Na_3As.

Fase ε, corrispondente, al composto Mg_4Pd.

Fase ζ, una regione di soluzioni solide intorno ad una composizione corrispondente a Mg_6Pd, cubica a facce centrate con cella elementare molto grande (circa 400 atomi per cella elementare).

Nel caso delle leghe magnesio–platino, nella porzione del sistema presa in esame, è stata dimostrata la presenza delle seguenti fasi:

Fase δ, corrispondente al composto Mg_3Pt, analoga a quella descritta nel sistema precedente.

Fase ζ, pure analoga a quella corrispondente del sistema magnesio–palladio.

Dai dati suddetti risultano un certo numero di analogie tra i due sistemi ed anche tra questi ed altri sistemi, già noti, del magnesio con altri metalli nobili. Queste analogie possono essere così riassunte:

Fasi α. Sia il sistema Mg–Pd che quelli Mg–Ag [3] ed Mg–Au [4], sono caratterizzati dalla presenza di queste fasi, esistenti nella porzione ricca in metallo nobile e simili dal punto di vista strutturale.

(*) Lavoro eseguito negli Istituti di Chimica Generale e di Chimica Fisica dell'Università di Genova.

(**) Pervenuta all'Accademia l'8 luglio 1960.

Fasi β–β′. Nei sistemi Mg–Rh [5], Mg–Pd, Mg–Ag e Mg–Au è presente una regione di soluzioni solide intorno alla composizione 1 : 1 con strutture riferibili a quella del CsCl e per le quali è dimostrato (MgAg , MgAu) od è presumibile (MgPd) l'esistenza di un massimo nelle temperature di fusione.

Maggiori differenze si trovano invece in questi diversi sistemi nelle porzioni ricche in magnesio, salvo l'esistenza di alcuni tipi di composti aventi simili strutture: come esempio si possono ricordare i composti Mg_3Me (Mg_3Pd, Mg_3Pt ed Mg_3Au hanno la stessa struttura tipo Na_3As [6] uguale a quella di Mg_3Hg [7] ma diversa da quella di Mg_3Ag).

Altre considerazioni non possono per ora essere fatte dato che per ora non sono disponibili altri dati: così, nel caso particolare delle leghe magnesio–rodio, solo i dati relativi alla fase MgRh sopra citata sono riportati nella letteratura.

Nella presente Nota vengono riferiti i dati ottenuti nella preparazione di alcune leghe del magnesio col rodio che hanno permesso di dimostrare l'esistenza di una fase isostrutturale alla fase γ del sistema magnesio–palladio ed i risultati della determinazione della struttura di ambedue queste sostanze.

Le leghe magnesio–rodio sono state preparate ponendo in crogioli di ferro (chiusi poi per saldatura elettrica) i due metalli (peso complessivo circa 1–2 gr), riscaldando fin verso 1400° C e raffreddando poi lentamente fin verso 300° (durante circa 1 settimana). Per facilitare l'ottenimento di un prodotto omogeneo i campioni venivano periodicamente agitati).

Le leghe sono state analizzate col seguente procedimento: il campione, finemente polverizzato e mescolato con un largo eccesso di NaCl, veniva scaldato (500–600° C) in corrente di cloro, il prodotto ottenuto era lisciviato con acqua ed il residuo non attaccato ritrattato nuovamente una o due volte con cloro in modo da portare praticamente tutta la lega in soluzione. Dalla soluzione il rodio veniva precipitato come solfuro poi, dopo dissoluzione con acqua regia, riprecipitato con mercaptobenzotiazolo, calcinato, arroventato in corrente di idrogeno e pesato come metallo. I dati così ottenuti sono stati usati però solo come indicativi, per controllo, in quanto si avevano generalmente valori un pò bassi (probabilmente a causa di una leggera perdita per volatilizzazione durante il trattamento in corrente di cloro); sul filtrato del solfuro di rodio veniva comunque determinato il magnesio come pirofosfato. Nell'elenco delle leghe analizzate, qui di seguito riportato, sono indicati i valori più attendibili delle percentuali di magnesio ottenuti da diverse determinazioni.

Sui diversi campioni è stata determinata la densità picnometrica usando benzolo rettificato anidro, ed è stato effettuato l'esame micrografico, dopo politura a secco, attaccando con HNO_3 al 20 %. Le leghe sono state inoltre esaminate coi raggi X, col metodo delle polveri, disposizione del film secondo Straumanis, radiazione K_α del Fe ($\lambda_{K_{\alpha 1}} = 1{,}93597$ Å).

Le leghe preparate sono le seguenti:

Mg %	Rapporto stechiom.	ρ (gr/cm³)	Aspetto micrografico
36,2	$Mg_{2,40}Rh$	4,41	Eterogenea con eccesso di parte più nobile.
39,6	$Mg_{2,77}Rh$	4,10	Praticamente quasi omogenea
40,5	$Mg_{2,88}Rh$	3,96	Omogenea
41,1	$Mg_{2,95}Rh$	3,95	Omogenea.
42,3	$Mg_{3,10}Rh$	3,86	Eterogenea con eccesso di parte meno nobile.

Tutte queste leghe sono stabili all'ossidazione atmosferica, estremamente fragili, ed, osservate coi raggi X, dànno fotogrammi delle polveri simili tra di loro (con piccole variazioni delle distanze reticolate come di seguito specificato) e simili a quelli ottenuti per l'analoga fase del sistema magnesio–palladio. L'interpretazione dei fotogrammi è stata fatta tenendo conto di ciò: infatti, per la fase γ Mg–Pd, i dati ottenuti dai fotogrammi delle polveri e da quelli su cristalli unici avevano indicato che questa sostanza è esagonale (gruppo spaziale D^4_{6h} o C^+_{6v} o D^4_{3h} con circa 28 atomi per cella elementare [1].

I valori delle costanti ottenuti per le suddette leghe col rodio sono qui di seguito riportati [2]:

Rapporto stechiom.	a (Å)	c (A)	c/a	
$Mg_{2,40}Rh$	8,554	8,028	0,938₅	assi esagonali.
$Mg_{2,77}Rh$	8,536	8,025	0,940	
$Mg_{2,95}Rh$	8,515	8,016	0,941₄	

Si noti, intanto, che (presumibilmente in relazione ad un non perfetto raggiungimento dell'equilibrio nelle condizioni di preparazione descritta) l'intervallo di omogeneità quale si può ricavare dai dati X appare leggermente più grande di quello deducibile dai soli dati micrografici. (Si confronti col precedente elenco delle caratteristiche delle varie leghe).

Per una composizione al 40 % Mg, interpolando fra i vari dati surriportati si calcola $Z = 27{,}6 \cong 28$ atomi/cella, in buon accordo con quanto si verifica per l'analoga fase γ magnesio–palladio. Per ambedue queste sostanze la struttura è risultata riferibile al tipo Al_5Co_2 [8] cui corrisponderebbero le seguenti posizioni atomiche:

Gruppo D^4_{6h}: 2 Rh (o Pd) in (d) $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$; $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$

6 Rh′ (o Pd′) in (h) v , $2v$, $\frac{1}{4}$;

(1) I valori delle costanti per una lega al 38,3 % Mg($Mg_{2,72}Pd$) sono $a = 8{,}644$ Å, $c = 8{,}160$ Å, $c/a = 0{,}944$.

(2) I valori riportati sono stati ottenuti per estrapolazione a 90° con la funzione $1/2\,(\cos^2\theta/\sin\theta + \cos^2\theta/\theta)$.

$$2\,\mathrm{Mg} \quad \text{in } (a)\ 0\ ,\ 0\ ,\ 0\ ;\ 0\ ,\ 0\ ,\ \tfrac{1}{2}$$

$$6\,\mathrm{Mg}' \quad \text{in } (h)\ w\ ,\ 2w\ ,\ \tfrac{1}{4}\ ;\ \text{⌒}$$

$$12\,\mathrm{Mg}'' \quad \text{in } (k)\ x\ ,\ 2x\ ,\ z\ ;\ \text{⌒}\ .$$

I valori dei diversi parametri sono stati assunti come segue:

$$v = 0{,}120 \quad ; \quad w = 0{,}467 \quad ; \quad x = 0{,}804 \quad ; \quad z = 0{,}061\ .$$

È naturalmente da osservare che alla suddetta disposizione atomica corrisponde un rapporto stechiometrico ideale di 5 : 2, mentre per le leghe descritte si è leggermente discosti da questo valore; comunque con le suddette ipotesi si è avuto, per ambedue le fasi, un buon accordo tra le intensità delle diverse righe osservate sui fotogrammi delle polveri e quelle calcolate (circa 150 terne di indici).

Ovviamente, dato il basso fattore atomico di diffusione del magnesio, i parametri relativi a questa specie atomica sono suscettibili di una certa variazione, mentre per quello relativo al Rh (od al Pd) la precisione è maggiore: in particolare il calcolo delle intensità rifatto per il valore $v = 0{,}128$ mostra che questo è troppo alto, mentre, analogamente, $v = 0{,}112$ sembra troppo basso.

Concludendo, le seguenti caratteristiche possono mettersi in evidenza per le suddette fasi:

1° esistenza di un intervallo di omogeneità (fatto che del resto si verifica anche per il prototipo di questa struttura Al_5Co_2) con tendenza ad avere più magnesio di quello corrispondente alla composizione ideale;

2° aumento delle costanti della cella elementare, particolarmente della a (c/a diminuisce) coll'aumentare della percentuale di metallo nobile, in apparente contrasto con quanto ci si potrebbe attendere in base alle sole dimensioni atomiche dei singoli elementi;

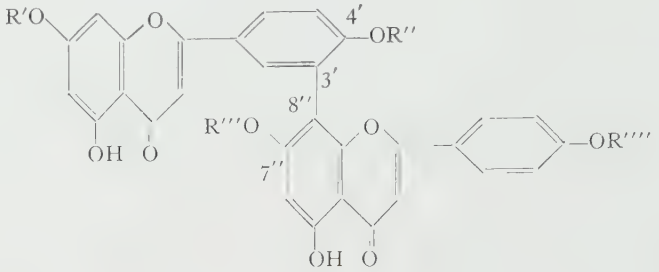
3° abbastanza forti contrazioni del volume molecolare rispetto alla somma dei volumi atomici, in analogia a quanto avviene in diverse altre leghe tra metalli di questo tipo. Per la fase γ Mg–Pd si ha una contrazione di circa 10 %, mentre più elevato è il valore che si osserva per l'analoga fase col Rh (circa 12 %).

BIBLIOGRAFIA.

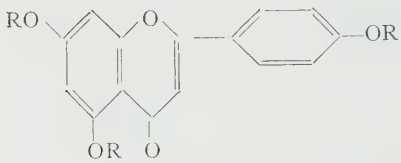
[1] R. FERRO, « Journal of the less-common metals », *1*, 424 (1959).
[2] R. FERRO e G. RAMBALDI, « Journal of the less common metals », in corso di stampa.
[3] Si veda su: M. HANSEN and K. ANDERKO, *Costitution of binary alloys*, McGraw-Hill Book Co. New York (1958) p. 30.
[4] Ibidem, p. 213.
[5] V. B. COMPTON, « Acta Cryst. », *11*, 446 (1958).
[6] G. BRAUER und E. ZINTL, « Z. phisikalische Chemie », *B. 37*, 323 (1937).
[7] G. BRAUER, H. NOWOTNY und R. RUDOLPH, « Z. Metallkunde », *38*, 81 (1947).
[8] A. J. BRADLEY and C. S. CHENG, « Z. Krist. », *99*, 480 (1938).

Chimica organica. — *Su componenti flavonoidi isolati da* Taxus baccata *L.* (*). Nota III (**) di Gaetano Di Modica, Pier Filippo Rossi, Anna Maria Rivero, Enzo Borello, presentata dal Socio A. Quilico.

Lo spettro nell'U.V. dei composti biflavonici isolati da varie specie vegetali (soprattutto sinora da Conifere) e per cui da Kawano e Baker [1–2] si è proposta la formula generale (I), presenta caratteristiche del tutto analoghe a quelle dei flavoni semplici (II), salvo per i coefficienti d'estinzione molecolari che risultano all'incirca raddoppiati.



(I)



(II)

I massimi di assorbimento si trovano nella zona intorno a 270 e 340 mμ. Comportamento analogo hanno gli acetilderivati. Nel caso di (I) abbiamo osservato i seguenti valori:

λ_{max} 340 mμ $\varepsilon = 28.400$

λ_{max} 270 mμ $\varepsilon = 31.000$

e per l'acetilderivato di (I)

λ_{max} 305 mμ $\varepsilon = 41.500$

λ_{max} 255 mμ $\varepsilon = 39.500$

Dall'esame degli spettri U.V. risulta che la molecola (I) non ha struttura piana essendo interrotta la coniugazione nel legame 3'–8''. Infatti un

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico dell'Università di Torino.

(**) Pervenuta all'Accademia il 22 giugno 1960.

tale sistema se fosse piano dovrebbe presentare un forte effetto batocromo, mentre gli assorbimenti sono quelli tipici dei flavoni semplici nella regione intorno ai 250 e 350 mμ. Questa ipotesi è avvalorata dal raddoppio dei coefficienti molecolari di estinzione e si verifica nei biflavoni rispetto ai flavoni semplici; il che significa che nei biflavoni si riscontrano gli stessi cromofori dei flavoni semplici. Il raddoppio si spiega tenendo presente che nei biflavoni esistono nella stessa molecola due cromofori indipendenti, ciascuno dei quali interviene con le proprie caratteristiche spettroscopiche.

Questa evidenza spettrale analoga a quella portata da Pickett [3] per i bifenili o–o′–bisostituiti, lascia immaginare che gli ossidrili in 4′–7″ del biflavone possono trovarsi nelle condizioni di interagire in modo analogo a quello degli ossidrili del 2–2′–diossidifenile.

In particolare si è fatto reagire il composto (I) secondo quanto è stato fatto da Kraemer e Weissberger sul 2–2′–diossidifenile per ottenere il dibenzofurano (III) [4].

(III)

La sostanza (I) (quando R′=R″=R‴=R⁗=H) per azione di cloruro di zinco fornisce in effetti un nuovo composto con caratteristiche del tutto differenti da quelle di (I) e che per acetilazione dà una sostanza a p.f. 339°–350°. La determinazione dei gruppi acetilici di questo nuovo composto acetilato indica la presenza di soli 4 ossidrili invece dei 6 della sostanza di partenza.

Questo dato analitico ci conforta nel ritenere che la sostanza (I) nel trattamento suddetto si trasformi in un derivato benzofuranico analogamente al diossidifenile.

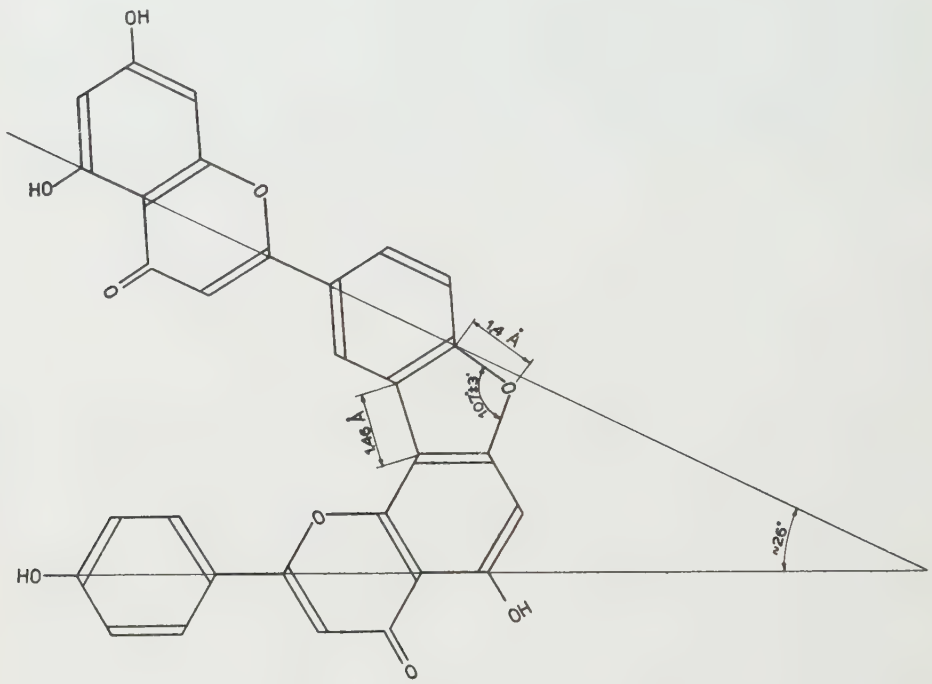
Considerazioni strutturistiche effettuate in base ai valori degli angoli di valenza e delle lunghezze dei legami dell'anello furanico permettono di prospettare per questo derivato la formula (IV), formula che non presenta particolari impedimenti sterici.

L'acetilderivato di (IV) presenta nell'U.V. dei massimi a circa 275 e 310 mμ con coefficienti di estinzione rispettivamente di 49.000 e 45.000 (log $\varepsilon = 4{,}69$ e $4{,}65$).

Per convalidare la struttura proposta si è pensato di registrare lo spettro I.R. del composto ottenuto per ciclizzazione e di confrontarlo con quelli del prodotto di partenza e del dibenzofurano.

Lo studio degli spettri infrarossi del furano e dei numerosi suoi derivati ha permesso di ottenere una conoscenza completa e possiamo dire definitiva delle frequenze caratteristiche del nucleo stesso. Esse sono tipiche di diversi nuclei pentaatomici contenenti eteroatomi, quali il pirrolo, l'isossazolo, l'imidazolo, il pirazolo [5], il furazano, ecc.

Considerando soltanto le vibrazioni che avvengono nel piano è possibile prevedere per tutti questi nuclei l'esistenza di 4 vibrazioni di stiramento del nucleo (ω), e 3 vibrazioni di deformazione (Δ). Le prime quattro cadono a frequenze più elevate delle altre tre. Per scopi diagnostici oltre a queste frequenze sono particolarmente utili le γ_{CH} vibrazioni di deformazione degli atomi di idrogeno fuori del piano. È evidente però che nel nostro caso non possiamo servirci di queste ultime e d'altra parte neppure le Δ potranno esserci di grande aiuto poiché la loro posizione è assai variabile.



(IV)

Dovremo quindi limitare la nostra attenzione alle 4 deformazioni ω. I loro valori per il furano sono:

1586 1483 1460 1381 cm^{-1} .

Per i derivati 2–sostituiti [6]:

$\sim$ 1600 $\sim$ 1500 $\sim$ 1450 $\sim$ 1380 cm^{-1} .

Purtroppo nel caso nostro in queste regioni si hanno interferenze considerevoli di assorbimenti intensi dovuti ad altri gruppi quali il =C=O chinonico e il nucleo benzenico. Il primo sebbene si trovi a frequenze più elevate $\sim$ 1640 cm^{-1} è di intensità assai elevata ed il secondo cade proprio in corrispondenza di alcune delle ω del nucleo furanico: bande a $\sim$ 1600, $\sim$ 1580, $\sim$ 1500 cm^{-1}. Dobbiamo quindi limitarci a prendere in considerazione le due ω a frequenza più bassa.

Confrontando gli spettri I.R. del dibenzofurano (fig. 1) della demetilsciadopitisina (fig. 2) e del prodotto ottenuto (fig. 3), osserviamo subito la presenza di una intensa banda d'assorbimento a 1445 cm^{-1} nel dibenzofurano

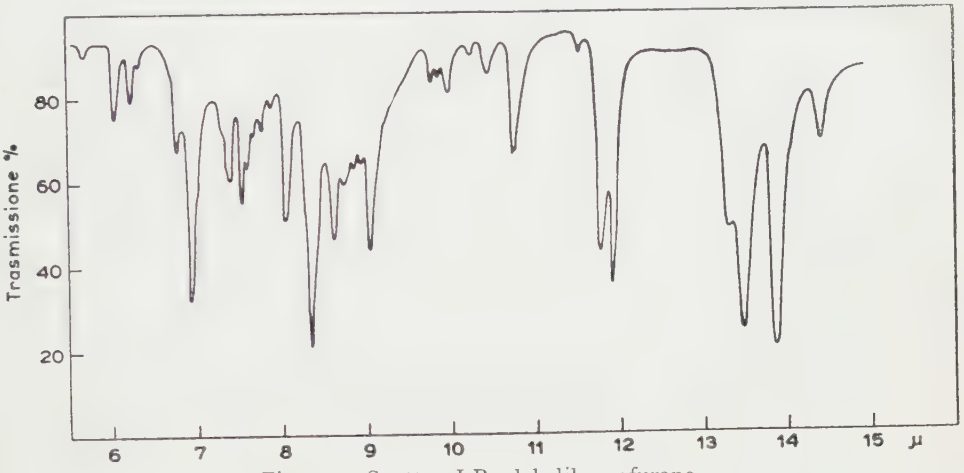


Fig. 1. – Spettro I.R. del dibenzofurano.

e nel prodotto di reazione che è assente nel demetilderivato. Questa banda può venire assegnata ad una ω del nucleo furanico. La quarta ω non è invece individuabile con esattezza perché tutti gli spettri in quella zona sono assai complicati.

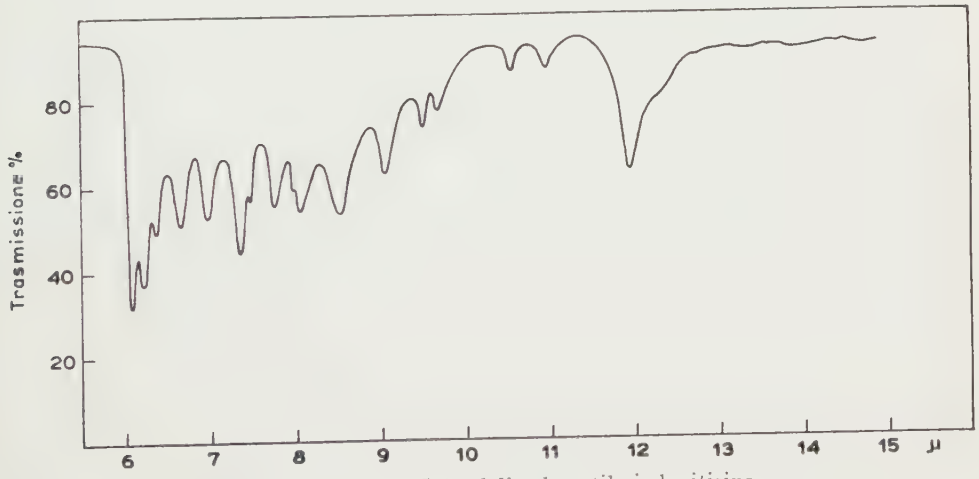


Fig. 2. – Spettro I.R. della demetilsciadopitisina.

Da questo esame risulta quindi che gli spettri I.R. non sono in contrasto con la presenza di un nucleo furanico.

A conferma della validità della reazione si è fatta inoltre una prova di ciclizzazione della sciadopitisina che in 4′ ha un metossile ($R'=R''=R''''=CH_3$). La reazione è negativa e pertanto si può concludere che essa è specifica per le strutture biflavoniche aventi gli ossidrili in 4′-7″ entrambi liberi.

L'operazione di ciclizzazione è effettuata su quantità di sostanze relativamente piccole (100–500 mg), per cui si è pensato di adottarla a fini analitici.

In precedenti Note [7–8] sono state riportate le caratteristiche di due flavoni finora sconosciuti da noi isolati da *Taxus baccata* L. ed indicati, in base al loro punto di fusione, come « flavone 212 » e « flavone 310 ». Entrambi questi composti possiedono la struttura biflavonica postulata per la sciadopitisina [1], in quanto per demetilazione totale forniscono entrambi la demetilsciadopitisina. Ulteriori considerazioni basate sui dati analitici confortavano la conclusione che si trattasse di un isomero della sciadopitisina per il flavone 212 e di un monometossi–pentaidrossi–biflavone per il flavone 310; questo ultimo composto risulta perciò essere un flavone isomero del sotetsuflavone, a p.f. 263°–264° isolato da Karyione e coll. [9].

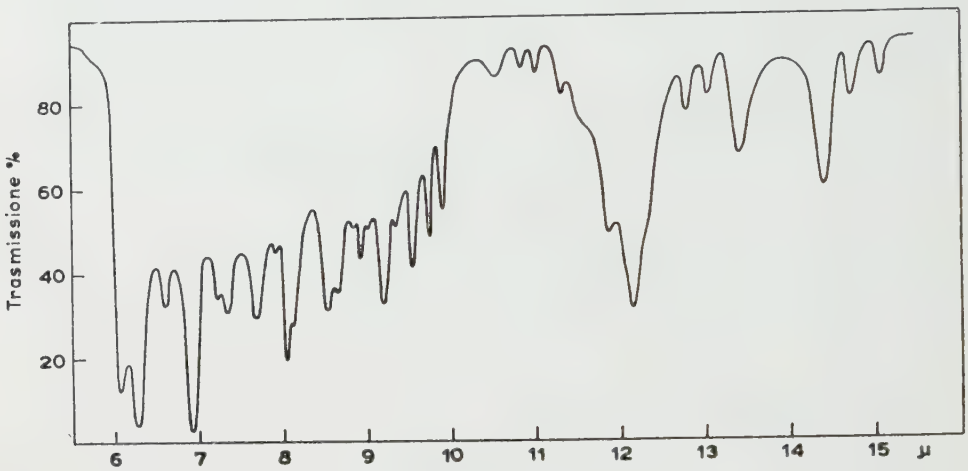
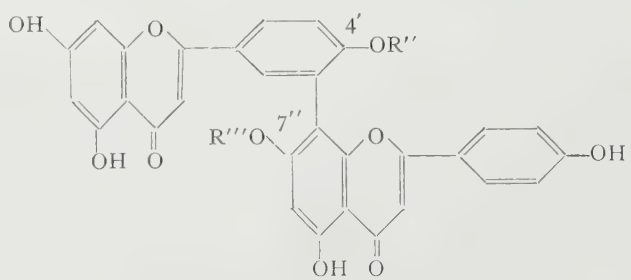


Fig. 3. – Spettro I.R. del prodotto di ciclizzazione.

Si è sottoposto il flavone 310 alla prova di ciclizzazione eseguendola nelle stesse condizioni su riportate, e la prova è risultata negativa, essendosi ricuperato dalla miscela di reazione il flavone di partenza riconosciuto come tale in base ai punti di fusione misti del flavone stesso e del suo acetilderivato.

In base a queste considerazioni si ritiene di poter postulare per il flavone 310 la struttura (V),



(V)

(1) Per una completa bibliografia vedi [7].

dove R'' oppure R''' è uguale a CH_3. Difatti se i due ossidrili in 4' e 7'' fossero entrambi liberi la reazione di ciclizzazione risulterebbe positiva.

Allo stato attuale delle nostre conoscenze non è possibile pervenire ad una maggiore definizione della formula, in quanto non si è ancora giunti ad un'esatta formulazione della struttura del sotetsuflavone isomero del flavone 310. Difatti mentre Baker [10] proponeva una struttura in cui la $R'' = CH_3$, $R''' = H$ recentemente Kawano e Yamada [11] propongono la seconda alternativa, cioè $R''' = CH_3$, $R'' = H$.

Gli Autori ringraziano il prof. Adolfo Quilico per i suggerimenti e le utili discussioni sull'argomento.

Parte sperimentale.

Fusione con cloruro di zinco. – Milligrammi 500 di demetilderivato di sciadopitisina sono riscaldati con g 1,8 di cloruro di zinco fuso su bagno di lega a 250° circa per 4 ore. Si lascia raffreddare fino a 50° e si aggiungono 25 cm^3 di acido cloridrico diluito; si filtra alla pompa e si cristallizza il residuo bruno da piridina più poca acqua. Si ottengono 165 mg di sostanza color giallo-grigio, con p.f. superiore a 350°, solubile in NaOH con colorazione gialla.

Dalla sciadopitisina e dal flavone 310 per trattamento con cloruro di zinco nelle stesse condizioni si ricupera il prodotto di partenza.

Acetilazione. – Il prodotto come sopra ottenuto dal demetilderivato di sciadopitisina, sciolto in 5 cm^3 di piridina, è trattato con 12 cm^3 di anidride acetica e lasciato a sé 48 ore. Si versa poi in acqua e ghiaccio, si filtra e si cristallizza da cloroformio più alcool assoluto. Si ottiene una sostanza cristallina color giallo-grigio, p.f. 339°-350°.

Determinazioni degli acetili:

trov. CH_3CO % 24,09; 24,43

per $C_{38}H_{24}O_{13}$ calcolato per 4 acetili % 25,00

Gli spettri ultravioletti sono stati eseguiti con uno spettrofotometro Beckman DU in soluzione alcoolica per la demetilsciadopitisina e per il suo acetilderivato, in soluzione cloroformica per l'acetilderivato del prodotto ottenuto per fusione con cloruro di zinco; gli spettri infrarossi sono stati eseguiti con uno spettrofotometro Perkin-Elmer 12 C con ottica in NaCl allo stato solido col metodo delle pastiglie in KBr.

Bibliografia.

[1] N. Kawano, «Chem. and Ind.», *1959*, 368.
[2] W. Baker, A.C.M. Finch, W. D. Ollis e K. W. Robinson, «Proc. Chem. Soc.», *1959*, 91.
[3] L. W. Pickett e coll., «J. Am. Chem. Soc.», *72*, 44 (1950).

[4] G. Kraemer e R. Weissberger, « Ber. », *34*, 1662 (1901).
[5] E. Borello, « Gazzetta chimica », *89*, 1437 (1959).
[6] E. Mantica, R. Ercoli, L. Peraldo Bicelli, « Rendiconti Istituto Lombardo di scienze e lettere, Classe Scienze », *91*, 802, 827 (1957).
[7] G. Di Modica, P. F. Rossi, A. M. Rivero, « Atti Acc. Naz. Lincei » [VIII], *26*, 785 (1959).
[8] G. Di Modica, P. F. Rossi, A. M. Rivero, « Atti Acc. Naz. Lincei » [VIII], *27*, 127 (1959).
[9] T. Karyione e T. Sawada, « Yakugaky Zasshi », *78*, 1010 (1958).
[10] W. Baker, W. Ollis e K. W. Robinson, « Proc. Chem. Soc. », *1959*.
[11] N. Kawano e M. Yamada, « J. Am. Chem. Soc. », *82*, 1505 (1960).

Chimica biologica. — *Ricerche sulla membrana degli eritrociti.* – I. *Effetto del* K^+ *e di altri ioni sull'isolamento delle membrane e sull'attività adenilato chinasica* (*). Nota di Paolo Cerletti e Giancarlo De Ritis, presentata (**) dal Corrisp. A. Rossi-Fanelli.

La membrana dell'eritrocita è divenuta oggetto di notevole interesse come sede di sistemi enzimatici che presiedono agli scambi attivi tra il mezzo interno e l'esterno dell'emazia.

La presenza degli enzimi glicolitici, la cui attività è connessa con l'assunzione di PO_4^{3-} dal mezzo esterno [1], era da tempo nota. Numerosi Autori [2, 3, 4, 5, 6] hanno descritto una ATPasi (1) e recentemente l'attività di questo enzima è stata collegata al trasporto attivo di K^+ e Na^+ attraverso la membrana [7].

È stato anche affermato che operando in presenza di K^+ [8] è possibile constatare attività adenilato chinasica nella membrana di eritrociti di coniglio. Dato che in precedenti ricerche [9] avevamo riscontrato esistenza di adenilato chinasi soltanto nell'interno del corpuscolo rosso, ci è parso interessante esaminare se la presenza di ioni consentisse di mettere in evidenza questo enzima anche nella membrana. Un risultato affermativo indicherebbe che l'enzima richiede K^+ o altri ioni per la sua attività.

Le ricerche compiute in questo senso, che vengono riferite nella presente Nota, oltre a confermare che l'adenilato chinasi è assente dallo stroma dell'eritrocita, ci hanno permesso di mettere in evidenza un particolare effetto di K^+ e NH_4^+ sulla agglutinabilità delle proteine citoplasmatiche dell'emazia.

Parte sperimentale.

Materiali e Metodi.

Le proteine sono determinate con la reazione del biureto [10] e l'Hb è determinata dall'assorbimento a 570 mμ del carbossi derivato (HbCO).

L'ADP è purificato dai prodotti commerciali mediante cromatografia su Dowex 1–X2 mesh 200–400 [11]. Il composto eluito è separato dai sali inorganici per adsorbimento su Norite attivata ed eluzione con H_2O, etanolo,

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Biologica della Università di Roma.

(**) Nella seduta del 7 giugno 1960.

(1) Le abbreviazioni usate nel corso della presente Nota sono:

ATP = adenosintrifosfato
ADP = Adenosindifosfato
AMP = Adenosin-5'-monofosfato
P_i = ortofosfato inorganico
Hb = emoglobina
TCA = acido tricloroaceatico.

NH_3 (54 : 45 : 1) [12]. L'ammoniaca, l'alcool e parte dell'acqua sono allontanati concentrando a pressione ridotta.

L'attività adenilato chinasica viene misurata in un mezzo contenente, in un volume finale 0,5 ml, tampone dietilbarbiturato 0,0145 M, pH 7,6, ADP $2 \cdot 10^{-3}$ M, $MgCl_2$ $2{,}8 \cdot 10^{-3}$ M e preparazione enzimatica pari a 0,165 mg di proteine.

La reazione è iniziata aggiungendo il preparato enzimatico al mezzo di incubazione equilibrato termicamente a 37° C, viene condotta per 8 min. con agitazione costante in bagno termostato a 37° C, ed è arrestata aggiungendo 0,05 ml TCA 100 %.

I campioni sono centrifugati: 0,1 ml del sopranatante limpido sono analizzati per cromatografia discendente: la determinazione quantitativa dei derivati purinici separati è fatta mediante la reazione dell'orcina dopo eluzione [13].

Per ogni esperimento si allestiscono prove di controllo incubando separatamente il mezzo di reazione ed il preparato enzimatico. Deproteinizzato questo con TCA, esso viene unito a quantità opportune del mezzo, in modo da riprodurre il sistema di incubazione completo.

Isolamento delle membrane.

Le emazie, sedimentate mediante centrifugazione a 1500 × g da sangue umano eparinizzato, sono lavate 3 volte con NaCl isotonico a 0–2° C. Allontanato l'ultimo liquido di lavaggio la emolisi è ottenuta aggiungendo alle emazie sedimentate un egual volume di H_2O ed agitando fortemente. L'emolisi in genere è completa. Ove permanga qualche eritrocita intatto, esso viene allontanato assieme ai leucociti centrifugando l'emolizzato a 1500 × g per 20 min. a 0° C.

Dal sopranatante limpido (« emolizzato »), la cui concentrazione proteica si aggira sui 180 mg/ml, si prelevano aliquote uguali e la sedimentazione degli stromi viene fatta in assenza di ioni ed in presenza di Na^+, K^+, NH_4^+ in concentrazione isotonica (0,154 M).

A questo scopo l'« emolizzato » è diluito 3 volte aggiungendo con vivace agitazione H_2O e quindi, se necessario, un volume di soluzione 2 M del sale prescelto, tale che la concentrazione finale sia isotonica.

Dopo centrifugazione di 50′ a 24.000 × g a 0° C si separa il liquido limpido sovrastante, che in seguito verrà denominato « sopranatante —H_2O, —Na, —K o —NH_4^+ secondo il tipo di ioni contenuto o l'assenza di ioni, e gli stromi vengono raccolti come un sedimento soffice rosa in assenza di ioni o con Na^+, come un precipitato rosso compatto, in presenza di K^+ e di NH_4^+.

Gli stromi vengono lavati sospendendoli in H_2O, aggiungendo, ove sia il caso, soluzione 2 M del sale prescelto fino all'isotonia e centrifugando per 20 min. a 24.000 × g a 0° C. I lavaggi sono ripetuti da 3 a 5 volte impiegando in ognuno un volume pari a quello del liquido da cui gli stromi sono inizialmente sedimentati.

L'attività adenilato chinasica del sedimento residuo all'ultimo lavaggio, sospeso in un opportuno volume di acqua, viene confrontata con quella del

« sopranatante ». Prima di esser usati i preparati enzimatici vengono portati ad una concentrazione proteica pari a 0,5 mg/ml con H_2O e cisteina 0,1 M pH 4,5 in modo che la concentrazione finale della cisteina sia 0,01 M.

Azione degli ioni sulla precipitazione delle proteine dell'emolizzato.

I dati della Tabella I sono la media di 5 esperimenti. Le proteine e l'Hb recuperate nei vari « sopranatanti » sono espresse come percentuali della quantità presente nella corrispondente aliquota di « emolizzato ».

Tabella I.

Proteine nell'emolizzato prima e dopo la separazione degli stromi, in assenza o in presenza di ioni.

		Proteine	Hb	
	$\Gamma/2$	% della quantità presente prima della separazione degli stromi		Hb (mg/ml) / Proteine (mg/ml)
Emolizzato (contenente stromi)	0	100	100	0,812
Sopranatante in H_2O (privo di stromi)	0	90,4	86,4	0,775
NaCl 0,154 M	0,154	78,4	72,3	0,769
KCl 0,154 M	0,154	67,7	62,1	0,734
$(NH_4)_2SO_4$ 0,154 N	0,231	64,4	60,3	0,780

La differenza tra proteine dell'« emolizzato » e proteine del « sopranatante » rappresenta la frazione proteica separata dalla soluzione insieme agli stromi. Come si vede il « sopranatante K » ed il « sopranatante NH_4 » contengono assai meno proteine e Hb del « sopranatante H_2O ». Il « sopranatante Na » dà valori intermedi, comunque nettamente maggiori di quelli che si hanno in presenza degli altri ioni. Questi dati indicano che la presenza di ioni favorisce la sedimentazione delle proteine assieme agli stromi; questo effetto sembra dovuto più alla specie degli ioni che alla forza ionica.

Le proteine dell'emolizzato che non si ritrovano nei sopranatanti dovrebbero esser ritrovate assieme agli stromi. Le quantità recuperate sono tuttavia inferiori a quelle prevedibili: questo può esser attribuito al fatto che al fine di non perdere il sedimento spesso molto soffice, dopo ogni centrifugazione l'ultima frazione di sopranatante non viene raccolta, e si disperde nei lavaggi successivi. D'altra parte i lavaggi stessi sono intesi ad allontanare dagli stromi il materiale coprecipitato e, come risulta dalla Tabella II dopo ogni lavaggio il contenuto proteico degli stromi diminuisce.

TABELLA II.

Contenuto proteico ed attività adenilato chinasica degli stromi in assenza o in presenza di ioni.

N° Lavaggi	2				4				5			
	Proteine mg/ml	Hb mg/ml	Hb/Prot.	Attività adenil. chinas.	Proteine mg/ml	Hb mg/ml	Hb/Prot.	Attività adenil. chinas.	Proteine mg/ml	Hb mg/ml	Hb/Prot.	Attiv. adenil. chinas.
Stromi H_2O . .	1,17	1,02	0,876	scarsa	1,078	0,468	0,434	nulla	0,701	0,12	0,171	nulla
» Na . . .	2,98	2,43	0,817	media					0,850	0,14	0,165	nulla
» K	6,87	4	0,600	media	3,63	0,945	0,260	tracce	0,643	tracce		nulla
» NH_4 . . .	6,04	3,90	0,648	media					0,598	tracce		nulla

Nella Tabella II le proteine e l'Hb determinate negli stromi sono espresse come mg per ml di soluzione da cui gli stromi sono stati sedimentati

L'Hb viene allontanata in proporzione assai maggiore di altre proteine: questo può esser seguito dal color del precipitato e del liquido di lavaggio, che passano da rosso a rosa e alla fine sono incolori.

I lavaggi sembrano più efficaci in presenza di K^+ e NH_4^+. Ciò può esser in parte attribuito al fatto che in presenza di questi ioni il precipitato è più compatto ed in conseguenza dopo ogni centrifugazione il sopranatante può essere allontanato con maggior completezza.

Attività adenilato chinasica nelle membrane.

L'attività adenilato chinasica è stata seguita nel corso del lavaggio degli stromi. Si è osservato che essa diminuisce col procedere di esso in modo approssimativamente parallelo all'allontanamento dell'Hb ed è assente negli stromi lavati 5 volte, siano stati essi ottenuti in presenza o in assenza di ioni.

La fotografia di un tipico cromatogramma è riportata nella Tav. I.

Discussione.

Secondo Post e coll. [7] le membrane degli eritrociti hanno indice di rifrazione e densità approssimativamente uguali a quelli di una soluzione al 15 % di Hb, e pertanto sembrano esser « solubili » in essa.

La concentrazione di Hb del liquido che, nelle nostre condizioni sperimentali, si ottiene dall'emolisi delle emazie (« emolizzato ») si aggira proprio intorno al valore sopracitato. Per avere quindi la sedimentazione degli stromi è necessario procedere alla diluzione dell'« emolizzato ». Fatto questo, centrifugando per un tempo e a una velocità opportuni, la separazione degli stromi è sicura, anche in assenza di ioni.

La struttura della membrana non viene alterata dai numerosi lavaggi: questo è stato accertato con osservazioni microscopiche e corrisponde ai dati di altri Autori [7, 14].

La maggior precipitazione di proteine dall'emolizzato, in presenza di ioni, si realizza certamente attraverso più di una via. Si può pensare che venga incrementata l'adesione ai residui delle membrane di proteine del citoplasma dell'emazia altrimenti solubili, e ne sia così provocata la sedimentazione insieme agli stromi. È anche probabile che sia favorita l'agglutinazione degli stromi con formazione di un precipitato più compatto. Quest'ultimo fenomeno potrebbe spiegare perché nei lavaggi, in presenza di ioni, sia più facile allontanare l'Hb coprecipitata.

In particolare queste azioni sembrano proprie di K^+ e NH_4^+. È stato descritto che il KCl isotonico esercita un effetto agglutinante sui mitocondri di fegato [15], ed è altresì noto che la membrana dell'eritrocita ha una particolare « affinità » per il K, tanto che stromi isolati « assorbono » attivamente

K^+ del mezzo esterno [16]. D'altra parte recentemente è stato visto che l'NH_4^+ può sostituire il K^+ nello stimolare l'ATPasi della membrana ed il trasporto attivo di Na^+ [7].

I dati della Tabella II dimostrano che i lavaggi degli stromi allontanano le proteine coprecipitate fino ad arrivare ad un residuo, indipendente dalla presenza di ioni, che probabilmente rappresenta la parte proteica della membrana stessa. L'Hb invece scompare quasi completamente. Questo indica che la maggior parte di essa aderisce semplicemente agli stromi. È discusso infatti se l'Hb sia un costituente della membrana dell'eritrocita: dati recenti [14] renderebbero a dimostrare che una piccola quantità di Hb sia effettivamente presente in essa.

L'adenilato chinasi, analogamente alle altre proteine del citoplasma, precipita parzialmente insieme agli stromi. È pertanto naturale che, ove il sedimento di stromi non venga accuratamente lavato, esso presenti attività adenilato chinasica. È questa con molta probabilità la ragione per cui Kashket e Denstedt [8] hanno riscontrato attività negli stromi. Il procedimento da essi adottato per l'isolamento delle membrane appare infatti tutt'altro che atto a dare buoni risultati.

I nostri risultati mostrano tuttavia che se i lavaggi degli stromi sono sufficienti l'attività scompare, indicando così che l'enzima non è un costituente della membrana dello eritrocita.

Bibliografia.

[1] T. A J. Prankerd, K. I. Altman, « Biochem. J. », *58*, 622 (1954).
[2] T. V. Venkstern, T. V. A. Engelgardt, « Biochimija », Mosca, *22*, 855 (1957).
[3] E. Herbert, « J. Cell. Comp. Physiol. », *47*, 11 (1956).
[4] G. R. Barlett, « Ann. New York Acad. Sci. », *78*, 110 (1958).
[5] J Garzò A. Ulman, F. B. Straub, « Acta Physiol. Acad. Sci. Hung. », *3*, 513 (1952).
[6] E. M. Clarkson, M. J. Maizels, « Physiol. » London, *116*, 112 (1952).
[7] R. L. Post, C. R. Merritt, R. C. Kinsolving, C. D. Albright, « J. Biol. Chem. », *235*, 1796 (1960).
[8] S. Kashket and O. F. Denstedt, « Can. J. Biochem. Physiol. », *36*, 1057 (1958).
[9] P. Cerletti and E. Bucci, « Biochim. Biophys. Acta », *38*, 45 (1960).
[10] J. Goa, « Scand. J. Lab. Clin. Invest. », *5*, 218 (1953).
[11] W. E. Cohn and C. E. Carter, « J. Am. Chem. Soc. », *76*, 4273 (1950).
[12] P. Cerletti, M. L. Aebischer e C. Fronticelli, « Ric. Scient. », *28*, 2052 (1958).
[13] P. Cerletti, P. L. Ipata and N. Siliprandi, « Analyt. Chim. Acta », *16*, 548 (1957).
[14] H. M. Anderson, and J. C. Turner, « Nature », *183*, 112 (1959).
[15] M. Hassan, A. L. Lehninger, « Biol. Chem. », *223*, 123 (1956).
[16] J. F. Hoffman, D. C. Tosteson and R. Whittam, « Nature », *185*, 186 (1960).

Fig. 1. - Azione dell'«emolizzato» e degli stromi sull'ADP. Separazione dei prodotti di reazione per cromatografia discendente in propanolo, H_2O, TCA 100 %, NH_3 (75 : 20 : 5 : 0,5.)
Condizioni sperimentali ved. testo.

1, 2 «emolizzato – H_2O» cromatografia su 0,1 ml.
3, 4 prova di controllo cromatografia su 0,1 ml e 0,05 ml rispettivamente.
5, 6 «stromi – H_2O» cromatografia su 0,1 ml.
7, 8 prova di controllo cromatografia su 0,1 ml e 0,05 ml rispettivamente.

Geologia. — *Nuove osservazioni sulla geologia della regione montuosa posta a nord della Stura di Demonte fra Pietraporzio e Bersezio (Alpi Marittime)* (*). Nota di Bortolo Franceschetti, presentata (**) dal Socio Gb. Dal Piaz.

Nel corso del rilevamento, pressocché terminato, della regione montuosa posta a nord della Stura di Demonte e compresa fra Bersezio, il Passo della Gardetta, il Colle del Mulo e Pontebernardo (1), mi è stato possibile rilevare alcuni nuovi dati di fatto che consentono di migliorare le conoscenze che si hanno sulla regione, sia dal punto di vista stratigrafico sia dal punto di vista tettonico. In particolare mi è stato possibile tentare una interpretazione, più dettagliata di quanto non fosse stato fatto finora, tanto della complessa struttura delle unità a facies subbrianzonese, quanto della tettonica della copertura sedimentaria autoctona del Massiccio dell'Argentera nel tratto compreso fra Preinardo e Pontebernardo.

Come ho accennato in una mia precedente Nota [6], in cui anticipavo alcune osservazioni sulla tettonica del Complesso Brianzonese, è possibile riconoscere, nella regione studiata, la esistenza di diverse unità strutturali che si possono raggruppare in tre complessi tettonicamente e stratigraficamente ben distinti. Elencandoli in ordine di sovrapposizione e adottando la terminologia tradizionale si distinguono così (vedi Tav. I, fig. 1):

un Complesso Autoctono (Complesso I di R. Malaroda), costituito dalla copertura sedimentaria autoctona dell'Argentera;

un Complesso Subbrianzonese (Complesso II di R. Malaroda), rappresentato dalle unità a facies subbrianzonese, tettonicamente sovrapposto al precedente;

un Complesso Brianzonese (Complesso III di R. Malaroda), comprendente le unità a facies brianzonese sovrascorse sul complesso precedente.

Complesso autoctono. – Fra la stretta delle Barricate e Pontebernardo, nella serie autoctona, si possono distinguere i seguenti termini:

7° *Eocene superiore od Oligocene*: formazione delle arenarie d'Annot costituita da alternanze di livelli arenacei, che raggiungono e superano il

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Geologia dell'Università di Torino con il contributo finanziario del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(**) Nella seduta del 7 giugno 1960.

(1) I riferimenti topografici che si trovano nel testo e nelle illustrazioni sono compresi nelle tavolette topografiche III SW (Bersezio) e III SE (Monte Nebiús) alla scala 1 : 25.000, del foglio 79 (Dronero) della Carta d'Italia alla scala 1 : 100.000.

decimetro di spessore, e di livelli argilloso–ardesiaci molto scuri alquanto più sottili. Verso l'alto i termini argillosi diventano sempre più sottili, mentre i livelli arenacei aumentano di spessore e di grana tanto da apparire a luoghi conglomeràtici. La potenza di questa formazione è variabile; al Colle Vallonetto essa è di circa 600 metri.

6° *Eocene*: calcari arenacei scistosi scuri e calcari arenacei compatti a frattura scagliosa, ricchi di Nummuliti, Coralli e Gasteropodi. La loro potenza media è di circa una ventina di metri.

5° *Cretaceo*: calcari compatti, arenacei, con livelli a selci e con livelli a fossili silicizzati in cui si riconosce qualche sezione di Gasteropode ad anfratti rigonfi e spira poco allungata. Il tutto è ben stratificato in grossi banchi e presenta verso il basso delle intercalazioni di tipo ardesiaco che, dapprima piuttosto diffuse, diventano via via subordinate fino a mancare. La potenza di questa formazione è di circa 400 metri. Sono stati riferiti al Cretaceo anche i livelli calcareo–scistosi a *Microcodium*, che stanno subito sotto all'Eocene, la cui potenza è piuttosto variabile.

4° *Giurese*: calcari scuri ben stratificati, prevalentemente ardesiaci, a grana fine, con subordinate intercalazioni più compatte; sotto a questi compaiono dei calcari grigio–scuri e grigio–nocciola ardesiaci, ricchi di vene di calcite. La potenza complessiva del Giurese sul versante destro del Rio Conforent è di circa 150 metri. Questo dato ha un valore puramente indicativo poiché la potenza dei suddetti terreni va riducendosi da est verso ovest per laminazione tettonica, tanto che ad ovest di Murenz si deve ritenere che il Cretaceo sia direttamente sovrapposto al Cristallino o che, al massimo, fra Cretaceo e Cristallino sia presente una sottile fascia di dolomia cariata.

3° *Werfeniano superiore*: dolomie cariate e calcari a cellette per una potenza di un centinaio di metri.

2° *Werfeniano inferiore*: quarziti arenacee verdastre, grigie e bianche, limitate ad un affioramento che si osserva nell'alveo della Stura di Demonte subito a monte di Pontebernardo.

1° *Cristallino dell'Argentera*.

Già A. Faure–Muret [3] aveva messo in evidenza come la distinzione fatta da S. Franchi fra i vari termini della serie autoctona risultasse superata in alcuni suoi limiti; in particolare essa poneva in risalto che, nella zona di Murenz, dovevano considerarsi cretacei gran parte di quei terreni che il Franchi aveva attribuiti al *Giura–Lias* indicandoli sulla carta geologica alla scala 1 : 100.000 [18] con il simbolo *Gl*. Di conseguenza, in corrispondenza alla stretta delle Barricate, i terreni affioranti su entrambi i lati della Stura sarebbero stati da attribuire al Cretaceo.

A conferma di questa rettifica, che è confortata anche da altri elementi, mi è stato possibile riconoscere, nelle sezioni sottili di calcari raccolti sul versante sinistro del Rio Conforent e attribuiti da S. Franchi al *Giura–Lias*, delle Globotruncane con guscio silicizzato. Il limite inferiore del Cretaceo

risulta così abbassato di almeno 150 metri, e i terreni che si possono riferire al Giurese vengono più o meno ridotti a quei termini che, nella Carta Geologica alla scala 1 : 100.000 (foglio Dronero–Argentera), sono attribuiti al Lias ed indicati con il simbolo L^1.

Non segnalata prima d'ora risulta invece la presenza, nella zolla di Autoctono che affiora sulla destra del Rio di Servagno alla confluenza di questo con la Stura, dell'Eocene fossilifero con caratteristiche analoghe a quelle dell'Eocene affiorante di fronte a Bersezio (ponte sulla strada per Ferriere), dove R. Malaroda ha individuato una nuova località fossilifera [15], e sulla sommità della gola delle Barricate (presenza di Coralli, ricchezza di Nummuliti, facies di calcare scuro a frattura scagliosa).

Nei riguardi della tettonica di questo complesso, già nella mia precedente Nota osservavo che tutta una serie di faglie, con andamento N–S o NE–SW e subverticali, tendeva a porre in risalto una struttura a zolle trasversali rispetto alle direttrici tettoniche prevalenti con spostamento della serie, per settori, verso S e SW e con rigetti talora ben evidenti. A queste osservazioni deve ora aggiungersi la evidenza di una deviazione verso ovest nella direzione della serie autoctona per cui gli strati, che sul fianco sinistro del Rio Conforent sono diretti circa N 70° W–S 70° E, a monte della stretta delle Barricate presentano direzioni comprese fra E–ENE e W–WSW, per riprendere la direzione WNW–ESE nei pressi di Bersezio. Mi sembra pertanto che si possa ammettere che la struttura dell'Autoctono, fra il Rio di Servagno ed il Rio Conforent sia, almeno in parte, conseguente a spinte, probabilmente collegabili con la fase di messa in posto delle unità brianzonesi e subbrianzonesi, che in questo punto realizzavano delle componenti dirette verso S e SE.

Complesso subbrianzonese. – Lo studio stratigrafico e la interpretazione della struttura del gruppo M. Giordano–M. Bodoira si presentarono subito come problemi più razionalmente risolubili inquadrandoli in uno studio della stratigrafia e della tettonica dell'intera area in cui affiorano i terreni subbrianzonesi, ossia estendendo le ricerche fin oltre la dorsale M. Nebiús–M. Omo. L'esame di questo complesso venne pertanto iniziato contemporaneamente: dall'autore per la zona del gruppo M. Giordano–M. Bodoira, da F. Carraro [2] per l'area compresa fra il M. Bodoira e la dorsale M. Nebiús–M. Omo e da L. Ezechieli [3] per la parte ad est di questa dorsale. Il sistematico confronto dei dati rilevati, ed alcune escursioni collegiali eseguite nei punti più interessanti, hanno permesso così di poter presentare una interpretazione della tettonica di questo complesso e di definirne una serie stratigrafica sufficientemente attendibile.

Nonostante lo studio dei dati raccolti non sia ancora completato mi è possibile, per la zona da me rilevata, anticipare alcune conclusioni.

(2) Tesi di laurea in corso presso l'Università di Padova.
(3) Tesi di laurea in corso presso l'Università di Padova.

Riguardo alla stratigrafia i più importanti fatti nuovi osservati sono i seguenti:

a) *Zona di Servagno.* – Già in precedenza [6] avevo accennato alla esistenza a monte di Servagno, fra il Trias brianzonese e le arenarie d'Annot autoctone, di una scaglia di calcari scistosi o fogliettati a cui sono associati superiormente dei livelli arenacei e conglomeratici a Nummuliti, che attribuivo al Cretaceo–Eocene e che riferivo al Complesso Subbrianzonese sulla base delle considerazioni di M. Gidon [11]. La loro appartenenza a questo complesso risulta ora confermata sia dalla stretta analogia di facies esistente fra i calcari fogliettati con gli associati conglomerati eocenici di Servagno ed i *marbres en plaquettes* con i relativi conglomerati eocenici della Cima Piconiera, sia dalla presenza di *marbres en plaquettes* e di conglomerati pure sul versante sinistro del Rio di Servagno, e sempre alla base della serie subbrianzonese del M. Giordano–M. Bodoira. Calcari fogliettati con facies di *marbres en plaquettes* sono ancora ben evidenti, sempre alla base della serie del M. Bodoira, anche al Colle Vallonetto.

b) *Zona M. Giordano–M. Bodoira.* – Sia lungo il crinale che dal Colle della Montagnetta porta al M. Giordano, sia lungo quello che dal Colle Vallonetto porta al M. Bodoira è possibile seguire con continuità la successione dei terreni subbrianzonesi. La possibilità di rilevare questa serie con notevole dettaglio ha permesso di riconoscere che sul versante meridionale del M. Bodoira e del M. Giordano non si ha una serie continua di terreni giuresi, ma si è in presenza di una ripetizione di termini in cui le facies più caratteristiche (*Flysch* arenaceo–marnoso, calcari dolomitici grigi e grigio–rosei a grana molto fine e in grossi banchi, calcari grigi ben stratificati con liste di selce) permettono di riconoscere la presenza di almeno tre ripetizioni parziali della serie, conseguenti alle esistenza di un regime isoclinale le cui caratteristiche verranno illustrate più avanti (vedi Tav. I, fig. 2).

c) *Zona di contatto fra Complesso Autoctono e Complesso Subbrianzonese.* – Fra i terreni sicuramente appartenenti al Complesso Subbrianzonese e le arenarie d'Annot autoctone con facies caratteristica, limitatamente al tratto compreso fra Servagno ed il Colle Vallonetto, esistono dei materiali a facies di *Flysch* arenaceo–marnoso in cui le intercalazioni arenacee sono subordinate, e sempre rappresentate da arenarie a grana fine e normalmente in liste dello spessore massimo di una decina di centimetri. Essi stanno direttamente sulle arenarie d'Annot e sono, almeno apparentemente, in concordanza di giacitura con esse. Tenendo in considerazione che la formazione delle arenarie d'Annot non presenta mai, nelle zone circostanti, dei termini superiori che riducano improvvisamente la loro percentuale arenacea a vantaggio della frazione argillosa, ma che invece i termini sommitali tendono ad accentuare il loro carattere arenaceo diventando talora quasi conglomeratici, ho preferito, per analogia di facies, attribuire questi terreni al Complesso Subbrianzonese e riferirli al *Flysch* arenaceo–marnoso.

Dal punto di vista tettonico in questo complesso è stato possibile distinguere, elencandoli in ordine di sovrapposizione, i seguenti elementi: Elemento

Rocce Forni–M. Salè–M. Omo; Elemento Cima Piconiera; Elemento M. Bodoira–M. Ruissas; Elemento M. Giordano [4].

L'Elemento M. Bodoira–M. Ruissas costituisce l'ossatura del Complesso Subbrianzonese fra il Vallone di Servagno ed il Rio Bandia e ad esso sono stati riferiti il M. Bodoira e gran parte del M. Giordano. In questa zona la sua struttura è rappresentata da un regime isoclinale conseguente alla esistenza di una serie di pieghe passanti a pieghe–faglie, a piano assiale molto inclinato ed immerso verso NW, il cui fianco inverso risulta talora quasi completamente soppresso per laminazione tettonica e delle quali, sul versante settentrionale del M. Bodoira, si osservano ancora evidenti tracce delle cerniere anticlinali.

Sulla sommità del M. Giordano si osserva una serie giurese–cretacea (?), in parte analoga a quella del M. Bodoira, ripetutamente ripiegata, spesso con cerniere molto acute e con gli assi delle pieghe immersi decisamente verso NW, che riposa in netta discordanza angolare sull'Elemento M. Bodoira–M. Ruissas. È questo l'elemento M. Giordano in cui, a quota 2750 circa sulla dorsale che sale dal Colle della Montagnetta, ho rinvenuto sopra a calcari scuri con liste di selce dei calcari ad *Aptycus*.

Pure ad un elemento tettonico diverso da quello M. Bodoira–M. Ruissas e ad esso sottostante ritengo doversi attribuire il Cretaceo–Eocene di Servagno con le sue caratteristiche facies di *marbres en plaquettes* ed i suoi conglomerati nummulitici. Esso è stato infatti da me riferito, sopratutto per analogia di facies, ma anche per analogia di posizione, all'Elemento Cima Piconiera (ben evidente sulla dorsale Cima Piconiera–Colle Piconiera) in cui è compresa pure la « scaglia della Piconiera » di Y. Gubler [13]. Tettonicamente il Cretaceo–Eocene di Servagno sarebbe quindi una scaglia di questo elemento, pizzicata fra l'Autoctono e l'Elemento M. Bodoira–M. Ruissas, che scompare per laminazione tettonica poco ad ovest di Servagno sotto al Complesso Brianzonese. Questa nuova interpretazione del Cretaceo–Eocene di Servagno porta pertanto alla necessità di modificare parzialmente la rappresentazione di esso da me data in precedenza [6].

Un altro dato che ho potuto raccogliere durante lo studio del Complesso Subbrianzonese è stato la sicura evidenza che le faglie trasversali del Rio di Servagno e del Rio Conforent non interessano solamente la serie autoctona, ma si continuano anche nel Subbrianzonese assai più decisamente di quanto non lasci intendere la Carta Geologica d'Italia alla scala 1 : 100.000. Questo fatto proverebbe che lungo queste faglie avvenne certamente uno spostamento dopo che i terreni subbrianzonesi erano sovrascorsi su quelli dell'Autoctono. Considerazioni morfologiche, inoltre, sembrano permettere di affermare che lungo la faglia del Rio Conforent, e forse lungo la faglia che taglia la serie autoctona all'imbocco est delle Barricate, si sia avuta una

(4) Per l'attribuzione del M. Ruissas all'Elemento M. Bodoira, e per l'esatta definizione degli Elementi Cima Piconiera e Rocce Forni–M. Salè–M. Omo, sono stati determinanti i dati raccolti da F. Carraro e da L. Ezechieli nelle dorsali della Cima Piconiera e di M. Omo–M. Nebiús.

ripresa di movimento abbastanza notevole in tempi quaternari relativamente recenti.

Pure nel Complesso Subbrianzonese tende poi a notarsi una immersione verso NW degli assi tettonici, come già osservato per il Complesso Brianzonese [6]. D. Schneegans [17] i cui profili, anche se schematici, furono di notevole utilità per la comprensione della struttura di questo complesso, vedeva in esso la « zona delle radici apparenti delle falde inferiori dell'Ubaye–Embrunais ».

Complesso brianzonese e terreni permo–carboniferi della zona assiale ad esso associati. – Il rilevamento della fascia silicea del Passo della Gardetta, e lo studio dei rapporti di questa fascia con il Trias della Falda del Sautron, hanno permesso di documentare la esistenza di una serie di terreni permo–eotriassici che continua stratigraficamente il Trias di Rocca la Meja e che quindi devono essere attribuiti alla zona di radice della Falda del Sautron. Una fascia più meridionale di quarziti e di scisti permiani, che termina a ridosso del Trias calcareo della Falda di Rocca Peroni per mezzo di un contatto tettonico netto, deve essere invece considerata come la zona di radice della Falda del Rouchouze, che scompare definitivamente nella zona del Colle Margherina.

Il rilevamento del Permo–Eotrias quarzitico–conglomeratico di questa zona ha posto in evidenza la esistenza di una inesattezza nel foglio Dronero–Argentera della Carta Geologica d'Italia alla scala 1 : 100.000 relativamente alla datazione di questa formazione.

Si osserva sul terreno, dove le condizioni di giacitura sono tali da far pensare che, a meno di limitati scorrimenti paralleli alla stratificazione che non ne hanno intaccata la continuità, la successione dei vari termini della serie sia continua che, fra gli scisti sericitici rosso–vinosi e verdastri (talora porfiroidi) permiani e i calcari dolomitici, inferiormente con livelli ad impronte, del Trias medio (Anisico), esiste sempre una potente formazione quarzitico–conglomeratica. Sugli scisti sericitici permiani si trovano dapprima conglomerati quarzitici ricchi di ciottoli colorati e talore laminati, che passano via via a quarziti conglomeratiche con grossi ciottoli di quarzo e scarsi frammenti colorati, e quindi quarziti arenacee, lastroidi, verso l'alto verdastre e talora con facies più decisamente arenacea, sopra alle quali si trovano lenti o fascie di dolomia cariata o di calcare a cellette.

Volendo riconoscere in questa serie un limite di separazione fra Trias e Permiano, anche se per il carattere stesso del deposito esso non ha che un significato più o meno convenzionale, si devono attribuire le quarziti arenacee al Trias inferiore (Werfeniano) e i conglomerati quarzitici al Permiano.

Nella zona studiata è stato osservato invece che sono indicati con il simbolo *Pan* ed *attribuiti al Permiano* dei terreni definiti come « quarziti ed anageniti con scisti quarzitici ed anagenitici, sovente feldspatici, inserite in lenti più o meno grandi negli scisti sericitici verdi o rosso–violacei permiani » [18], che in realtà, come si può notare in varie località (zona

del Colle del Mulo e del Colle del Preit, Vallone dell'Unerzio e zona di Acceglio), risultano essere semplicemente le *quarziti arenacee ed i conglomerati quarzitici accennati ed attribuiti rispettivamente al Trias inferiore (Werfeniano) ed al Permiano*. Questi ultimi poi, dove il contatto non è di natura, tettonica e dove la serie non risulta rovesciata, sono sempre sovrapposti e non intercalati agli scisti sericitici verdi e rossi del Permiano.

Non esistono quindi, come appare dalla leggenda del foglio Dronero–Argentera della Carta Geologica d'Italia alla scala 1 : 100.000, due serie quarzitico–conglomeratiche attribuibili una al Trias inferiore ed una al Permiano, ma una sola serie in cui i termini superiori quarzitico–arenacei possono essere attribuiti al Werfeniano ed i termini inferiori quarzitico–conglomeratici devono essere riferiti al Permiano.

BIBLIOGRAFIA.

[1] DAL PIAZ Gb., *La discordanza ercinica nella zona pennidica e le sue conseguenze nei riguardi della storia geologica delle Alpi*, « Boll. Soc. Geol. It. », *58*, 105–152, 1 f.n.t. (1939).

[2] FALLOT P. & FAURE–MURET A., *Sur l'extension du décollement de la série de couverture subalpine*, « Compt. Rend. Ac. Sc. », *228*, 616–619 (1949).

[3] FAURE–MURET A., *Etudes géologiques sur le massif de l'Argentera–Mercantour et ses enveloppes sédimentaires*, « Mém. Carte Géol. France », 336 pp., 19 tt., 1 carta (1955).

[4] FAURE–MURET A. & FALLOT P., *La formation à Microcodium au pourtour de l'Argentera–Mercantour*, « Bull. Soc. Géol. France », ser. 6, *4*, 111–138, 10 ff. n. t. (1954).

[5] FAURE–MURET A. &SUTER G., *Sur la tectonique du revers italien de l'Argentera–Mercantour*, « Compt. Rend. Ac. Sc. », *228*, 406–408 (1949).

[6] FRANCESCHETTI B., *Osservazioni sulla tettonica della regione del Monte Oserot (fianco sinistro della Valle Stura di Demonte fra Pontebernardo e Bersezio, Alpi Marittime)*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. 8, *26*, 533–541,2 tt. n. t. (1959).

[7] FRANCHI S., *Relazione sui principali risultati del rilevamento geologico nelle Alpi Marittime eseguito nelle campagne 1891–92–93*, « Boll. R. Comit. Geol. It. », *25*, 231–258 (1894).

[8] FRANCHI S., *Sull'età mesozoica della zona delle pietre verdi nelle Alpi Occidentali*, « Boll. R. Comit. Geol. It. », *29*, 173–247 e 325–482, tt. 5–9, 32 ff. n. t. (1898).

[9] FRANCHI S., *Ancora sulla età mesozoica della zona delle pietre verdi nelle Alpi Occidentali*, « Boll. R. Comit. Geol. It. », *35*, 125–179, tt. 2 e 3, 3 ff. n. t. (1904).

[10] GIDON M., *Schéma structural de la zone briançonnaise en haute Ubaye et en haute Maira*. « Trav. Lab. Géol. Univ. Grenoble », *33*, 75–78, 3 ff., 1956 (1957).

[11] GIDON M., *Nouvelles observations sur la zone briançonnaise au delà de la frontière franco–italienne (Bassin de la haute Maira, province de Cuneo)*, « Trav. Lab. Géol. Univ. Grenoble », *34*, 153–167, 4 ff. n. t. (1958).

[12] GIDON M., *La zone briançonnaise en haute Ubaye, haute Maira et haute Stura*, Tesi, Università di Grenoble (manoscritto inedito) (1958).

[13] GUBLER Y., *L'Eocène subbriançonnais à NE du Massif de l'Argentera*, « Compt. Rend. Somm. Soc. Géol. France », 82–86 (1955).

[14] GUBLER Y., SIGAL J., ROSSET J. & KERKOVE C., *Sur la présence du Maestrichtien dans le Flysch briançonnais*, « Compt. Rend. Somm. Soc. Géol. France », 341–344 (1958).

[15] MALARODA R., *L'Istituto di Geologia dell'Università di Torino. Attività svolta durante l'anno 1955*, «La Ricerca Scientifica», *26*, 2439–2447 (1956).

[16] MALARODA R., *Studi geologici sulla dorsale montuosa compresa tra le basse Valli della Stura di Demonte e del Gesso* (*Alpi Marittime*), «Mem. Ist. Geol. Min. Univ. Padova», *20*, 127 pp., 12 ff. n. t., 13 tt., 1 carta geol. alla scala 1 : 25.000 (1957).

[17] SCHNEEGANS D., *La géologie des nappes de l'Ubaye–Embrunais entre la Durance et l'Ubaye* «Mém. Carte Géol. France», 339 pp., 10 tt., 46 ff. n. t., carta e profili alla scala 1 : 20.000 (1938).

[18] *Carta Geologica d'Italia* alla scala 1 : 100.000. *Foglio 78–79*: *Dronero–Argentera* (rilevamenti di S. FRANCHI). R. Ufficio Geologico (1930).

Fig. 1. – Il versante sinistro della Valle Stura di Demonte visto dal Becco Rosso.

C. B. (*Ro*): Complesso Brianzonese, Falda del Roucheuze. *C. B.* (*Rp*): Complesso Brianzonese, Falda di Rocca Peroni. *C. S.*: Complesso Subbrianzonese. (*a*: calcoli e gessi. *C. A.*: Complesso Autoctono. *a*: Faglia del Rio di Servagno. *b*: Faglia delle Barricate. *c*: Faglia del Rio Conforent. (1) Bersezio (m 1624); (2) M. Oronaye (m 3105); (3) M. Oserot (m 2781); (4) Colle di Servagno (m 2588); (5) M. Giordano (m 2766); (6) Colle Valloncetto (m 2530).

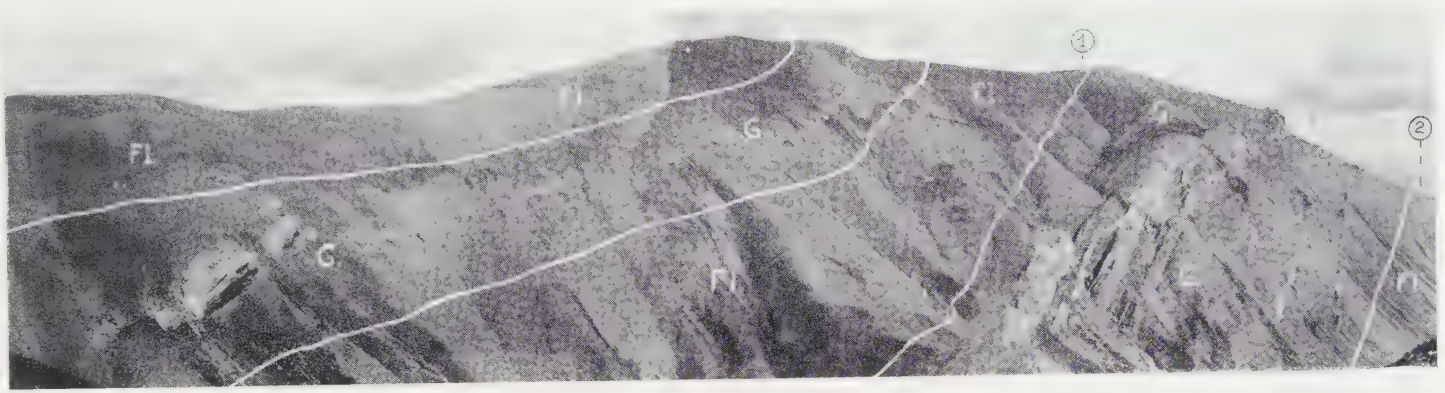


Fig. 2. – Le pendici meridionali del M. Bodoira viste dal M. Giordano.

Fl.: Flysch arenaceo marnoso. *G.*: Giurese medio e superiore; probabilmente i termini superiori comprendono anche livelli cretacei.

Mineralogia. — *Ricerche cristallografiche e termodifferenziali sul seleniato e sul cromato di sodio decaidrati* (*). Nota (**) di ANDREA ALIETTI, presentata dal Corrisp. P. GALLITELLI.

Il seleniato ed il cromato di sodio decaidrati presentano analogie chimiche e cristallografiche con il corrispondente solfato, ed è pure noto l'isomorfismo fra questo ultimo ed il cromato (Cadbury, Melbrum, Lucasse, 1941). Dato che recentemente mi sono occupato della mirabilite e del solfato di sodio 10 H_2O (A. Alietti, 1959), ho creduto opportuno continuare le ricerche anche sui suddetti composti tanto più che del seleniato si conoscono solamente i dati cristallografici del Topsøe (1870) e del cromato sono note, oltre ai dati cristallografici del Brooke, alcune proprietà ottiche determinate da Wyrouboff e riportate da Groth (1908).

SELENIATO DI SODIO DECAIDRATO.

I cristalli di Na_2SeO_4 10 H_2O sono stati da me preparati per ricristallizzazione del seleniato di sodio decaidrato del commercio. L'analisi chimica, eseguita su questi cristalli ha fornito i dati sotto riportati (colonna *a*); la composizione chimica teorica dedotta dalla formula Na_2SeO_4 10 H_2O porta ai risultati raccolti nella colonna *b*:

	a	*b*
Na_2O	16,62	16,80
SeO_3	34,00	34,40
H_2O	49,32	48,80

I cristalli di seleniato di sodio decaidrato sono incolori e trasparenti, ma appena vengono prelevati dalla soluzione madre si ricoprono di una polvere bianca, costituita da minutissimi cristalli di seleniato anidro, che va estendendosi dapprima in superficie e poi in profondità nei cristalli. È quindi necessario maneggiarli – il più possibile – al di fuori del contatto dell'aria. Come il solfato di sodio decaidrato anche il seleniato si trasforma, a temperatura ambiente, nel composto anidro (vedi p. 99).

I cristalli di seleniato sodico 10 H_2O, monoclini prismatici, sono stati misurati al goniometro ed i dati ottenuti, sotto riportati (*a*), sono in buon accordo con quelli del Topsøe (*b*):

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia della Università di Modena con i mezzi messi a disposizione dal C.N.R.

(**) Pervenuta all'Accademia il 1° agosto 1960.

	a	*b*
(100) : (011)	78° 48′	78° 32′
(100) : (11$\bar{1}$)	60° 22′	61° 47′
(100) : (001)	72° 20′	71° 58′
(001) : (011)	49° 38′	49° 41′

I cristalli risultano appiattiti secondo (100) ed allungati secondo *c*.

Ho eseguito alcune determinazioni al T.U. su cristalli immersi in collanti indurenti a freddo; i dati ottenuti sono riportati nella Tabella I.

TABELLA I.

Na_2SO_4 10 H_2O	Na_2SeO_4 10 H_2O	Na_2CrO_4 10 H_2O
a_o 11,55 Å	11,65 Å	11,60 Å
b_o 10,38 Å	10,62 Å	10,55 Å
c_o 12,86 Å	13,06 Å	12,99 Å
$a : b : c = 1{,}1127 : 1 : 1{,}2390$	$a : b : c = 1{,}0969 : 1 : 1{,}2298$	$a : b : c = 1{,}0995 : 1 : 1{,}2312$
β 107° 34′ ± 10′	107° 30′ ± 10′	107° 30′ ± 18′
V 1470 Å^3	1541 Å^3	1515 Å^3
N 4	4	4
P. sp. 1,485	1,584	1,483
P. sp.$_x$ 1,447	1,580	1,490
Gruppo spaz. P_{2_1}/c	P_{2_1}/c	P_{2_1}/c
2V — 78°	+ 88°	+ 83° 56′ (*) (rosso)
b α	β	
c : γ 31°		
a : α	12°	

(*) Wyrouboff.

Per ottenere cristalli adatti a ricerche roentgenografiche (spettri Polanyi e Weissenberg) è stato necessario tagliare da individui maggiori piccoli frammenti (con spigoli paralleli agli assi cristallografici) che venivano subito chiusi entro tubetti di vetro di Lindemann al fine di evitarne la trasformazione, anche parziale, durante le esperienze.

TABELLA II.

	Na_2SO_4 10 H_2O			Na_2SeO_4 10 H_2O			Na_2CrO_4 10 H_2O		
h k l	I	Q (mis.)	Q (calc.)	I	Q (mis.)	Q (calc.)	I	Q (mis.)	Q (calc.)
002	10	0,0265	0,0266				10	0,0265	0,0260
200	100	0,0330	0,0329	20	0,0291	0,0324	100	0,0333	0,0326
020				100	0,0355	0,0354			
202				15	0,0395	0,0408	10	0,0426	0,0412
021	100	0,0445	0,0437	15	0,0423	0,0419			
$11\bar{2}$	30	0,0533	0,0523	80	0,0503	0,0514	10	0,0521	0,0520
$12\bar{1}$				20	0,0554	0,0543			
220	60	0,0682	0,0700	15	0,0670	0,0679	10	0,0681	0,0686
$20\bar{2}$	20	0,0776	0,0776	50	0,0744	0,0756	5	0,0765	0,0763
310	20	0,0860	0,0835	40	0,0815	0,0817	5	0,0855	0,0839
131				10	0,0904	0,0900			
023	100	0,0970	0,0970				50	0,0939	0,0946
204	100	0,1054	0,1041	100	0,1001	0,1008	10	0,1021	0,1018
402				80	0,1155	0,1207			
304	100	0,1276	0,1276	30	0,1235	0,1238	10	0,1257	0,1251
400		0,1303	0,1322	30	0,1328	0,1297	5	0,1320	0,1308
	10	0,1587	0,1613						
$22\bar{3}$				5	0,1523	0,1520			
041							15	0,1550	0,1503
404	8	0,1680	0,1666	10	0,1627	0,1629			
042				5	0,1680	0,1677			
420							5	0,1698	0,1667
242				10	0,1814	0,1826			
502	10	0,1842	0,1890						
	5	0,1930							
025	5	0,2053	0,2029	5	0,1910	0,1967			
	5	0,2126							

Segue: TABELLA II.

	Na_2SO_4 10 H_2O			Na_2SeO_4 10 H_2O			Na_2CrO_4 10 H_2O		
h k l	I	Q (mis.)	Q (calc.)	I	Q (mis.)	Q (calc.)	I	Q (mis.)	Q (calc.)
$22\bar{4}$				5	0,2005	0,2059			
504	8	0,2274	0,2268	5	0,2165	0,2188	5	0,2215	0,2205
150	5	0,2356	0,2403	5	0,2265	0,2298	5	0,2366	0,2329
425		0,2500	0,2500						
044	8	0,2585	0,2551	10	0,2417	0,2451			
026	8	0,2741	0,2770	10	0,2652	0,2676	5	0,2682	0,2707
602				10	0,2707	0,2654			
600	20	0,2891	0,2986	5	0,2866	0,2916			
$40\bar{4}$	8	0,3131	0,3121	5	0,3012	0,3022			
061	8	0,3353	0,3420	10	0,3196	0,3258			
062	8	0,3586	0,3607	10	0,3440	0,3452			
027	8	0,3673	0,3673	5	0,3535	0,3514			
046	5	0,3887	0,3906	5	0,3723	0,3741			
	5	0,3996		5	0,3996				
008	10	0,4168	0,4272	5	0,4168	0,4125			
170	5	0,4480	0,4628	10	0,45$\bar{7}$8	0,4427			
065				5	0,4802	0,4809			
	5	0,4932							
800	5	0,5221	0,5328	5	0,5044	0,5191			
806				5	0,5344	0,5423			
080				5	0,5603	0,5679			
029	5	0,5722	0,5827						
$30\bar{8}$				5	0,5935	0,5899			

Sono stati eseguiti spettri Polanyi con camera da mm 57,3 di diametro secondo i tre assi cristallografici, e dalle misure eseguite si sono calcolati i periodi d'identità a_o , b_o , c_o. Secondo i tre assi cristallografici sono stati eseguiti anche spettri Weissenberg equiinclinazione equatore, I e II strato, dai quali si è calcolato l'angolo β ed, in base alle estinzioni, il gruppo spa-

ziale. Le estinzioni sono le stesse di quelle osservate sul solfato sodico decaidrato:

$$0k0 \quad \text{per } k \text{ dispari}$$

$$h0l \quad \text{per } l \text{ dispari}$$

Il gruppo spaziale, anche per questo composto, è:

$$P_{2_1}/c - C^5_{2h}.$$

TABELLA III.

Na_2SeO_4		Na_2SeO_4 valori A.S.T.M.)		Na_2SeO_4		Na_2SeO_4 (valori A.S.T.M.)	
I	Q	I	Q	I	Q	I	Q
100	0,0428	100	0,0430	10	0,4067		
40	0,0639	27	0,0651	20	0,4109		
60	0,0929	33	0,0935	30	0,4250	7	0,4272
40	0,1004	20	0,1014	30	0,4578	7	0,4565
100	0,1193	83	0,1214	30	0,4904	7	0,4890
60	0,1320	50	0,1342	20	0,5328	3	0,5328
8	0,1453			8	0,5536	13	0,5569
40	0,1706	23	0,1722	40	0,5611		
30	0,2470	3	0,2500	20	0,5792	3	0,5827
30	0,2564	3	0,2603	10	0,5890		
50	0,2735	33	0,2741	10	0,6289		
40	0,2878	13	0,2891	10	0,6421		
5	0,3090			5	0,6631		
5	0,3277			5	0,6752		
60	0,3368	33	0,3380	10	0,6887	3	0,6944
5	0,3477			5	0,6968		
5	0,3603			5	0,7231		
20	0,3750					3	0,8116
30	0,3877	7	0,3906				

Lo spettro di polveri del composto Na_2SeO_4 10 H_2O è stato realizzato su polvere ottenuta a temperatura prossima ai 0° per evitare la ricristallizzazione per pressione. I dati dello spettro sono raccolti nella Tabella II; i

valori d osservati e calcolati sono espressi in $1/d^2 = Q$. Nella stessa tabella sono riportati anche i valori di Q del solfato sodico decaidrato calcolati dai valori d del precedente lavoro (Alietti, 1959).

Il composto anidro si ottiene per riscaldamento del seleniato 10 H_2O a temperatura di poco superiore ai 30° e fornisce uno spettro di polveri identico a quello che si ottiene dopo riscaldamento a 650°. I due spettri eseguiti con camera Guinier sul composto riscaldato a 40° e a 650°, sono identici; nella Tabella III sono riportati i dati degli spettri da me ottenuti e per confronto quelli del seleniato anidro (scheda A.S.T.M.) espressi in Q.

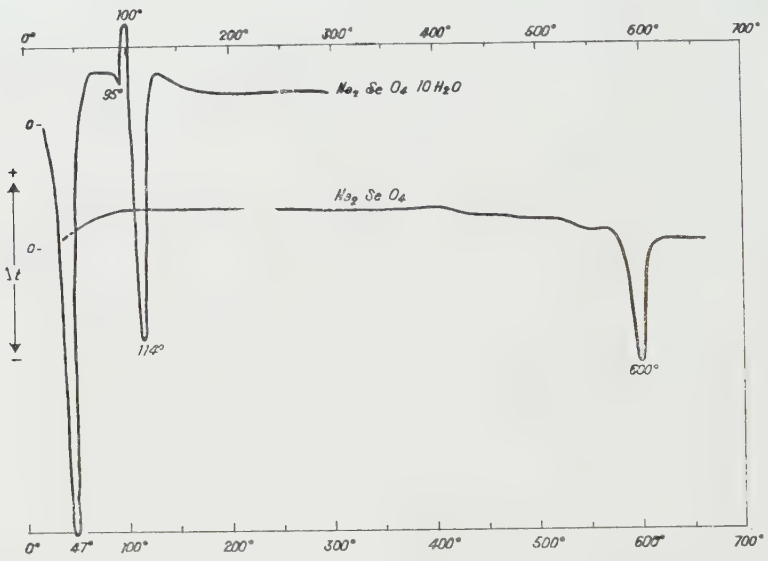


Fig. 1. – Curve di analisi termodifferenziale.

La trasformazione del seleniato 10 H_2O nel composto anidro, secondo i dati riportati dal Pascal (1934), si manifesta a 30°,3 (Smits) o a 31°,8 (Meyer). Il seleniato però, già alla temperatura di 20° ed umidità del 32 %, inizia la sua trasformazione nella forma anidra. La disidratazione procede dall'esterno all'interno del cristallo e le porzioni interne si disidratano con velocità che va progressivamente diminuendo (nei primi tre giorni si è registrata una perdita in peso del 34,26 %) e praticamente solo il riscaldamento a temperatura superiore ai 30° ne provoca la completa disidratazione.

Per effetto del rapido innalzamento della temperatura oltre i 30°, il seleniato di sodio decaidrato si scioglie nella sua acqua di cristallizzazione; quando si superano i 60°, in recipiente aperto, per effetto dell'evaporazione dell'acqua cominciano a separarsi i cristalli di seleniato anidro ed il fenomeno continua, per incremento della temperatura, fino alla completa separazione dei cristalli di seleniato anidro.

Il comportamento del composto al riscaldamento permette l'interpretazione della curva di analisi termodifferenziale (fig. 1) condotta fra 10° e 300°. Il profondo minimo endotermico a 47° è dovuto all'assorbimento del calore di soluzione; il massimo esotermico a 100° è in relazione alla cristallizzazione del seleniato anidro, che avviene repentinamente alla temperatura prossima all'ebollizione dell'acqua; il minimo endotermico a 114°, che inizia a 100°, è provocato dalla perdita della notevole quantità di acqua separata.

La curva di analisi termodifferenziale (fig. 1) condotta sul composto anidro nell'intervallo di temperatura 40°–650° – con pinza termoelettrica differenziale protetta da un cappuccio di vetro infusibile – presenta un solo profondo minimo a 600°.

CROMATO DI SODIO DECAIDRATO.

Il cromato di sodio decaidrato, ottenuto per cristallizzazione da una soluzione acquosa di cromato tetraidrato, si presenta in cristalli giallo–arancione trasparenti, che lasciati all'aria si ricoprono di una polvere giallo–citrino di cromato tetraidrato od esaidrato a seconda che la temperatura è superiore od inferiore ai 26°. Anche per il cromato la trasformazione avviene dapprima in superficie e successivamente si estende in profondità nel cristallo. Sul composto completamente idrato, lasciato all'aria alla temperatura di 20° e umidità del 32 %, si osserva inizialmente una rapida perdita in peso (nei primi otto giorni si è registrata una perdita in peso del 24 %); la velocità di disidratazione va progressivamente diminuendo in modo analogo a quanto indicato per il seleniato. La trasformazione in questo caso avviene secondo il seguente schema riportato dal Pascal (1959):

$$Na_2CrO_4\ 10\ H_2O \xrightarrow{19^\circ} Na_2CrO_4\ 6\ H_2O \xrightarrow{25^\circ,9} Na_2CrO_4\ 4\ H_2O \xleftarrow{62^\circ,8} Na_2CrO_4\ .$$

Con le stesse precauzioni già usate per il seleniato, al fine di evitare la trasformazione del composto durante le esperienze, sono stati eseguiti spettri Polanyi sugli assi cristallografici [010] e [001], nonché Weissenberg equatore, I, II strato [010] ed equatore [001]. I dati relativi alle dimensioni della cella elementare, dedotti dalle misure degli spettri sono raccolti nella Tabella I, nella quale compare anche il valore di β misurato direttamente sul Weissenberg equatore [010]. Sui Weissenberg si osservano le seguenti estinzioni:

$$0k0 \text{ per } k \text{ dispari}$$
$$h0l \text{ per } l \text{ dispari}$$

Il composto appartiene perciò allo stesso gruppo spaziale del solfato e del seleniato sodico decaidrati ($P2_1/c$).

Dai Debye eseguiti sul cromato sodico decaidrato si sono calcolati i valori Q, che sono riportati nella Tabella II.

Pure il cromato ha tendenza a sciogliersi con estrema facilità nella sua acqua di cristallizzazione; a volte la semplice pressione può provocare la dissoluzione del composto e ciò ha reso impossibile le misure goniometriche e le determinazioni ottiche.

La curva di analisi termodifferenziale (fig. 2) presenta il minimo endotermico a 24°, dovuto alla soluzione del cromato nella sua acqua di cristallizzazione, ed il minimo a 120°, dovuto all'allontanamento dell'acqua

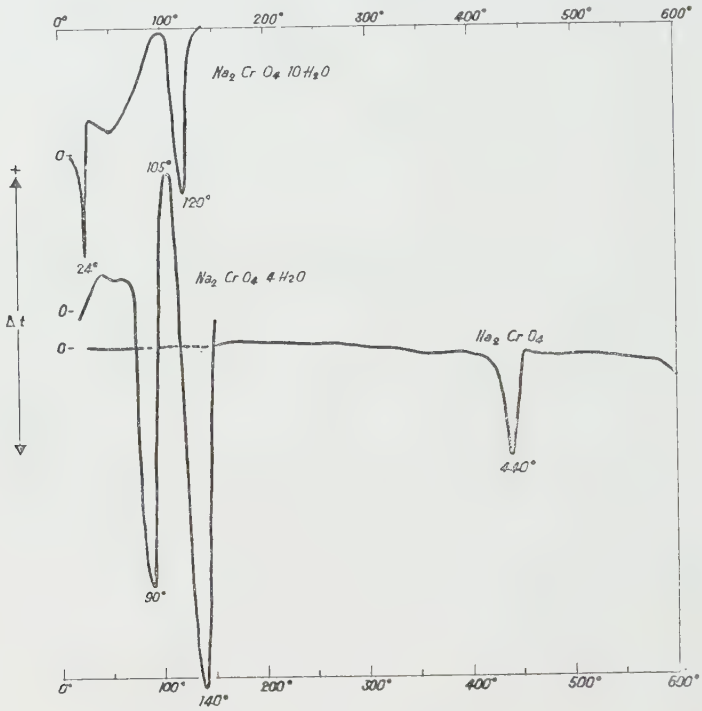


Fig. 2. – Curve di analisi termodifferenziale.

separata. Dato che l'incremento rapido della temperatura non permette la formazione di composti intermedi, con diverso grado di idratazione, cristallizza il solo composto anidro a 100°; ed è quindi logico che la curva sia molto simile a quella del seleniato fino a 150°.

Curve di analisi termodifferenziali sono state condotte sia sul Na_2CrO_4 $4\,H_2O$, ottenuto per cristallizzazione del cromato a temperatura opportuna, sia sul cromato anidro (fig. 2). La prima, condotta fino a 150° presenta un mimimo a 90° che corrisponde alla disidratazione del composto ed un minimo a 140° dovuto alla perdita dell'acqua separata. La curva condotta sul Na_2CrO_4 fino a 600° è caratterizzata da un profondo apice endotermico a 440° dovuto alla trasformazione polimorfa della fase α rombica in quella β esagonale.

BIBLIOGRAFIA.

A. ALIETTI (1959). – *Osservazioni sulla mirabilite di Figno (Scandiano, Reggio E.) e sul solfato di sodio decaidrato,* « Rend. Acc. Naz. Lincei » (Scienze fis., mat. e nat.) serie VIII, XXVI, pp. 689–694.

W. E. CADBURY Jr., W. B. MELBRUM e W. W. LUCASSE (1941). – *Transition Phenomena involving decahydrated mixed crystals of sodium sulfate and sodium chromate,* « J. Am. Chem. Soc. », *63*, pp. 2262–2267.

G. COCCO e V. ROSSETTI (1959). – *La cella elementare della mirabilite,* « Periodico di Min. », XXVIII, pp. 231–232.

P GROTH (1908). – *Chemische Kristallographie.*

P. PASCAL (1934). – *Traité de chimie minérale.*

P. PASCAL (1959). – *Nouveau traité de chimie minérale.*

Biochimica. — *Determinazione del potenziale di ossido riduzione del citocromo h di* Cryptomphalus aspersus (*). Nota (**) di Luisa Tosi e Francesco Ghiretti, presentata dal Socio L. Califano.

Riferiamo in questa Nota la determinazione del potenziale di ossido riduzione del citocromo *h* del quale abbiamo descritto precedentemente il metodo di preparazione e le proprietà fisiche e chimiche [1,2].

Metodo. – Il metodo usato consiste essenzialmente nella determinazione potenziometrica diretta del potenziale di una miscela di sali ferrico e ferroso e della successiva determinazione spettrofotometrica del rapporto fra le concentrazioni di citocromo ossidato e ridotto in presenza della miscela suddetta a potenziale noto.

Reattivi usati: ferro–ammonio solfato ferrico $2{,}5 \times 10^{-2}$ M (molarità rispetto allo ione ferrico); ferro–ammonio solfato ferroso $0{,}5 \times 10^{-2}$ M (moralità rispetto allo ione ferroso). Entrambi i sali sono complessati con ossalato di potassio 0,5 M in tampone fosfati 0,066 M a pH noto. La soluzione di sale ferroso è preparata ogni 2–3 giorni e conservata su amalgama di zinco.

La determinazione potenziometrica è fatta mediante un potenziometro Marconi. La cella potenziometrica contiene un elettrodo a calomelano (calomelano in KCl 0,1 N o saturo), l'estremità di una buretta graduata e un capillare da cui fuoriesce idrogeno che gorgoglia nel liquido in esame. L'idrogeno viene purificato passando successivamente attraverso un catalizzatore Baker Deoxo e una soluzione alcalina di pirogallolo o di solfato cromoso.

Il potenziale normale della miscela dei due sali di ferro, complessati con acido ossalico, a 20° C e a pH 6,5, è risultato equale a + 0,011 volt, in buon accordo con i dati di Michaelis e Friedheim [3]. In base a questo valore si può calcolare in quale rapporto devono essere fra loro le concentrazioni dei sali ferrico e ferroso per ottenere un potenziale non molto lontano da quello del citocromo in esame (+ 0,110 volt).

Procedimento. – Alla soluzione di sale ferrico saturata di idrogeno nella cella potenziometrica, si aggiunge la soluzione di sale ferroso e si determina direttamente il potenziale della miscela. Evitando accuratamente ogni contatto con l'aria, si introduce una certa quantità di essa in due cuvette Beckman appositamente costruite per ricerche in anaerobiosi nel cui braccio

(*) Lavoro eseguito nel Reparto di Fisiologia della Stazione Zoologica di Napoli, con un contributo (RG–4845 C_4) del National Institutes of Health, U. S. Public Health Service.

(**) Pervenuta all'Accademia il 9 luglio 1960.

(1) F. Ghiretti, A. Ghiretti–Magaldi e L. Tosi, « J. Gen. Physiol. », *42*, p. 1185 (1959).

(2) L. Tosi e F. Ghiretti, « Rend. Acc. Naz. Lincei », vol. XXIX, 1960, in corso di stampa.

(3) L. Michaelis e R. Friedheim, « J. Biol. Chem. », *91*, p. 343 (1931).

laterale si pone la soluzione di citocromo in esame o una eguale quantità di acqua. Le cuvette vengono evacuate e riempite di idrogeno. Dopo aver controllata l'uguaglianza di assorbimento dei sali di ferro nelle due cuvette a 410 e 424 mμ (massimi di assorbimento della banda γ del pigmento rispettivamente ossidato e ridotto), si versa rapidamente il citocromo nella soluzione redox (e l'acqua nella cuvetta di controllo) e si segue la variazione della densità ottica alle lunghezze d'onda suddette, da 100 a 900 secondi. Dopo 3–5 minuti i valori rimangono costanti. Alla fine della misura si controlla potenziometricamente il pH delle soluzioni.

Per poter determinare contemporaneamente la concentrazione del citocromo nelle due forme ossidata e ridotta, è necessario conoscere l'assorbimento a due lunghezze d'onda opportunamente scelte λ_1 e λ_2 e i coefficienti molari di estinzione del pigmento ossidato e ridotto a quelle lunghezze d'onda. Per il calcolo del potenziale di ossido riduzione abbiamo usata la formula seguente:

$$\frac{C_{oss}}{C_{rid}} = \frac{D_{\lambda_1}\varepsilon^{rid}_{\lambda_2} - D_{\lambda_2}\varepsilon^{rid}_{\lambda_1}}{D_{\lambda_1}\varepsilon^{oss}_{\lambda_2} - D_{\lambda_2}\varepsilon^{oss}_{\lambda_1}} = \frac{D_{\lambda_1} - D_{\lambda_2}\left(\varepsilon^{rid}_{\lambda_1}/\varepsilon^{rid}_{\lambda_2}\right)}{D_{\lambda_1}\left(\varepsilon^{oss}_{\lambda_2}/\varepsilon^{rid}_{\lambda_2}\right) - D_{\lambda_2}\left(\varepsilon^{oss}_{\lambda_1}/\varepsilon^{rid}_{\lambda_2}\right)}.$$

Non conosciamo i coefficienti molari di estinzione del citocromo ossidato e ridotto a 424 e 410 mμ, ma i loro rapporti che compaiono nella formula possono essere facilmente calcolati essendo eguali ai rapporti delle densità ottiche a quelle lunghezze d'onda. A pH 6,5 abbiamo trovato per essi i seguenti valori:

$$\varepsilon^{rid}_{\lambda_1}/\varepsilon^{rid}_{\lambda_2} = 3{,}10 \quad ; \quad \varepsilon^{oss}_{\lambda_2}/\varepsilon^{rid}_{\lambda_2} = 1{,}92 \quad ; \quad \varepsilon^{oss}_{\lambda_1}/\varepsilon^{rid}_{\lambda_2} = 1{,}10.$$

Conclusioni. – A pH 6,5 il potenziale normale del citocromo *h* di *Cryptomphalus aspersus* è eguale a + 0,126 volt, con una deviazione standard di 0,04. A valori più bassi di pH, fino a 4,8, esso aumenta gradualmente fino a + 0,138 volt.

Botanica. — *Appunti sulla distribuzione geografica dell'*Abies nebrodensis (*Lojac.*) *Mattei*(*). Nota (**) di Gaetano Gramuglio, presentata dal Corrisp. E. Francini Corti.

Tra gli abeti mediterranei *Abies nebrodensis* è il solo ad occupare un ristrettissimo areale e ad essere attualmente rappresentato da pochi esemplari, mentre secondo alcune testimonianze storiche sembra che abbia occupato, in Sicilia, in tempi non tanto remoti, vasti territori.

Il Gussone (1844) parla di boschi estesi sulle montagne della Sicilia del Nord, distrutti dal pascolo e dal fuoco da pochissimo tempo, cioè prima della metà del secolo scorso. Il Lojacono (1904) riprende le notizie date dal Gussone e di nuovo aggiunge una località, Monte Cervi di Polizzi al Vallone dei Pini, che l'autore però teme sia falsa «perché né carte né libri la segnano e perché nessuna cognizione ne hanno mai avuto i pastori, i boscaiuoli, i carbonari e qualsiasi persona che ha battuto quelle montagne».

Tuttavia Mattei (1908) ebbe campioni di *Abies* proprio da un albero vivente a Monte Cervo, presso la Valle dei Pini, nel territorio di Polizzi Generosa.

Ross, studioso della flora siciliana, riferì a Mattfeld che l'abete in Sicilia è rarissimo e i pochi esemplari si trovano in punti difficilmente accessibili e che si spinge anche sulle Madonie. Quest'ultima affermazione fa supporre che il Ross l'abbia trovato anche altrove, fuori del territorio delle Madonie. In seguito Mattfeld fece delle ricerche senza peraltro riuscire a trovarlo.

Altre indicazioni di località ci sono date dal Frei (1938), il quale segnala a Cozzo dei Pini, presso Petralia Sottana, una ventina di esemplari, e da Rikli (1943), che afferma di aver visto nel 1937, nella stessa località, probabilmente gli stessi che aveva visto il Frei: cioè 20 individui circa.

Questo gruppo di abeti però non fu ritrovato da Kostler (1956), il quale condusse in Sicilia una approfondita indagine direttamente nei posti segnalati. Il Kostler segnala invece l'esistenza di 8 individui, di cui 6 viventi nella zona di Monte Cavallo nel territorio di Polizzi Generosa e 2, uno adulto e l'altro giovane, nella Villa del Barone Casale a Polizzi.

L'ultima esplorazione in questa zona delle Madonie è stata effettuata da Messeri, Arena e Gramuglio nel giugno del 1958 e ripetuta dalle prime due nel giugno del 1959.

(*) Fondazione Filippo Parlatore per lo studio della Flora e della Vegetazione Italiana, presso l'Erbario Centrale Italiano dell'Università di Firenze, sotto gli auspici del Consiglio Nazionale delle Ricerche: pubblicazione n. 000. Lavoro eseguito nell'Istituto Botanico della Università di Messina, diretto dal prof. A. Messeri.

(**) Pervenuta all'Accademia il 16 luglio 1960.

Nella villa del Barone Casale a Polizzi sono stati visti i due alberi segnalati da Kostler. Quello adulto (Tav. I, fig. 1) è un albero alto circa 13–14 metri, robusto, sano, con la chioma contratta, tendente alla forma a cupola. Questa caratteristica della chioma a cupola invece che a cuspide, che di solito si riscontra negli individui invecchiati, sarebbe dovuta ad una causa accidentale, caduta di un fulmine, almeno a quanto asserisce il custode della villa (Messeri, 1958).

L'esemplare giovane (Tav. I, fig. 2), protetto da una gabbietta, è alto circa 30 cm. Certamente si tratta della stessa pianta che vide il Kostler, il quale afferma che la piantina era nata per disseminazione naturale nel 1953, ultimo anno di fruttificazione del grande esemplare, prima del 1955, anno in cui si recò in Sicilia.

Secondo Kostler quindi la pianta dovrebbe avere appena 6 anni di età. Degli altri esemplari, visti da Kostler a Monte Cavallo, nel massiccio montagnoso di San Salvatore, l'autore ne descrive uno, il più grande, che trovò in una piccola vallata del versante di questa montagna a 1.300 m. s.l.m. Nelle vicinanze, a circa 200 m. di distanza, egli trovò altri due individui contorti, ma vivaci, ed infine a mezzo chilometro circa e a 1.400 m. di altitudine constatò la presenza di altri tre individui a portamento cespuglioso.

Abbiamo motivo di credere che questi esemplari debbano riferirsi a quelli visti da noi nel Vallone della Madonna degli Angeli e sulle pendici del Monte Scalone, che sovrasta il vallone, in quanto la loro ubicazione corrisponde al territorio da noi esplorato e la descrizione che egli fa dell'esemplare concorda con quello da noi visto. Riteniamo pertanto che l'autore abbia citato erroneamente Monte Cavallo, vicino alla zona da noi visitata.

Crediamo inoltre che la località Cozzo dei Pini, vicino a Petralia Sottana, a pochi chilometri da Polizzi, in cui Frei e Rikli videro un gruppo di 20 abeti, debba identificarsi anch'essa con la nostra località, che è conosciuta anche con il nome di Manca dei Pini. È improbabile che la presenza di altri 20 abeti, oltre una trentina circa da noi visti nel vallone della Madonna degli Angeli e lungo le pendici di Monte Scalone, potesse sfuggire ai forestali, ai quali ci siamo rivolti per questa indagine; gli stessi ai quali probabilmente si sono rivolti Frei e Rikli.

Per quanto riguarda invece le piante della località di Monte Cervi al vallone dei Pini, riportata da Lojacono, come dubbia, e da Mattei, il quale ebbe anche dei campioni, esse potrebbero riferirsi alla località del Monte dei Cervi, situato a nord–ovest di Monte Scalone. È probabile che in questa località da noi non esplorata e forse anche in altre zone delle Madonie viva ancora qualche esemplare isolato di abete.

Un'altra pianta trapiantata dalla Manca dei Pini, dove vive il grosso della popolazione naturale, si trova nel giardino attiguo alla Caserma Forestale alla periferia di Polizzi (Tav. I, fig. 3). Si tratta di una piantina alta circa 50 cm, robusta ed in buono stato, a portamento obliquo come quasi tutti gli esemplari allo stato naturale. Il trasloco della pianta ha avuto luogo

nell'inverno del '58. Al 30 giugno aveva vegetato normalmente e si presentava in buono stato.

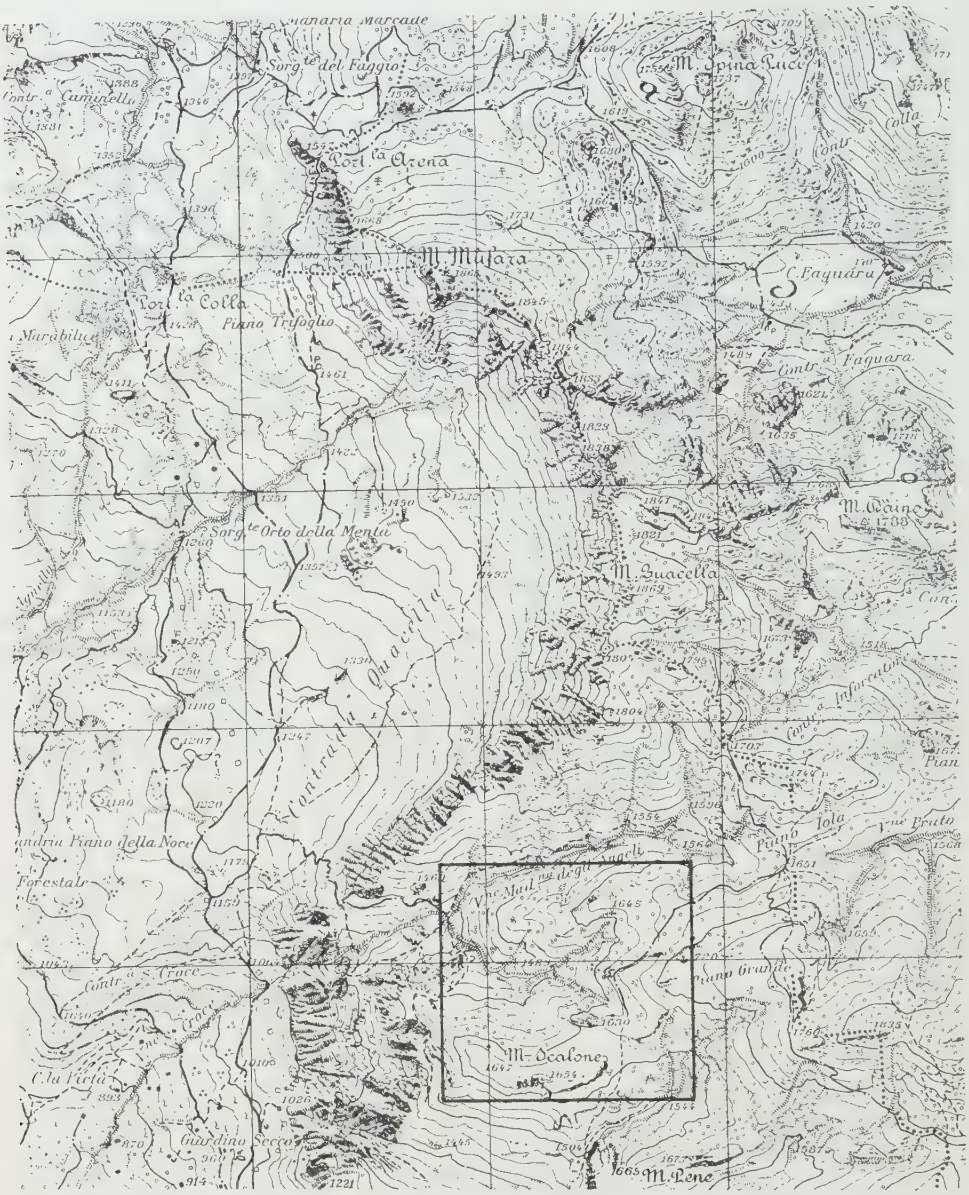


Fig. 1. – Madonie: il quadrato indica l'area di distribuzione dell'*Abies nebrodensis* (Lojac.) Mattei.

L'abete nebrodense allo stato naturale è stato ritrovato a tutt'oggi soltanto nel vallone della Madonna degli Angeli e sulle pendici di Monte Scalone (m. 1,654 s.l.m.) (fig. 1).

Il Vallone della Madonna degli Angeli è situato a pochi chilometri a nord di Polizzi a circa 1.300 metri di altitudine. Per accedervi bisogna scendere da Polizzi in fondo al Vallone Rio Secco e risalire la cresta montuosa che separa questo dal vallone della Madonna degli Angeli, attraverso un canalone assai ripido, sul quale corre una mulattiera, fino ad una portella che immette nel vallone stesso. La portella è denominata « Portella Scalone » dagli abitanti locali, ma tale nome non compare sulla carta geografica (fig. 1); forse esso deriva dal nome del vicino Monte. Questa portella è intagliata in un lungo muraglione roccioso a forma di anfiteatro (Tav. I, fig. 4), che dalla « portella Arena » (m. 1,547) arriva alla « portella Scalone » delimitando una vasta piattaforma, e, che si continua giù per il canalone fino all'inizio della ripida salita.

Il fianco su cui si sale e che guarda Polizzi è estremamente degradato e ricoperto da erbai di *Ampelodesma* e qualche raro albero di leccio; questo si fa più denso in alto dove si arrampica in numerosi esemplari sulle roccie di questa parte di muraglione, costeggiante il fianco della montagna (Tav. I, figg. 5–6).

È notevole il fatto che al di sotto di questo livello, dove il leccio ha lasciato le tracce della primitiva formazione forestale, si veda vegetare il castagno, rappresentato da pochi esemplari, ma sufficiente perché i resti delle due essenze non lascino dubbi sulla stratificazione silvana del luogo, nel quale il castagno è distribuito su un livello altitudinare inferiore rispetto al leccio; quest'ultimo infatti confina direttamente col piano del faggio col quale si compenetra in maniera da non rendere netti i limiti delle due vegetazioni.

La inversione dei piani di vegetazione in questa zona non rimane un fatto isolato, ma si ripete sull'altro versante delle Madonie, dal Piano della Battaglia a Castelbuono, ove si è di fronte ad estese e dense formazioni boschive di leccio e castagno, le quali escludono la possibilità di trovare la causa di queste inversione nello stato di degradazione del bosco, come si potrebbe invece pensare per la zona di Polizzi.

Ciò confermerebbe l'interesse, già espresso in un precedente lavoro (Gramuglio, Arena e Rosso, 1959), di una revisione del piano di vegetazione del leccio in Sicilia, che, descritto come costiero da Frei, sarebbe invece nettamente montano.

Valicata la portella Scalone, ci si trova davanti ad un vallone molto stretto e profondo che rende l'ambiente assai più riparato dal vento e dal sole e favorevole ad una più ricca vegetazione. Si percorre in quota una mulattiera che si insinua nel vallone (Tav. II, fig. 7), correndo verso la sua testata, sul fianco nord della valle, attraverso un ceduo di faggio e leccio misto, dove gli elementi dell'una e dell'altra specie si mescolano, con prevalenza del faggio.

Gli esemplari sono contorti e con i rami nocchieruti. I lecci poi hanno un curioso portamento delle foglie, che crescono erette sui rami ed a portamento isolaterale, dando alle piante un aspetto del tutto particolare.

Si notano anche esemplari di *Fraxinus Ornus*, *Crataegus Oxyacantha*, che formano lo strato arbustivo; aderenti al terreno si alternano *Astragalus siculus* var. *nebrodensis* ed *Juniperus communis* var. *haemisphaericus*, ambedue in bellissime forme pulvinari.

Il mantello verde quasi continuo di questa valle contrasta fortemente con la nudità quasi completa del fianco opposto, esposto a sud, dove pochi alberi di faggio a portamento cespuglioso si alternano a larghi tratti di terreno nudo e dirupato, rovinante in ghiaioni. Dove la valle volta bruscamente, diramandosi in due, in maniera da formare una specie di testata, si trovano i primi abeti. Sono tre, di cui uno, il migliore fra tutti è il primo che si vede arrivando nella zona, a circa 1.300 m. di altitudine.

È alto circa 4 m., diritto, robusto, l'età si aggira sui 40–45 anni. I forestali hanno avuto la cura di proteggerlo dal pascolo, molto intenso in queste zone, costruendogli un terrapieno sorretto da un muro (Tav. II, fig. 8). Queste cure hanno ottenuto ottimi risultati: i suoi accrescimenti in altezza sono divenuti più cospicui da 4–5 anni e cioè da quando l'esemplare è stato protetto. Gli ultimi palchi di rami, come mostra la fotografia, sono infatti distanziati l'uno dall'altro di circa 35 cm., mentre i più bassi sono ravvicinatissimi, denotando un accrescimento addirittura trascurabile. La vegetazione intorno sembra aver anch'essa beneficiato della costruzione del terrapieno, che certamente funziona come una ampia cisterna nella quale si conserva durante l'estate l'umidità necessaria a far prosperare tutte le piante presenti, che ombreggiano un poco l'abete.

L'insieme di questi fattori devono essere stati decisivi a far raggiungere a questo esemplare la fase sessuale. Nel giugno del 1959 infatti abbiamo avuto la bella sorpresa di vedere ergersi sui suoi palchi superiori di rami una ventina di coni.

Risalendo lungo le pendici di Monte Scalone, sovrastante il Vallone, notiamo altre piante di abete, una trentina in tutto. Gli esemplari più a valle sono più annosi o almeno più sviluppati. Sono quasi tutti fortemente contorti e tutti sterili. La deformazione che mostrano è una forte obliquità in direzione del fondo della valle, coi rami amputati o pochissimo sviluppati a monte. Siccome il pendio è assai ripido ciò può essere causato dalla pressione della neve durante l'inverno da monte a valle, dal vento o dalla intensità della luce.

Anche qui tutti gli esemplari sono recinti ed hanno un abbondante terrapieno a valle, che assicura loro una larga disponibilità di terreno.

Uno di questi alberi distorti mostra tre palchi di rami terminali diritti e distanziati di parecchi centimetri (Tav. II, figg. 9–10). Anche per questo esemplare il fattore che può essere stato decisivo per il suo recupero di accrescimento sembra che sia l'acqua, che il terrapieno assicura alle radici dell'abero.

È notevole il fatto che salendo a quote più alte, fino ai 1.700 m. circa, gli esemplari che si trovano diventino di dimensioni minuscole (Tav. II, figg. 11–12). Si tratta di piantine di neanche 50 cm. di altezza, fortemente lignificate e

col fusto tozzo, nudo alla base per un tratto proporzionato alla loro altezza. Si ripete cioè anche su questi esemplari più bassi quel carattere che è evidente nella pianta adulta e che fu notato da Mattei; *trunco basi nudo* (Messeri, 1958).

Esso denota che i semenzali perdono precocissimamente i loro rami e forse per questa ragione è così difficile l'attecchimento che si ha solo in quelle piante che riescono a conservare vivaci qualcuno dei primi rami. La brevità della vita dei rami inferiori potrebbe dipendere, secondo Messeri, « dalle fortissima irradiazione del terreno durante le lunghe, calde, e soleggiatissime giornate estive ». Le piante sopravvissute forse hanno potuto superare i primi anni di vita, che sembrano essere i più critici, perché protetti dalla forte irradiazione del terreno e dal pascolo da vasti e fitti gineprai che abbondano nella zona.

TABELLA I.

Temperature e precipitazioni a Petralia Sottana (m. 930) nel periodo 1938–1957.

Media mensile		Media massima mensile	Media minima mensile	Precipitazioni	
G	4,3	19,5	— 6,5	G	141,5
F	5,2	22,0	— 7,0	F	86,3
M	7,2	26,0	— 7,6	M	83,1
A	10,7	26,5	— 4,0	A	53,4
M	14,7	33,3	0,9	M	43,7
G	19,6	36,6	6,0	G	17,7
L	22,6	37,0	9,2	L	6,2
A	22,4	37,5	8,8	A	16,4
S	19,4	35,0	6,8	S	42,8
O	14,3	30,0	1,9	O	83,5
N	9,6	23,0	— 2,2	N	107,1
D	5,8	21,2	— 7,3	D	109,9
Anno	13,0	37,5	— 7,6	Anno	791,6

È noto che le esigenze di calore dell'abete sono strettamente connesse alla quantità di precipitazioni. Non abbiamo purtroppo dati climatici della località, ma per dare un po' l'idea delle caratteristiche climatiche del luogo, riportiamo alcuni dati della più vicina stazione metereologica che è Petralia Sottana (m. 930 s.l.m.).

Per quanto riguarda la temperatura nel periodo 1938–57 la media delle massime annue è stata di 37°,5 e la media delle minime annue di — 7°,6.

La media annua è stata di 13°,0. D'altra parte le precipitazioni nello stesso periodo hanno raggiunto appena la media di 791 mm annui così distribuiti: Inverno 337,7; Primavera 180,2; Estate 40,3; Autunno 233,4.

Riportiamo nella Tabella I i dati delle temperature e delle precipitazioni. Nella fig. 2 il grafico costruito secondo il metodo Bagnouls e Gaussen (1935) mette in evidenza l'aridità estiva, che risulta piuttosto marcata.

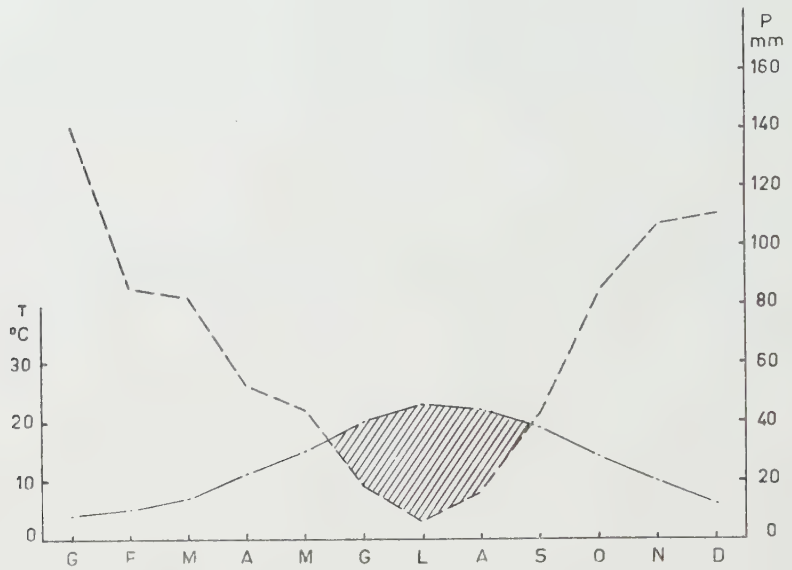


Fig. 2. – Diagramma termo-pluviometrico secondo il metodo Bagnouls–Gaussen. Il tratteggio indica l'aridità estiva. Petralia Sottana.

Tuttavia, malgrado le deficienze climatiche, ecologiche e pedologiche, essendo la zona molto arida o pressocché priva di bosco e fortemente erosa, i pochi abeti sembrano vivaci e tenacemente resistenti.

Ciò vuol dire che l'*Abiens nebrodensis* ha assunto caratteri di xeroresistenza, che si manifestano del resto anche nella morfologia delle foglie, nel particolare portamento e nel lento sviluppo.

Indipendentemente dalla dignità sistematica che i botanici gli hanno attribuito, l'abete siciliano è una entità che dal punto di vista storico e fitogeografico assume particolare valore per la sua estrema situazione meridionale, alla quale corrispondono estreme condizioni di vita.

La zona in cui cresce ora l'abete si può delimitare in una fascia che va dai 1.300 ai 1.700 m circa. In questa fascia l'abete si inserisce in basso in un bosco misto di leccio e faggio e si spinge dentro il livello della faggetta pura. Si trova cioè nelle condizioni in cui le conifere montane si trovano inserite nelle alte montagne mediterranee, tra il castagno e la faggeta. Sulle Madonie assistiamo però al fatto che il bosco, che viene a contatto inferiore con il faggio

invece di essere il cerro o il castagno è il leccio. Si ripete cioè qui la situazione che si ha nell'Africa Mediterranea Occidentale, in Marocco, sull'Atlante, dove il leccio rappresenta il bosco montano a contatto col bosco dei cedri e di *Juniperus turifera*. Il faggio, come è noto, manca in Africa e ciò per la mancanza di collegamenti terrestri con la Sicilia durante e dopo l'ultima glaciazione (Wurmiano e post-Wurmiano), quando l'evoluzione del clima da oceanico a continentale favorì la discesa del faggio nelle regioni più estreme della penisola fino in Sicilia (ancora collegata con la Calabria), ed il suo consolidamento a spese dell'Abete, che fu costretto a ridurre il suo vasto areale.

Non è escluso che in Sicilia sia stato presente precedentemente all'abete anche il bosco di cedro, emigrato dall'Africa quando questa era collegata alla Sicilia: si tratta infatti di una formazione paleoterziaria, quando i collegementi terrestri fra Sicilia e Atlante erano presenti.

L'antico scrittore Nilo, come riporta il Mattei, dice che sulle montagne siciliane crescevano cedri, cipressi e pini, « diritti e maestosi », senza però dare alcun accenno sulle presenza dell'abete.

A tal riguardo Tornabene (Mattei, 1908) fa notare che il cedro riportato come comune in Sicilia, dagli antichi scrittori, deve riferirsi all'abete, il cui portamento somiglia assai a quello del cedro del Libano o meglio ancora a quello del cedro dell'Atlante.

Noi crediamo piuttosto che il Nilo e gli altri antichi scrittori specialmente, menzionando il pino abbiano voluto riferirsi all'abete; lo proverebbe il nome volgare di *Pino cruci-cruci* con cui l'abete è conosciuto ancora oggi da quelli del luogo. Inoltre le pochissime località in cui è stato segnalata la presenza dell'abete nebrodense, sono indicate coi toponimi *Cozzo dei Pini*, *Vallone dei Pini*, *Manca dei Pini*, quest'ultima riferentesi alla nostra località, che appunto richiamano il nome del Pino dato all'abete.

I pochi dati che ho potuto raccogliere intorno alla ecologia ed alla distribuzione geografica dell'*Abies nebrodensis* mi portano a concludere che l'equilibrio in cui oggi si trova questo abete rispetto al leccio ed al faggio che l'accompagnano è certamente delicato ed instabile: cio è dimostrato dal fatto che l'opera distruttrice dell'uomo ha finito col farlo soccombere quasi del tutto, dato che già si doveva trovare in una situazione precaria per il suo isolamento geografico e per le avverse condizioni ecologiche.

L'*Abies nebrodensis* deve rappresentare uno speciale tipo biologico, evidenziatosi sotto l'impulso di cambiamenti climatici dal ceppo originario dell'abete bianco, dal quale si è probabilmente molto differenziato, soprattutto per la sua resistenza ad un ambiente estremo.

BIBLIOGRAFIA.

BOUDY P., 1950 – *Economie forestière nord-africaine. Monographies et traitements des essences forestières*, vol. II, fasc. 1.

BOUDY P., 1952 – *Guide du Forestièr en Afrique du nord.*

FREI M., 1938 – *Die Gliederung der sizilianischen Flora und ihre Stellung im Mittelmeergebiet.*

Gramuglio G., Arena M., Rosso R., 1959 – *La vegetazione del Capo di S. Alessio con osservazioni sul problema dei piani di vegetazione in Sicilia.* Webbia, vol. 15, n. 1, pp. 249–310.

Gussone J., 1844 – *Florae Siculae. Synopsis,* vol. II, pars II, p. 616.

Istituto Centrale di Statistica, *Annuario di Statistiche Meteorologiche,* Roma 1959.

Lojacono Pojero M., 1904 – *Flora Sicula,* vol. II, p. 401.

Mattei G. E., 1908 – *L'Abete delle Nebrodi,* « Bollett. del R. Orto Bot. e Giard. Col. di Palermo », anno VII, pp. 59–69.

Messeri A., 1958 – *Nuovi dati sulla sistematica dell'*Abies nebrodensis (*Lojac.*) *Mattei,* « Rendiconti dell'Acc. Naz. dei Lincei », ser. VIII, vol. XXV, fasc. 6.

Rikli M., 1943–46 – *Das Pflanzenkleid der Mittelmeerlander,* vol. 1–2.

Sacchi G., 1957 – *Abeti fra Scilla e Cariddi,* « Monti e Boschi », anno VII, n. 1, pp. 42–43.

SPIEGAZIONE DELLE TAVOLE

Tavola I.

Fig. 1. – Albero adulto di *A. nebrodensis* nella villa del Barone Casale a Polizzi Generosa.

» 2. – Piantina nata per disseminazione naturale (Villa del Barone Casale).

» 3. – Giovane pianta di *A. nebrodenisis* trapiantata nel giardino della Caserma Forestale di Polizzi Generosa.

» 4. – Muraglione roccioso delimitante una vasta piattaforma. Sulle ripide pendici si inerpica il faggio.

» 5–6. – Particolari di una parte del muraglione che scende ripidissimo a valle. La vegetazione è rappresentata dal leccio e da erbai di Ampelodesma.

Tavola II.

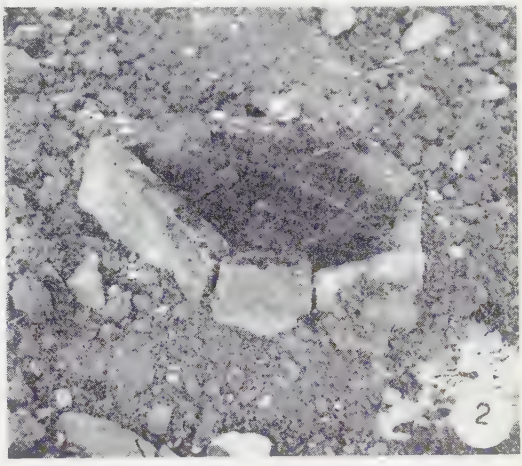
Fig. 7. – Fianco nord della valle della Madonna degli Angeli, appena varcata la portella Scalone. La mulattiera attraversa una lecceta.

» 8. – Vallone della Madonna degli Angeli: il più bell'esemplare di *A. nebrodensis.* Si notino i coni sugli ultimi palchi dei rami e in primo piano il recinto con filo spinato per proteggerlo dal pascolo. In secondo piano le ripide pendici del monte Scalone con faggio allo stato cespuglioso.

» 9–10. – Altri esemplari distorti di *A. nebrodensis* sulle pendici del monte Scalone. Nella figura 10 è ben messa in evidenza il rapido accrescimento della cima dopo la costruzione del terrapieno.

» 11–12. – Due esemplari nani di *A. nebrodensis* nella zona Cacuminale di Monte Scalone protetti da filo spinato.

1


2

3

4

5

6

7

8

9

10

11

12

Genetica. — *Indagini genetiche sulla predisposizione al favismo.* – III. *Distribuzione delle frequenze geniche per il locus* Gd *in Sardegna. Interazione con la malaria e la talassemia al livello popolazionistico* (*). Nota di Luigi Bernini, Ugo Carcassi, Bachisio Latte, Arno G. Motulsky, Licena Romei, Marcello Siniscalco, presentata (**) dal Corrisp. G. Montalenti.

I dati presentati nelle due precedenti Note [1] hanno consentito di concludere quanto segue:

1° Il favismo, come già rilevato da diversi Autori [2], ha come causa predisponente probabilmente primaria la stessa anomalia metabolica individuata da Alving e dalla sua Scuola (cfr. Beutler, 1959 [3]) negli eritrociti degli individui sensibili all'azione emolitica della primachina.

2° Tra le diverse alterazioni finora descritte quella che meglio permette di diagnosticare gli individui predisposti al favismo è la misura dell'attività della glucoso–6 fosfato–deidrogenasi (G6PD) delle emazie. A questo livello di classificazione si distinguono due fenotipi tra i maschi: enzimopenici Gd (—) e normali Gd (+), e rispettivamente tre fenotipi tra le femmine: enzimopeniche Gd (—), intermedie Gd (*i*) e normali Gd (+).

3° Poiché l'attività G6PD è, come già rilevato da Marks [4], inversamente proporzionale all'età delle emazie, è necessario ricorrere a particolari accorgimenti sperimentali (cfr. Nota I) per evitare errori di classificazione altrimenti frequenti in località, come la Sardegna, dove esistono fattori genetici (per esempio la talassemia), e ambientali (per esempio processi emolitici ricorrenti durante la stagione del consumo delle fave) che fanno aumentare l'aliquota di emazie giovani nel sangue circolante.

4° L'incidenza di episodi di *favismo clinico* in un collettivo di individui enzimopenici presi a caso è stata trovata dell'ordine di circa il 30 % tra i Gd (—) di ambo i sessi ed inferiore al 10 % tra le femmine Gd (*i*). Nell'ambito di ciascuna classe si è notato inoltre che gli individui talassemici sono meno frequentemente colpiti.

5° I dati riportati sulla distribuzione dei livelli di G6PD nelle famiglie e nelle popolazioni e sopratutto l'analisi della segregazione dei fenotipi Gd in famiglie di daltonici, hanno permesso di provare in modo definitivo la

(*) Ricerche eseguite, con contributi della Rockefeller Foundation (New York) e del Consiglio Nazionale delle Ricerche all'Istituto di Genetica della Università di Napoli, sotto la guida del prof. M. Siniscalco. Si ringraziano vivamente i dottori L. Contu e L. Lenzerini per l'aiuto prestato nella raccolta di parte dei dati popolazionistici ed il sig. R. Palmarino per l'assistenza tecnica.

(**) Nella seduta del 14 maggio 1960.

fondatezza dell'ipotesi di Childs e coll. [2] che questo polimorfismo enzimatico sia sotto il controllo di una coppia di geni, senza dominanza, localizzati sul cromosoma X.

In questa Nota presentiamo i dati relativi alla distribuzione delle frequenze geniche in Sardegna e prendiamo in esame il problema della interazione tra enzimopenia, talassemia e malaria al livello popolazionistico.

Una stima delle frequenze geniche per loci legati al sesso è, come è noto, direttamente ottenibile dalle frequenze relative dei maschi emizigoti portatori dell'uno o dell'altro allelomorfo.

Nel nostro caso è stato quindi sufficiente determinare la frequenza degli individui Gd (—) nella popolazione scolastica maschile di ciascun villaggio esaminato, ovvero:

$$\frac{\text{n° maschi Gd (—)}}{N} = \text{frequenza dell'allelomorfo } Gd^- = q$$

$$\frac{\text{n° maschi Gd (+)}}{N} = \text{frequenza dell'allelomorfo } Gd^+ = p$$

dove N è il totale dei maschi esaminati, $p + q = 1$. La varianza delle stime ottenute è data dalla formula $\frac{p \cdot q}{N}$.

Trattandosi di determinare il fenotipo Gd nei soli maschi è stato usato il metodo rapido di Motulsky che ha permesso l'esame di 100–200 individui al giorno, richiedendo soltanto il prelievo di poche gocce di sangue al dito. Negli stessi soggetti venivano eseguite per la diagnosi della talassemia la prova della resistenza delle emazie ad una soluzione ipotonica di cloruro di sodio 0,375 % e l'esame morfologico dello striscio di sangue. Un campione di sangue, prelevato al dito in tubi capillari eparinizzati, veniva infine conservato per eventuali controlli.

Nel villaggio di Lodè, dove le indagini sono state estese ad oltre ottocento persone, per la raccolta del materiale familiare e lo studio dell'interazione tra talassemia e favismo al livello fisiologico (cfr. Nota I: materiale e metodi), abbiamo avuto modo di determinare l'errore di classificazione che i criteri di rilevamento sopra descritti potevano comportare: esso è risultato praticamente nullo per l'enzimopenia e al di sotto dell'1 % per la talassemia anche quando questa venga diagnosticata in base alla sola iperresistenza delle emazie.

Bisogna notare a questo proposito che, in occasione di una precedente campagna di ricerche condotta nel luglio del 1956 [5], l'errore di classificazione nella diagnosi di talassemia con il metodo dell'iperresistenza era risultato del 7 %; la discrepanza tra le due osservazioni è probabilmente da spiegarsi con il fatto che durante la stagione del consumo delle fave la prova dell'iperresistenza non è positiva soltanto per i talassemici ma anche per tutti quegli individui Gd (—) che vanno incontro a fenomeni emolitici transitori con aumento apprezzabile della quota di emazie giovani (iperresistenti) nel sangue circolante.

Tabella I.

Frequenze fenotipiche e geniche per l'enzimopenia - G6PD - e la talassemia in Sardegna.
Stime ottenute dalla popolazione scolastica maschile.

Località	Frequenze fenotipiche		Frequenze geniche		Gd (—) e Th (+)	
	Gd (—)	Th (+)	Gd^{-} ± E.S.	Th^{t} ± E.S.	N° osservato	N° atteso
1) Luras	7 : 100 = 0,070	22 : 98 = 0,025	0,070 ± 0,025	0,112 ± 0,022	2 (su 100)	1,4
2) Usini	6 : 99 = 0,061	14 : 99 = 0,142	0,061 ± 0,024	0,071 ± 0,019	3 (» 99)	0,8
3) Lodé	48 : 163 = 0,294	36 : 163 = 0,221	0,294 ± 0,035	0,110 ± 0,017	15 (» 163)	9,4
4) Siniscola	22 : 195 = 0,113	25 : 97 = 0,258	0,113 ± 0,023	0,129 ± 0,024	2 (» 97)	2,5
5) Benetutti	9 : 100 = 0,090	12 : 100 = 0,120	0,090 ± 0,028	0,060 ± 0,017	2 (» 100)	1 –
6) Suni	14 : 98 = 0,143	25 : 100 = 0,250	0,143 ± 0,035	0,125 ± 0,023	4 (» 98)	3,1
7) Orosei	25 : 180 = 0,140	58 : 308 = 0,188*	0,140 ± 0,026	0,094 ± 0,012*	—	—
Galtellì	21 : 175 = 0,120	50 : 235 = 0,213*	0,120 ± 0,024	0,106 ± 0,014*	—	—
8) Fonni	3 : 100 = 0,030	—	0,030 ± 0,014	—	—	—
Desulo	9 : 313 = 0,031	12 : 320 = 0,037*	0,031 ± 0,009	0,018 ± 0,005*	—	—
Tonara	6 : 148 = 0,040	5 : 102 = 0,047*	0,040 ± 0,016	0,023 ± 0,010*	—	—
Lanusei	4 : 100 = 0,040	—	0,040 ± 0,019	—	—	—
9) Tortolì	8 : 50 = 0,160	—	0,160 ± 0,052	—	—	—
10) Cabras	70 : 200 = 0,350	28 : 100 = 0,280	0,350 ± 0,034	0,140 ± 0,024	11 (su 100)	8,4
S. Giusta	13 : 42 = 0,309	—	—	—	—	—
Terralba	30 : 100 = 0,300	—	—	—	—	—
11) Isili	9 : 100 = 0,090	19 : 100 = 0,190	0,090 ± 0,029	0,095 ± 0,021	1 (su 100)	1,5
12) Gergei	17 : 92 = 0,185	12 : 92 = 0,0131	0,185 ± 0,040	0,065 ± 0,018	2 (» 92)	2,1
13) Gonnos-Fanadiga	12 : 49 = 0,245**	—	0,245 ± 0,062**	—	—	—
14) Cagliari	— ~ 0,25***	—	~0,25***	—	—	—
15) Teulada	17 : 101 = 0,169	25 : 100 = 0,250	0,169 ± 0,037	0,125 ± 0,023	3 (su 100)	3,7
				Totale . . .	45	33,9

Gd (—) = enzimopenici Th (+) = talassemici Gd^{-} = gene per l'enzimopenia Th^{t} = gene per la talassemia
(*) da Ceppellini, 1956 (♂♂ e ♀♀) (**) da Carcassi, 1959 (solo ♂♂) (***) da Larizza, 1958.

$\chi^2 = 3,78$; $g.l. = 1$
$P = < 0,10 > 0,05$

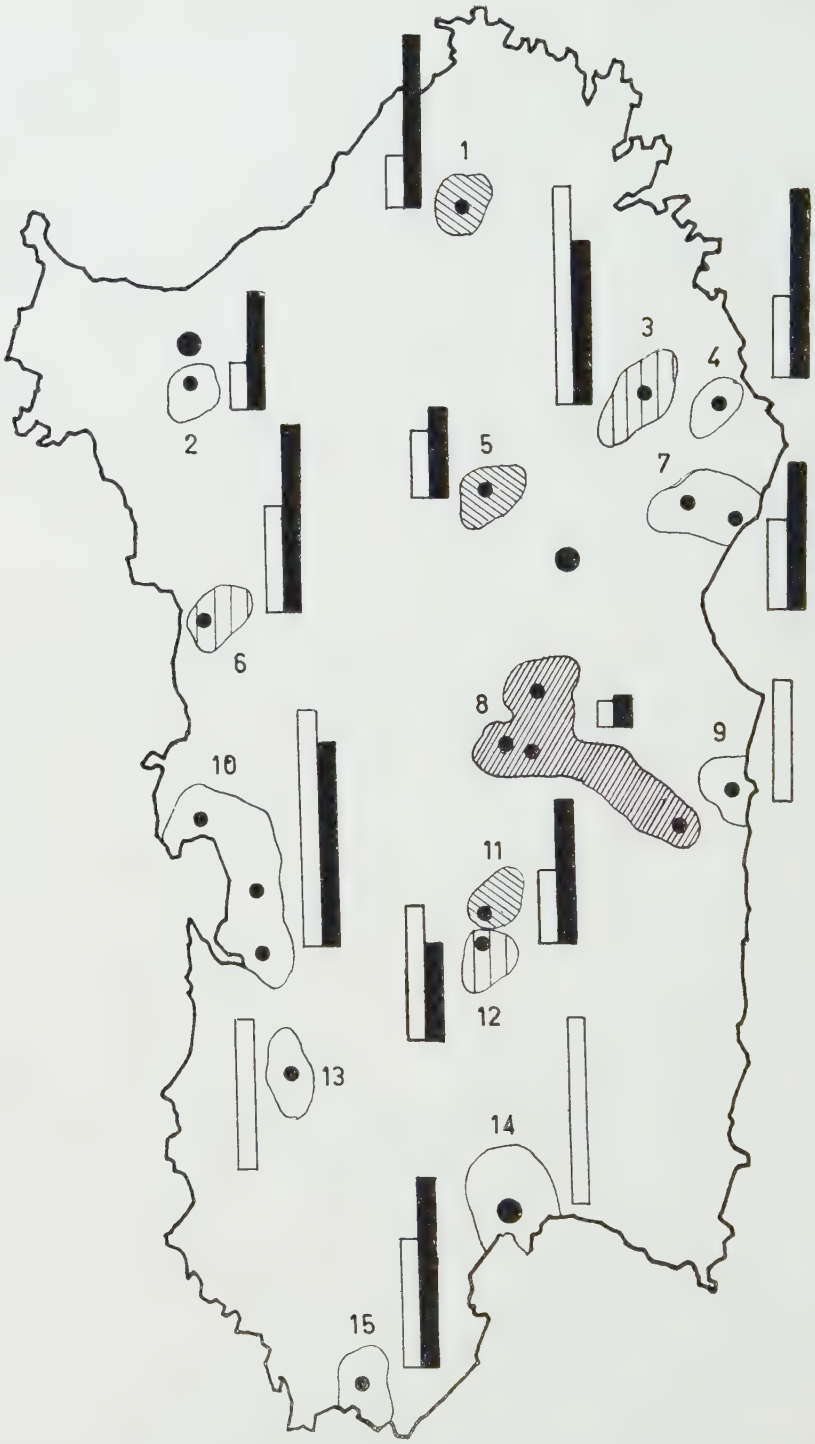


Fig. 1. – Distribuzione dell'enzimopenia (G6PD) e della microcitemia (*Thalassemia minor*) in alcuni centri della Sardegna situati a diverse altitudini (ved. spiegazione nella pagina a fianco).

SPIEGAZIONE DELLA FIGURA 1.

Località	Altitudine m/sul mare	Malaricità (da Fermi)	N° esaminati
1. Luras	508	78	100
2. Usini	190	95 %	99
3. Lodè	345	90 %	163
4. Siniscola	42	17 %	198
5. Benetutti	406	50 %	100
6. Suni	333	85 %	98
7. Orosei–Galtellì	19–40	93 %–96 %	175–180
8. Fonni	1000	19 %	100
Desulo	891	33 %	313
Tonara	935	10 %	148
Lanusei	595	25 %	100
9. Tortolì	15	90 %	50
10. Cabras	9	97 %	200
S. Giusta	10	97 %	42
Terralba	9	97 %	100
11. Isili	523	17 %	100
12. Gergei	374	66 %	92
13. Gonnos–Fanadiga	186	90 %	49
14. Cagliari	10	80 %	?
15. Teulada	50	90 %	101
		Totale:	2508

Scala istogrammi di frequenza:

enzimopenici (♂♂)

microcitemici (♂♂ e ♀♀)

Altitudine

metri 600–1000

» 400– 600

» 300– 400

» 0– 100

Poiché, come è noto, la talassemia (o microcitemia di Silvestroni e Bianco [6]) rappresenta la condizione di eterozigosi (Th^t/Th^+) per un gene autosomico (Th^t) che è letale allo stato omozigote (Th^t/Th^t = morbo di Cooley), una stima della frequenza q' per l'allelomorfo Th^t è stata ottenuta direttamente dalla frequenza relativa degli individui talassemici divisa per 2. La varianza di tale stima è $\frac{p' \cdot q'}{2N}$ – dove N è il numero totale degli individui esaminati e p' è la frequenza dell'allelomorfo normale (Th^+) pari a $1 - q'$.

Le frequenze teoriche attese per i maschi contemporaneamente enzimopenici e talassemici sono state calcolate in base all'ipotesi che le popolazioni studiate siano in equilibrio rispetto ad entrambe le coppie di geni considerate. In tal caso i maschi Gd^- ; Th^t/Th^+ hanno una frequenza attesa pari a $q \cdot 2\,p'\,q'$.

Nella Tabella I e nella figura 1 sono riassunti i dati raccolti. La fig. 1 descrive la distribuzione della enzimopenia e della talassemia nelle varie località esaminate e mette in risalto la correlazione negativa esistente tra altitudine e frequenza delle due anomalie; così da frequenze dell'ordine del 3–4 % per entrambi i caratteri nei villaggi montani del Gennargentu si giunge ai valori tra il 10 ed il 40 % in villaggi di pianura talvolta distanti dai precedenti solo poche diecine di chilometri in linea d'aria.

Questo fenomeno era già stato messo chiaramente in evidenza in Sardegna da Ceppellini [7] per la talassemia ed era stato messo in rapporto con la distribuzione della malaria che ha imperversato per diecine di secoli nell'Isola con una pressione selettiva la cui intensità era appunto, come si può rilevare dalla monografia del Fermi [8], inversamente proporzionale all'altitudine. Secondo questa ipotesi gli individui talassemici sarebbero stati più resistenti verso l'infezione malarica, almeno per quanto riguarda il rischio di morte per tale malattia prima dell'età della riproduzione.

L'importanza della malaria come fattore ecologico capace di mantenere alcuni geni letali o subletali nelle popolazioni umane era stata prevista da Haldane [9] nel 1949 e dimostrata da Allison [10] e Vandepitte e coll. [11] nel caso della falcemia, una emoglobinopatia che, come la talassemia, è dovuta ad un gene autosomico subletale e che conferisce allo stato eterozigote una marcata protezione verso le infezioni sperimentali da *Plasmodium falciparum*.

Motulsky e Vandepitte [12] avevano già raccolto dei dati nel Congo Belga che lasciavano prevedere un'analoga situazione anche a proposito dei rapporti tra malaria e distribuzione della enzimopenia G6PD.

I nostri dati delle figg. 1 e 2 e della Tabella II rappresentano un'ulteriore conferma di questa ipotesi.

Nella fig. 2 sono state tabulate le frequenze dei geni Th^t e Gd^- contro le percentuali di malaricità rilevate dal Fermi [8] in Sardegna fra il 1930 ed il 1940: la correlazione positiva è ovvia, specialmente se si tien conto del fatto che l'eccezione rappresentata dalla classe con malaricità del 17 % è soltanto apparente. In questa classe vengono infatti a cadere i dati relativi

a Siniscola, cittadina sulla costa orientale tra le più evolute del Nuorese, dove il Fermi aveva trovato nel 1938 una bassa percentuale di malaricità malgrado la sua localizzazione in un'area molto paludosa e poco distante da centri di notevole endemicità malarica (Lodè, Torpè, Posada). Fermi ha interpretato il fenomeno come una conseguenza dell'efficace profilassi antimalarica da lui stesso condotta per decenni in tale cittadina, come viene

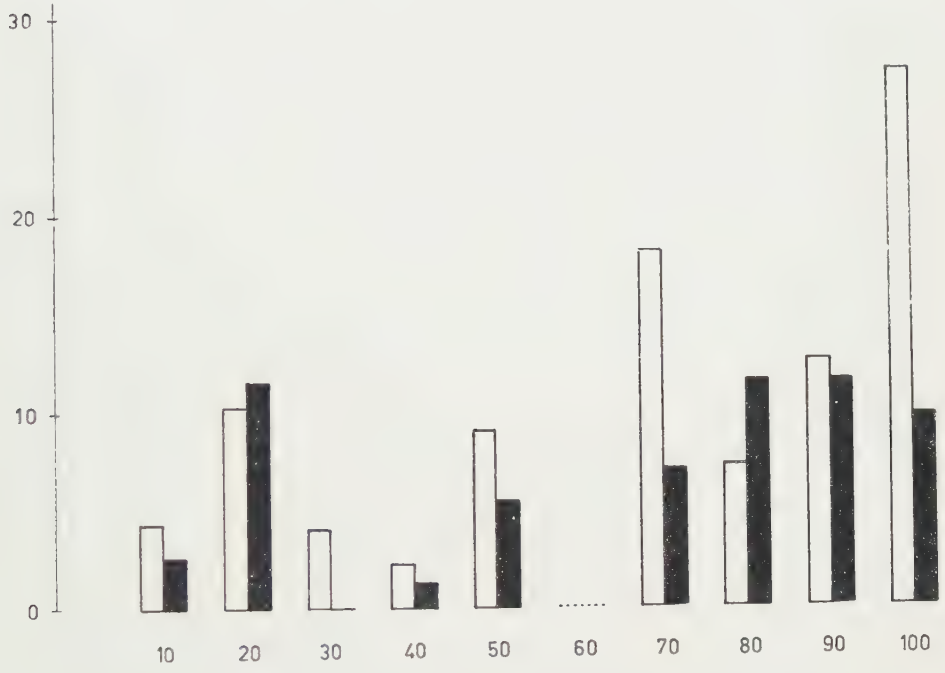


Fig. 2. – Correlazione tra «malaricità» e frequenza dei geni Gd^- e Th^t.

Sulle ascisse: indice di malaricità (= % individui colpiti da malaria, da Fermi, 1938).
Sulle ordinate: frequenza genica percentuale; gli istogrammi vuoti si riferiscono al gene Gd^-, quelli pieni al gene Th^t.
La distribuzione è ricavata dai dati della fig. 1.

provato del resto anche dai dati del Missiroli [13] che trovava infatti nella stessa area e nello stesso periodo, una percentuale di splenomegalia di oltre il 50% nella popolazione adulta.

La malaria sembrerebbe dunque ancora una volta chiamata in causa per spiegare il mantenimento di un polimorfismo bilanciato nella specie umana (cfr. Montalenti [14] 1959).

A questo proposito è interessante notare che per coltivare *in vitro* il parassita malarico è necessaria l'aggiunta di glutatione al mezzo di cultura [15]: gli individui enzimopenici, che presentano anche una riduzione quantitativa ed una marcata instabilità del glutatione eritrocitario (cfr. Nota I), potrebbero essere stati pertanto dei cattivi «ospiti» per il plasmodio risultando, di conseguenza, protetti verso l'infezione malarica.

A questo punto, ricordando i descritti rapporti tra talassemia ed enzimopenia al livello fisiologico, ed ammettendo che entrambe queste caratteristiche ereditarie siano state selezionate dalla malaria, era interessante studiare la interazione delle frequenze geniche al livello popolazionistico, ovvero la regressione della frequenza del gene Th^t al variare della frequenza del gene Gd^-. La fig. 3 riporta i risultati di questa indagine. In essa, per quanto il numero di villaggi esaminati sia ancora troppo scarso, e talvolta il numero di osservazioni per villaggio troppo modesto per consentire stime di frequenze geniche accurate, si può rilevare che:

1° le frequenze di equilibrio del gene per la talassemia raggiungono il livello massimo del 14 %, mentre quelle relative al gene per la enzimo-

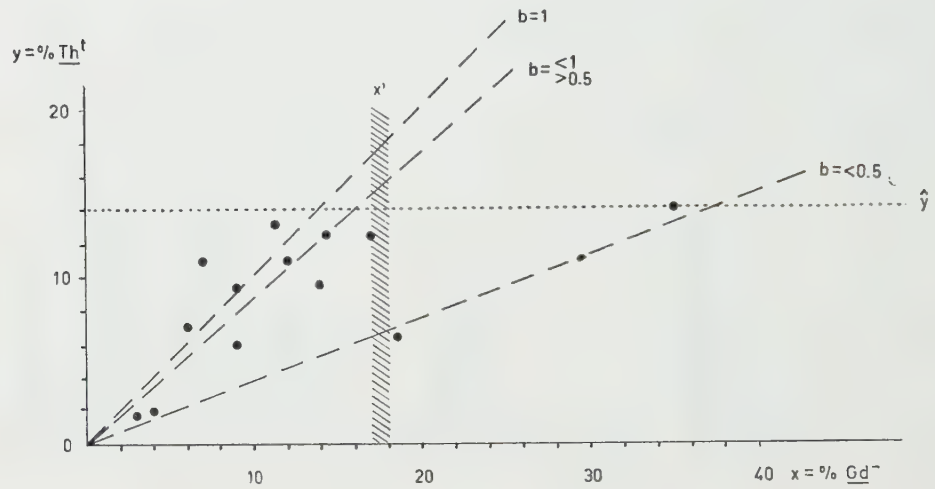


Fig. 3. – Correlazione tra le frequenze dei geni Gd^- e Th^t.

Sulle ordinate: frequenza percentuale del gene Th^t $(=y)$
Sulle ascisse: » » » » Gd^- $(=x)$
«b» : coefficiente di regressione di y su x nell'equazione: $y = a + bx$, che descrive la probabile relazione tra le frequenze dei due geni.
«x'» : livello di frequenza per il gene Gd che segna il variare del coefficiente di regressione.
«y» : massima frequenza di equilibrio osservata per il gene Th^t.
Ciascun punto si riferisce ad uno dei villaggi riportati nella Tabella I.

penia superano il 30 %, come era da attendersi per essere il primo un gene completamente letale allo stato omozigote ed il secondo solo raramente letale nei maschi emizigoti Gd^- e nelle femmine omozigoti Gd^-/Gd^-;

2° la curva che descrive la correlazione tra le frequenze di equilibrio per i due sistemi di geni non sembra tuttavia un'iperbole semplice come ci si attenderebbe nelle circostanze considerate, ma presenta un andamento bimodale, quasi che esista un valore di soglia (x') nella frequenza del gene per la enzimopenia al di sotto del quale la regressione di y (frequenza % del gene Th^t) su x (frequenza % del gene Gd^-) è vicina all'unità, mentre al di sopra assume un valore inferiore a 0,5.

Ciò potrebbe significare che quando « per caso » o per altre circostanze non identificabili, il gene meno sfavorevole ha raggiunto frequenze tali da assicurare una protezione sufficiente della popolazione contro la malaria, l'altro gene (letale), è stato mantenuto a livelli di equilibrio più bassi. Un meccanismo di questa sorta può essere invocato per spiegare, ad esempio, le fluttuazioni di frequenza spesso significative riscontrate per l'enzimopenia e la talassemia in aree con uguale percentuale di malaricità.

Sembra infatti difficile poter riferire tali fluttuazioni ad eventuali differenze etniche, come in un primo tempo avevamo ritenuto [16], perché, come si rileva dalla Tabella II, la distribuzione dei gruppi sanguigni è risultata tipicamente « sarda » (elevata frequenza dell'allelomorfo I^M del sistema *MN* ed estrema rarità del cromosoma *rh.cde*) in tutte le popolazioni finora esaminate, sia lungo le coste, sia all'interno sulle pendici e sulle alture del Gennargentu.

Sempre a proposito dei rapporti tra enzimopenia e talassemia, val la pena di notare nella Tabella I, che la frequenza osservata negli individui nello stesso tempo talassemici ed enzimopenici, tende ad essere più elevata di quella attesa. Il numero di individui esaminati è troppo scarso per consentire una valutazione statistica di tale differenza in ciascun villaggio, ma se il confronto vien fatto sul totale si ottiene un χ^2 che è al limite della significatività al livello del 5 %.

Se questo dato venisse confermato bisognerebbe ammettere che i maschi portatori delle due anomalie sono (o sono stati) biologicamente più idonei rispetto ai portatori delle altre combinazioni genotipiche possibili.

In questo senso del resto può essere interpretata l'osservazione già riferita (cfr. Nota I, Tabella V) della minore incidenza di episodi di favismo clinico tra gli individui suddetti.

Questi dati sono per il momento solo indicativi e vanno completati con ulteriori indagini come la misura diretta della sopravvivenza media degli eritrociti, l'analisi delle segregazioni mendeliane in famiglie portatrici di entrambi i geni e la distribuzione delle frequenze geniche nei vari gruppi di età.

Queste indagini, rivolte a determinare l'idoneità biologica dei vari fenotipi considerati ed a studiare nel modo più completo possibile la struttura genetica delle popolazioni e l'interazione dei geni presi in esame, sia tra di loro sia con i fattori ecologici più importanti, sono quanto mai interessanti ed urgenti. *Interessanti* perché esse rappresentano la premessa indispensabile per studiare su basi concrete le possibilità del così detto « controllo epidemiologico » delle malattie ereditarie; *urgenti* perché è ovvio che la struttura delle popolazioni potrebbe cambiare nel corso di poche generazioni (Montalenti e coll.) [17] oggi che la malaria è stata completamente debellata e che il tipico isolamento dei villaggi studiati va rapidamente attenuandosi.

Per questi motivi è nostra intenzione dare il massimo sviluppo nel prossimo futuro alle ricerche che su questo argomento stiamo conducendo in Sardegna e nelle altre regioni Italiane dove sono già state documentate l'elevata frequenza della talassemia (cfr. rivista sintetica di Montalenti [14]) e una discreta incidenza del favismo (Fermi 1905) [18].

Tabella II.

Frequenze geniche per i sistemi ABO, MN e Rh in villaggi sardi della costa orientale, occidentale e dell'interno comparate alle frequenze geniche tipiche per l'Italia Settentrionale.

Località		Altitudine m./sul mare	N. abitanti	N. esaminati	A_1	A	B	O	M	N	Rh	rh
Costa Orientale	Orosei * . .	19	4.850	308	12,3	5,8	9,2	72,3	79,1	20,9	83,9	16,1
	Galtellì * . .	40	2.526	235	17,1	7,7	4,7	70,5	76,8	23,2	79,4	20,6
Interno	Desulo * . .	891	3.533	320	27,3	3,4	2,8	66,5	76,3	23,7	75,6	24,4
	Tonara * . .	935	3.025	107	10,5	11,2	3,8	74,5	72,0	28,0	78,4	21,6
	Illorai ** . .	503	1.826	149	8,9	2,9	12,2	76,0	73,2	26,8	71,0	29,0
Costa Occidentale	Cabras ** . .	9	6.021	128	21,4	5,7	4,7	69,1	69,8	30,2	80,7	19,3
	Terralba ** .	9	8.064	75	19,5	3,1	5,4	70,3	71,3	28,3	84,9	15,1
Milano *		—	—	—	24,8	4,1	5,8	65,3	59,2	40,8	60,3	39,7

(*) R. Ceppellini 1955. (**) Dati raccolti da M. Siniscalco e coll. Determinazioni eseguite dai Drs. A. E. Mourant (Lister Institute London) e P. J. Garlick (University College London).

Bibliografia.

[1] Siniscalco M. e coll., questi « Rendiconti », vol. XXVIII, fasc. 5 e fasc. 6 (1960).

[2] Sansone G., Segni G., « Boll. Soc. It. Biol. Sper. », *32*, 456 (1956); Childs B., Zinkham W. H., Browne E. A., Kimbro E. L., Torbert J. V., « Bull. Johns Hopk. Hosp. », *102*, 21 (1958); Szeinberg A., Sheba C., Hirshorn N., Bodonyi E., « Bull. Res. Counc. of Israel », 6E, 115 (1957); Larizza P., Brunetti P., Grignani F., Ventura S., « Haematologica », XLIII, 205 (1958).

[3] Beutler E., « Blood », *14*, 103 (1959).

[4] Marks P. A., « Science », *127*, 1338 (1958).

[5] Carcassi U., Ceppellini R., Siniscalco M., « Haematologica », XLII, 1635 (1957).

[6] Silvestroni E., Bianco I., « Ric. Morfol. », *22*, 325 (1946).

[7] Carcassi U., Pitzus F., Ceppellini R., « Boll. Ist. Sier. Mil. », XXXV, 1 (1956).

[8] Fermi C., *La malaria in Sardegna*, Stamperia della Libreria Italiana e straniera, Sassari 1938.

[9] Haldane J.B.S., in « Atti del convegno » dedicato a *I recenti contributi della Genetica umana alla Medicina*, Ist. Sier. Mil. Serafino Belfanti, Milano 1949.

[10] Allison A. C., « Exper. Parasit. », *6*, 418 (1957).

[11] Vandepitte J., Delaisse J., « Ann. Soc. Belge Med. Trop. », *37*, 703 (1957).

[12] Motulsky A. G., Vandepitte J., in corso di stampa 1959.

[13] Missiroli A. cit. in *The Sardinian Project*, p. 187, Tabella 26. Johns Hopkins Press, Baltimora 1953.

[14] Montalenti G., « Archiv. der Julius Klaus-Stiftung », *34*, 279 (1959).

[15] Trager W., « J. Exper. Med. », *74*, 441 (1941); McGhee R., Trager W., « J. Parasitol », *36*, 123 (1950).

[16] Siniscalco M., in *Biochemistry of human Genetics*, p. 89, Churchill Ltd. London.

[17] Montalenti G., Silvestroni E., Bianco I., Siniscalco M., *Convegno di Genetica*, 1957. Supplemento a « La Ricerca Scientifica », anno 29, 1959.

[18] Fermi C., « Ann. Igiene Sperim. », *15*, 117 (1905).

Zoologia. — *Sulla localizzazione perivasale di una cospicua riserva di neoblasti in* Spirorbis pagenstecheri [*]. Nota [**] di Enrico Vannini e Anna Stagni, presentata dal Corrisp. U. D'Ancona.

Il problema dell'origine e differenziamento dei gonociti in animali senza segregazione precoce del ceppo germinale fu considerato da uno di noi [1] in *Salmacina incrustans*, sulla base di precedenti osservazioni di Malaquin [2]. Esso venne successivamente inquadrato nell'ambito di una più vasta serie di ricerche sulla biologia riproduttiva e sui poteri rigenerativi di questo Serpulide ermafrodita e schizogonico [3].

I risultati ottenuti suggerirono l'opportunità di estendere l'indagine all'affine *Spirorbis pagenstecheri*, anch'esso ermafrodita ma aschizogonico [4]. Queste ultime osservazioni, in parte divergenti da quelle di Bergan [5], hanno permesso di individuare, ancor più chiaramente che in *Salmacina*, un particolare ceppo di cellule mesoblastiche pluripotenti. Da queste si differenziano, durante lo sviluppo postembrionale, sia le strutture mesodermiche (ad esempio i setti intersegmentali), sia i gonociti, che daranno uova nei primi due metameri addominali, spermi in tutti gli altri.

In *Spirorbis* una riserva di cellule mesoblastiche indifferenziate (neoblasti), che forniranno le successive ondate di gametogenesi, permane nell'adulto ed è particolarmente evidente nella zona acheta. I neoblasti sono qui disposti a manicotto attorno ad una formazione cordonale allungata e sinuosa (prolungantesi nei metameri femminili), che la Reggiani [4] interpretò come un fascetto muscolare.

(*) Istituto di Zoologia dell'Università di Bologna e Centro di Studio per la Biologia del C.N.R.

(**) Pervenuta all'Accademia l'8 luglio 1960.

(1) E. Vannini, *Neoblasti e rigenerazione dei segmenti genitali nel Serpulide ermafrodita* Salmacina incrustans *Clap.*, « Atti Ist. Veneto », vol. CV, p. 50 (1947).

(2) A. Malaquin, *L'accroissement et les phases sexuelles et asexuelles de* Salmacina dysteri (*Huxley*), « Zool. Anz. », Bd. XXXVII, p. 197 (1911); A. Malaquin, *Nouvelles observations sur la lignée germinale de l'Annélide* Salmacina dysteri (*Huxley*), « C. R. Acad. Sc. Paris », vol. CXCVIII, p. 1804 (1934).

(3) E. Vannini e F. Ranzoli, *Studi sulla sessualità e sui poteri rigenerativi nel Polichete ermafrodita* Salmacina incrustans *Clap.* – II. *Poteri rigenerativi, schizogonia e maturazione sessuale*, « Pubbl. Staz. Zool. Napoli », vol. XXX, p. 210 (1957).

(4) M. P. Reggiani, *Origine delle cellule germinali e maturazione dei gameti in* Spirorbis pagenstecheri, « Boll. Zool. », vol. XXIII, p. 581 (1956); M. P. Reggiani, *Osservazioni sull'origine delle cellule germinali e il differenziamento dei gameti nel Polichete ermafrodita* Spirorbis pagenstecheri *Quatr.*, « Riv. Biol. », vol. XLIX, p. 243 (1957).

(5) P. Bergan, *On the anatomy and reproduction biology in* Spirorbis *Daudin*, « Nytt Mag. Zool. », vol. I, p. 1 (1953).

Noi pure [6], riprendendo in esame lo stesso materiale, concordammo in un primo tempo con quest'ultima interpretazione. Furono soprattutto gli esemplari molto giovani, in cui l'addome è appena accennato, a mostrarci aspetti che facevano pensare a un supporto muscolare del cordone di mesoblasti (cfr. fig. 1 del lavoro citato). Possiamo giustificare il nostro errore, rilevando anzitutto che l'andamento sinuoso di tale cordone suggeriva una sua natura contrattile e inoltre che l'organizzazione asimmetrica di *Spirorbis* [7], complicata da fenomeni di torsione [5], modifica la consueta topografia delle varie minuscole strutture e rende oltremodo difficile sceverarle e seguirne il decorso.

I dubbi sulla struttura muscolare e l'ipotesi della natura vasale del supporto si affacciarono nel corso di alcune ricerche sulla rigenerazione. Uno di noi [8] volle infatti verificare sperimentalmente in *Spirorbis* le potenzialità di ricostituzione del ceppo germinale da parte di elementi mesoblastici di regioni asessuate. Le operazioni di asportazione dell'addome con taglio a livello della zona acheta, allora effettuate, permisero di rilevare che il supporto del cordone di mesoblasti, nella regione immediatamente cefalica alla ferita cicatrizzata, si rigonfiava come in seguito a ristagno di un liquido in esso contenuto. Il quadro istologico degli animali in rigenerazione perciò diveniva nettamente sfavorevole all'opinione della natura muscolare e rendeva necessario un affinamento delle osservazioni.

Abbiamo quindi ritenuto opportuno ricorrere all'esame in luce polarizzata di sezioni non colorate. In questo modo ci è stata confermata la completa assenza di formazioni fibrillari birifrangenti nella struttura in questione, nettamente differenziabile pertanto da fasci contigui di fibre muscolari. Osservazioni *in vivo*, effettuate sui più grossi esemplari adulti estratti dal loro tubicino calcareo, ci hanno infine consentito di integrare i quadri istologici degli animali fissati e di identificare in un vaso sanguigno il cordone della zona acheta, attorniato dai neoblasti. In tale vaso, di calibro relativamente cospicuo, e a decorso obliquo e sinuoso, il sangue sembra scorrere in direzione caudo–cefalica.

Dopo queste precisazioni, la natura vascolare della struttura attorno alla quale, nella zona acheta, i neoblasti (intensamente basofili) sono disposti a manicotto, risulta ormai documentabile in maniera certa, anche in base a comuni preparati istologici di esemplari sia normali che in rigenerazione (Tavv. I–III). Anche le figure riportate dalla Reggiani [4], soprattutto quelle appartenenti

(6) E. VANNINI e A. STAGNI, *Nuove indagini sull'origine ed il differenziamento delle cellule germinali nel Polichete ermafrodita* Spirorbis pagenstecheri, « Rend. Accad. Naz. Lincei », vol. XXVI, p. 259 (1959).

(7) J. F. ZUR LOYE, *Die Anatomie von* Spirorbis borealis *mit besonderer Berücksichtigung der Unregelmässigkeiten des Körperbaues und deren Ursachen*, « Zool. Jahrb., Abt. Anat. », Bd. XXVI, p. 305 (1908).

(8) A. STAGNI, *Primi appunti ed osservazioni sulla ricostituzione degli elementi germinali durante la rigenerazione di* Spirorbis pagenstecheri, « Rend. Accad. Naz. Lincei », vol. XXVII, p. 71 (1959); A. STAGNI, *Fenomeni rigenerativi e origine degli elementi germinali in* Spirorbis pagenstecheri, « Boll. Zool. », vol. XXVI, p. 397 (1959).

ai più grossi esemplari (ad esempio la fig. 25 della Tav. V nel lavoro del 1957), sono ormai interpretabili in tale senso.

Quello che ora ci proponiamo, è di precisare a quale distretto del sistema circolatorio appartenga il vaso che ci interessa, quale sia la sua estensione ed a quali altri vasi si anastomizzi nel completo suo decorso. Una tale ricerca non è scevra tuttavia di difficoltà. Solo nella zona acheta la trasparenza dei tessuti e la semplicità delle altre strutture permettono infatti di individuare detto vaso abbastanza facilmente anche *in vivo*; nell'addome invece, l'opacità, determinata soprattutto dall'ammasso dei gameti che infarciscono il celoma, ostacola notevolmente l'indagine. Quindi, soltanto ripetute ricostruzioni, ricavate da sezioni istologiche seriate, ci permetteranno di risolvere il problema.

Le ricerche in proposito sono in corso, ma ci consentono tuttora scarse precisazioni, sempre a causa della accentuata asimmetria che complica lo studio anatomico di questo Serpulide. Dobbiamo rilevare in proposito che poco ci aiutano i dati morfologici di Autori precedenti [7], le cui raffigurazioni dell'apparato circolatorio dànno immagini eccessivamente semplificate e inspiegabilmente troppo regolari e simmetriche, rispetto a quanto noi stiamo rilevando. Per citare soltanto una delle difficoltà che abbiamo incontrato, diremo che, mentre la ricostruzione del vaso nel tratto compreso fra l'ultimo metamero toracico, la zona acheta e l'inizio dell'addome parlerebbe di una sua localizzazione obliqua in sede ventro–laterale (come se si trattasse di un vaso del distretto ventrale), il sangue in esso contenuto, come già notammo, sembra scorrere invece in direzione caudo–cefalica (il che farebbe pensare ad una sua dipendenza dal vaso dorsale).

Non è da escludere però che si tratti di una discordanza inconsistente. Se infatti ci risulterà che l'apparato circolatorio, nella zona acheta, presenta anse ricorrenti, analogamente a quanto accade per il decorso tortuoso dell'intestino, l'apparente deflusso cefalico del sangue verrà a corrispondere invece in realtà ad un suo scorrimento in direzione caudale.

È sperabile che la completa ricostruzione dell'apparato circolatorio di *Spirorbis pagenstecheri* ci permetta di identificare, nel tratto posteriore dell'addome, la sede di vasi gonadici maschili, analoghi a quello che nella zona acheta e nei due primi segmenti dell'addome contrae strettissimi rapporti con le cellule progenitrici dei gameti femminili. Il reperto potrà venire collegato con quanto è già noto sui vasi gonadici, di derivazione più o meno diretta dal distretto ventrale, che sono stati descritti in altri Policheti (ad esempio in alcuni Arenicolidi [9], in alcuni Anfaretidi e Terebellidi [10], nel Serpulide *Pomatoceros triqueter* [11] e nell'Archianellide *Polygordius erythrophthalmus* [12].

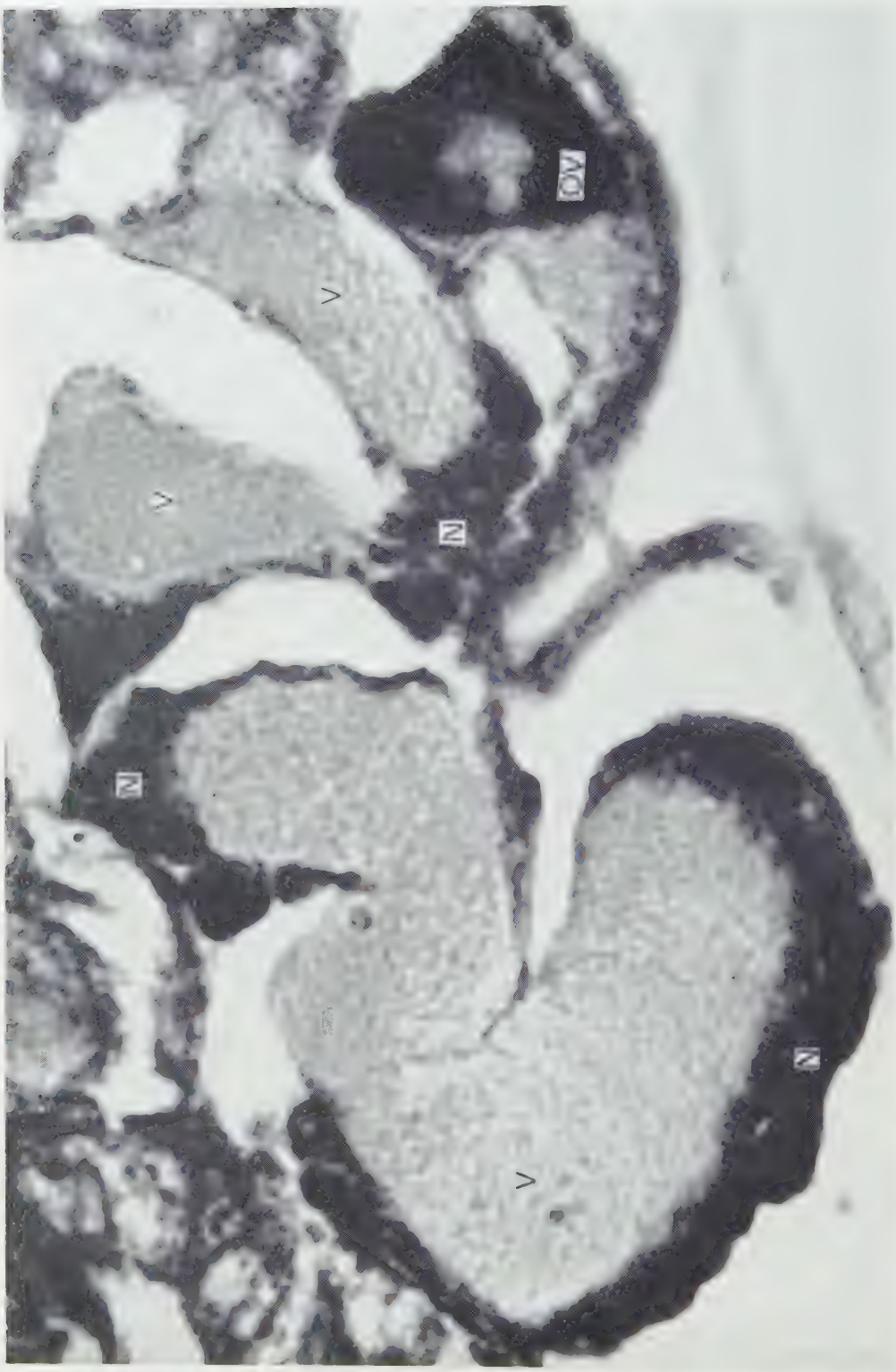
(9) E. R. Downing, *The connections of the gonadial blood vessels and the form of the nephridia in the* Arenicolidae, « Biol. Bull. », vol. XVI, p. 246 (1908).

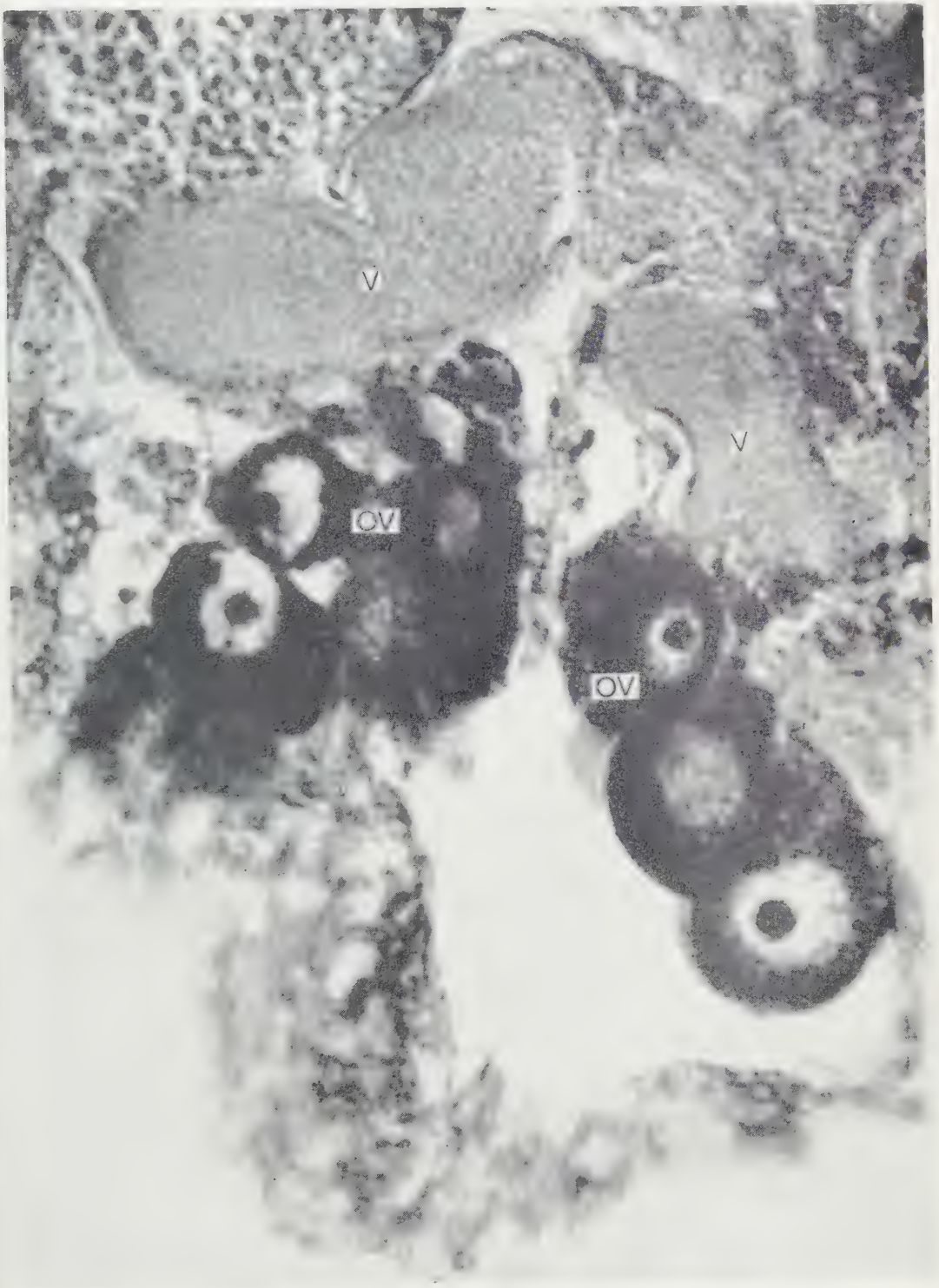
(10) E. Meyer, *Studien über den Körperbau der Anneliden*, « Mitt. Zool. Stat. Neapel », Bb. VII, p. 592 (1887); Bd. VIII, p. 462 (1888).

(11) S. Jyssum, *Investigations of the neoblasts and oogenesis in the Serpulid* Pomatoceros triqueter *L.*, « Nytt Mag. Zool. », vol. V, p. 5 (1957).

(12) J. Fraipont, *Le genre* Polygordius, « Fauna und Flora des Golfes von Neapel », Mon. XIV (1887).

Z
Z
Z


CV
Z
Z
Z
Z


V
V
OV
OV

SPIEGAZIONE DELLE TAVOLE I–III

Tav. I. – Particolare del vaso (*v*) attorniato da neoblasti (*n*), intensamente basofili, nella zona acheta di un esemplare in rigenerazione. 2125 ×.

Tav. II. – Particolare del vaso (*v*) attorniato da neoblasti (*n*) nella zona acheta. Nel primo metamero addominale rigenerato, un ovocita (*ov*). 1740 ×.

Tav. III. – Particolare dei due primi metameri addominali rigenerati. I due grappoli di ovociti (*ov*) aderiscono ancora in parte al grosso vaso (*v*) circonvoluto. – Colorazione, in tutti e tre gli esemplari, con emallume di Mayer ed eosina. 1400 ×.

Fisiologia. — *La propagazione dell'eccitamento nel miocardio ventricolare del cuore di coniglio* (*). Nota (**) di GIAN CARLO AGNOLI ed EDELWEISS COTTI, presentata dal Socio G. C. PUPILLI.

La propagazione dell'eccitamento nel muscolo cardiaco è stata studiata, in tempi non più recenti, mediante derivazioni monopolari di superficie. Da tali studi è risultato che alla superficie epicardica ventricolare del cuore di cane, l'eccitamento compare più precocemente in un'area circoscritta della parete anteriore del ventricolo destro e si propaga quindi ai rimanenti territori [Lewis e Rothschild (1), Harris (2)]. In seguito, le più corrette misure della latenza locale di eccitamento effettuate mediante derivazione dipolare « differenziale » [Schaefer e Trautwein (3)], pur confermando nelle sue linee essenziali il decorso temporale dell'eccitamento nella superficie dei ventricoli, hanno dato evidenza al fatto che col crescere della distanza del punto esplorato dalla sede precocemente eccitata, la latenza locale aumenta meno di quanto si avrebbe per effetto di una propagazione centrifuga del processo eccitatorio, lungo le lamine sottoepicardiche, con la velocità di conduzione propria del miocardio comune. Sul fondamento di questo dato sperimentale è stata ammessa indirettamente la penetrazione intramurale del tessuto di Purkinje come attivatore indipendente di limitati territori miocardici della parete.

Le recenti ricerche attuate mediante derivazione intramurale dell'attività elettrica hanno provato che nelle lamine cardiache immediatamente sottoendocardiche l'eccitamento si propaga tangenzialmente alla superficie endocardica. L'attivazione dei rimanenti territori della parete ventricolare non è stata per altro interpretata in modo univoco dai diversi Autori: essa si realizzerebbe per propagazione di un unico fronte di eccitamento diretto, con velocità uniforme, dall'endocardio all'epicardio [Scher e Young (4)], ovvero sarebbe dovuta alla confluenza di circoscritte aree di depolarizzazione [Durrer e van der Tweel (5)]. Applicando il suddetto metodo di derivazione intramurale al ventricolo sinistro di cane sono stati ottenuti i seguenti valori di velocità di propagazione: 0,3–0,4 m/sec [Rodriguez e Sodi-Palla-

(*) Lavoro eseguito, col sussidio del Consiglio Nazionale delle Ricerche, negl'Istituti di Fisiologia umana e di Clinica medica generale dell'Università di Bologna.

(**) Pervenuta all'Accademia il 9 luglio 1960.

(1) T. LEWIS a. M. A. ROTHSCHILD, « Phil. Trans. roy. Soc. », CCVI, 181 (1915).

(2) A. S. HARRIS, « Amer. J. Physiol. », CXXXIV, 319 (1941).

(3) H. SCHAEFER u. W. TRAUTWEIN, « Pflüger's Arch. », CCLI, 417 (1949).

(4) A. M. SCHER a. A. C. YOUNG, « Ann. New York Acad. Sci. », LXV, 768 (1957).

(5) D. DURRER a. H. VAN DER TWEEL, « Ann. New York Acad. Sci. », LXV, 779 (1957).

res [6]], 0,15 m/sec [Scher, Young, Malmgren e Paton [7]], 0,5 m/sec [Durrer, van der Tweel e Blickman [8]]. Nel considerare tali risultati sorge il dubbio che i valori di velocità di conduzione dell'eccitamento che si calcolano sui tracciati ottenuti per mezzo di un supporto polipolare, possano non corrispondere a quelli reali, in quanto la direzione di allineamento dei terminali del supporto stesso non coincide necessariamente con quella di propagazione del potenziale.

Con le presenti ricerche ci siamo proposti di determinare il senso di propagazione dell'eccitamento nel miocardio ventricolare, in direzione parallela all'altezza della parete medesima, e di misurare inoltre la velocità di conduzione di tale processo. Le nostre ricerche sono state eseguite nel cuore isolato di coniglio, derivando l'attività elettrica dalla parete del ventricolo sinistro, a varia profondità, per mezzo di un supporto polipolare [Agnoli e Cotti [9]]. Introdotto tale supporto perpendicolarmente alla superficie epicardica, i fenomeni elettrici sono stati derivati con procedimento dipolare utilizzando terminali distanti 0,5–1 mm l'uno dall'altro, a fine di ottenere una prevalente informazione delle variazioni di potenziale di origine locale [Schaefer [10]].

Negli elettrogrammi dipolari, l'attivazione dei territori esplorati si palesa con una variazione di potenziale ampia, spesso preceduta da un'onda di assai minore ampiezza e di polarità opposta; il fronte e la coda dell'oscillazione principale sono costituiti da tratti di differente pendenza. Si registrano talora complessi chiaramente difasici costituiti da due onde di ampiezza presso che uguale. L'aspetto degli elettrogrammi derivati a varia profondità dalla parete del ventricolo nel corso di una stessa esplorazione, è assai variabile; tale fatto verosimilmente dipende dalla possibilità che l'angolo formato dalla direzione di propagazione dell'eccitamento con l'asse maggiore del supporto polipolare ovvero il senso di propagazione del processo medesimo non si mantengano costanti nei territori esplorati dalle successive coppie di derivazione. Conforme a quanto è stato da noi esposto in precedenza [Agnoli e Cotti [9]] circa alla possibilità di riconoscere l'inizio dell'attivazione locale nei tracciati monopolari registrati simultaneamente a quelli dipolari, abbiamo impiegato i terminali di tre fori successivi dell'ago polipolare registrando ciascuno dei rispettivi elettrogrammi monopolari insieme al tracciato dipolare derivato per mezzo di due altri terminali appartenenti ai fori estremi medesimi e distanti 1 mm l'uno dall'altro. Tale disposizione sperimentale consente un'analisi dei complessi dipolari sul fondamento delle

(6) M. I. RODRIGUEZ a. D. SODI-PALLARES, «Amer. Heart J.», XLVI, 629 (1952).

(7) A. M. SCHER, A. C. YOUNG, A. L. MALMGREN a. R. R. PATON, «Circ. Res.», I, 539 (1953).

(8) D. DURRER, H. VAN DER TWEEL a. J. R. BLICKMAN, «Amer. Heart J.», XLVIII, 13 (1954).

(9) G. C. AGNOLI ed E. COTTI, «Rend. Acc. naz. Lincei», Cl. Sci. fis., mat. nat., ser. 8ª, questo volume (1960).

(10) H. SCHAEFER, «Ann. New York Acad. Sci.», LXV, 743 (1957).

informazioni che le successive derivazioni monopolari, nel loro insieme, possono fornire circa alla direzione e al senso di propagazione dell'eccitamento nella sede esplorata.

Quando col procedimento dipolare si registra un'onda monofasica, più spesso è dato osservare nei tracciati monopolari un regolare avanzamento dell'onda di depolarizzazione nei territori esplorati. In tali casi, applicando il suddetto procedimento di derivazione simultanea monopolare e dipolare ai territori situati nel terzo esterno o nella parte più esterna del terzo medio della parete ventricolare, si osservano tra i principali fenomeni dei due tracciati le relazioni temporali che appresso esponiamo: si abbia presente che dai territori medesimi si registrano per derivazione monopolare variazioni tetrafasiche di potenziale, delle quali la 3ª onda (negativa) segnala col suo inizio l'inizio della depolarizzazione locale [Agnoli e Cotti [9]].

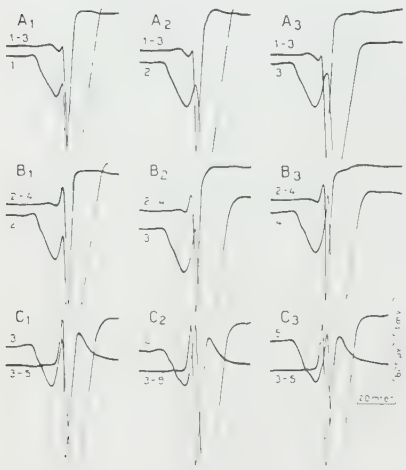


Fig. 1. – Attività elettrica derivata dai due terzi interni della parete ventricolare.

Introduzione del supporto polipolare per la faccia anteriore del ventricolo sinistro in prossimità del setto. La derivazione dipolare, da territori distanti tra loro 1 mm, è stata effettuata simultaneamente a quella monopolare dai territori medesimi come anche da quello intermedio. Nei tracciati dipolari (1–3, 2–4, 3–5) una deflessione verso il basso corrisponde a una variazione negativa di potenziale del terminale più vicino all'endocardio. L'inizio del fronte e la sommità del complesso dipolare coincidono con l'inizio di una variazione negativa di potenziale nel territorio estremo eccitato per primo e rispettivamente in quello intermedio; durante la coda del complesso dipolare il fenomeno medesimo s'inizia nel territorio eccitato per ultimo. L'eccitamento si propaga in senso endo–epicardico. Le calibrazioni date in C_3 valgono anche per gli elettrogrammi corrispondenti degli altri tracciati.

1° Nel tracciato monopolare ottenuto con la utilizzazione del terminale estremo corrispondente alla sede in cui la variazione di potenziale s'inizia precocemente, la comparsa della 3ª deflessione coincide con l'inizio del secondo tratto del fronte del complesso dipolare, tratto che palesa la maggiore pendenza, ovvero con l'inizio del fronte stesso quando la sua pendenza è uniforme (fig. 1, C_1). 2° La sommità (valore del voltaggio massimo) del complesso dipolare è raggiunta simultaneamente all'inizio della 3ª deflessione dell'elettrogramma monopolare che si registra col terminale posto tra i due impiegati nella derivazione dipolare ed equidistante dai medesimi (fig. 1, C_2). 3° Nel tracciato monopolare ottenuto con la utilizzazione del terminale estremo corrispondente alla sede in cui la variazione di potenziale si palesa tardivamente, la 3ª deflessione s'inizia durante la coda del complesso dipolare (fig 1, C_3). 4° Il tratto più rapido del fronte del complesso dipolare ovvero il fronte medesimo se uniforme è la sua pendenza, si genera per l'effetto risultante di variazioni di potenziale di segno opposto nei territori estremi di derivazione: mentre da quello attivato precocemente si registra una variazione negativa di potenziale (3ª deflessione), per una durata pari al ritardo

dell'inizio della 3ª deflessione nel territorio eccitato tardivamente, da questo ultimo si deriva una variazione positiva di potenziale (2ª deflessione). 5° Quando col procedimento dipolare si registrano i primi fenomeni elettrici, vale a dire l'eventuale onda iniziale di scarsa ampiezza e il primo tratto del fronte dell'onda principale, nei territori esplorati si genera una variazione positiva di potenziale, la 2ª deflessione dell'elettrogramma monopolare.

Applicando il procedimento di derivazione simultanea monopolare e dipolare in territori appartenenti al terzo interno o alla parte più interna del terzo medio della parete ventricolare, è possibile riconoscere un'analoga dipendenza del complesso monofasico dipolare dai fenomeni elettrici dipendenti dal graduale avanzamento dell'onda di attivazione nei territori esplorati fig. 1, A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3).

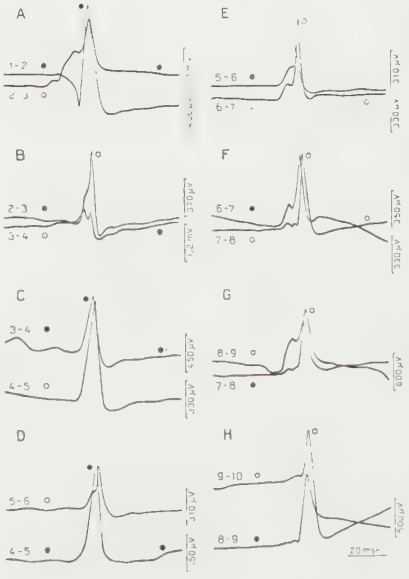


Fig. 2. – Attività elettrica derivata dai due terzi esterni della parete ventricolare sinistra.

Introduzione dell'ago per la faccia antero-laterale. Ciascuna coppia di elettrogrammi è stata ottenuta per derivazione dipolare da tre territori successivi, distanti 0,5 mm l'uno dall'altro (1–2, 2–3, 3–4, 4–5, 5–6, 6–7, 7–8, 8–9). Una deflessione verso l'alto del tracciato corrisponde a una variazione negativa di potenziale dell'elettrodo più vicino all'endocardio. Si noti che: 1° il senso di propagazione dell'eccitamento è endo-epicardico; 2° la velocità del processo medesimo calcolata in A è di 1 di m/sec, nei rimanenti tracciati è di 0,5 ± 0,1 m/sec.

Un'onda monofasica di scarsa ampiezza è stata talora derivata col procedimento dipolare in mancanza di una propagazione regolare del fronte di eccitamento: in questi casi, i successivi territori esplorati sono raggiunti dal fronte medesimo presso che simultaneamente. Si noti inoltre la possibilità di derivare col procedimento dipolare complessi difasici costituiti da due onde di ampiezza quasi uguale: tali complessi si generano quando l'attivazione dei territori estremi di esplorazione viene effettuata da due onde di depolarizzazione che percorrono in senso inverso la stessa direzione. L'attivazione nel territorio esplorato col terminale intermedio a quelli della derivazione dipolare, s'inizia allora precocemente ovvero tardivamente rispetto all'inizio del fenomeno medesimo nei due territori estremi.

I vari fenomeni osservati si svolgono in modo da dimostrare chiaramente che sul fondamento delle informazioni fornite dalle simultanee derivazioni

monopolari e dipolari è possibile accertare l'occorrenza o non di una propagazione dell'eccitamento parallela alla direzione di allineamento dei terminali.

La velocità di propagazione dell'eccitamento è stata calcolata sui tracciati ottenuti per derivazione dipolare da tre territori successivi (fig. 2, A–H): dal ritardo della sommità di un complesso rispetto all'altro, essendo nota la distanza interpolare, era possibile infatti calcolare la velocità di conduzione, purché la direzione di allineamento dei terminali fosse quella stessa di propagazione dell'eccitamento. Al calcolo della velocità si riservavano quei tracciati in cui, per ciascuna coppia di territori esplorati col procedimento dipolare, le simultanee derivazioni monopolari dimostravano un graduale avanzamento del fronte di attivazione e in particolare la coincidenza della sommità del complesso dipolare con l'inizio della variazione negativa di potenziale che segnala l'arrivo dell'eccitamento in corrispondenza del terminale intermedio a quelli impiegati nella derivazione dipolare. S'intende che rispetto alle superfici naturali della parete ventricolare, il senso di propagazione dell'eccitamento è quello stesso in cui la sua latenza locale viene aumentando.

Dalle ricerche eseguite risulta quanto segue. Nei territori compresi tra la superficie endocardica e un livello di profondità di 1,5–2 mm dalla superficie medesima (approssimativamente terzo interno della parete), l'attivazione si propaga con velocità pari a $1 \pm 0{,}2$ m/sec, in senso endo–epicardico. Negli strati via via più profondi, fino alla superficie esterna del cuore, l'eccitamento si propaga nella maggior parte dei casi in senso endo–epicardico, talora in senso epi–endocardico: in entrambi i sensi la velocità di conduzione è di $0{,}5 \pm 0{,}1$ m/sec. Nelle sedi anzidette i rispettivi valori di velocità risultano costanti: infatti la latenza locale di eccitamento (misurata come ritardo della sommità del complesso dipolare rispetto a quella dell'omologo complesso registrato dalla sede di attivazione più precoce) è funzione lineare della distanza del punto esplorato da quello eccitato per primo.

Di recente è stato visto che la velocità di propagazione dell'impulso in fasci isolati di miocardio comune del cuore di cane e di capra varia da 0,44 a 0,72 m/sec [Draper e Mya–Tu [11]]: il valore da noi trovato nei due terzi esterni della parete ventricolare concorda dunque coi valori noti della velocità di conduzione dell'impulso nelle fibre del tessuto energetico. Per quanto concerne la conduzione dell'eccitamento nei territori compresi entro il terzo interno della parete ventricolare, tenuto conto che nei nostri esperimenti la direzione di allineamento dei terminali è parallela all'altezza della parete stessa, è lecito arguire che la rapida conduzione riscontrata dipenda dalla presenza negli strati medesimi di fibre nodali a decorso rampicante [Robb, Kaylor e Turman [12], Robb [13]]. E il fatto che in limitati territori compresi generalmente nel terzo esterno dello spessore esplorato e più spesso in vici-

(11) M. H. Draper a. M. Mya–Tu, «Quart. J. exp. Physiol.», XLIV, 91 (1959).
(12) J. S. Robb, C. T. Kaylor a. W. G. Turman, «Amer. J. Med.», V, 324 (1948).
(13) J. S. Robb, «Ann. New York Acad. Sci.», LXV, 819 (1957).

nanza del setto l'eccitamento si può propagare in senso epi–endocardico si spiega appunto ammettendo che fibre nodali, aventi origine nello strato sottoendocardico della parete ovvero nella profondità del setto, a causa dello sfioccarsi della branca sinistra del fascio di His nei suoi elementi, entro lo spessore murale stesso trasmettano l'eccitamento a una profondità maggiore rispetto alle rimanenti fibre rampicanti e quindi attivino il miocardio energetico circostante anche a ritroso rispetto all'ordinario senso di propagazione dell'impulso. Giova infine notare che anche per gli elementi del tessuto nodale è stata verificata la dipendenza della velocità di conduzione dal calibro della fibra [Draper e Mya–Tu [11]]: con la progressiva diminuzione del calibro medesimo, la velocità di conduzione nei « falsi tendini » del cuore di cane e di capra diminuisce da 3,2 a 1,3 m/sec [Draper e Weidmann [14]]. Si noti come i valori minimi di velocità ora riferiti coincidano con quelli massimi da noi calcolati nei territori appartenenti al terzo interno della parete.

(14) M. H. DRAPER a. S. WEIDMANN, « J. Physiol. », CXV, 74 (1951).

Biologia. — *Lo sviluppo del tubo neurale in code di embrioni di Anfibi anuri privati della corda dorsale. (Esperienze in* Bufo bufo *ed in* Rana esculenta [*]. Nota [**] di Aldo Rossi, presentata dal Corrisp. A. Stefanelli.

È noto che durante le prime fasi dello sviluppo embrionale e larvale degli Anfibi anuri, la corda dorsale esercita un ruolo fondamentale sullo allungamento del tronco e della coda dell'animale (Morgan e Davis 1903 [1] Manicastri 1903 [2], Giardina 1913 [3], Comes 1928 [4], Stefanelli, Thermes e Poddie 1950 [5]).

Giardina (1913) in seguito alle sue esperienze di cordoectomia in embrioni di *Discoglossus pictus*, ha attribuito alla corda dorsale un notevole valore morfogenetico sullo sviluppo del sistema nervoso centrale e ha supposto che l'allungamento cefalico del tubo neurale dei Cordati sia da mettersi in rapporto con l'arretramento della corda dorsale. Cotronei (1922) [6] ha messo in evidenza che nel tubo neurale si può distinguere sperimentalmente una parte cordale da una precordale e ha osservato che nelle larve di Anfibi trattate con i sali di litio, il tubo neurale anteriore alla corda dorsale, subisce maggiori malformazioni del tubo neurale sovrastante la corda dorsale.

Che la corda dorsale sia un importante fattore nella morfogenesi del tubo neurale degli Anfibi anuri, risulta anche dalle esperienze di rigenerazione e di iperrigenerazione codale: Stefanelli, Thermes e Poddie (1950) hanno osservato infatti che la corda dorsale esercita un'azione tigmotropica sull'allungamento del tubo neurale caudale in rigenerazione.

Nel presente lavoro è stato preso in particolare considerazione lo sviluppo del tubo neurale di code di embrioni di Anfibi anuri (*Bufo bufo* e *Rana esculenta*) privati della corda dorsale allo stadio di pieghe neurali aperte.

Il valore di tale ricerca sta proprio nel fatto che il tubo neurale fin dalle prime fasi del suo allungamento in direzione caudale, si è sviluppato in completa assenza della corda dorsale.

L'asportazione della corda è stata eseguita allo stadio di pieghe neurali aperte (*Bufo bufo*: stadio 13 secondo le tabelle di Rossi 1958 [7] – *Rana esculenta*: stadio 14 secondo le tabelle di sviluppo della *Rana pipiens* compilate da Schumway 1940) [8]. La corda è stata asportata con l'aiuto di un capello innestato in una bacchetta di vetro, praticando un taglio sagittale mediano lungo la placca neurale, separando quindi l'intero cordone di cellule cordali dalle masse laterali del mesoderma.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia comparata «G. B. Grassi» dell'Università di Roma, con il contributo del C.N.R.

(**) Pervenuta all'Accademia il 12 luglio 1960.

I due labbri della ferita sono stati quindi ravvicinati e tenuti insieme con due sottili lastrine di vetro, ricavate da un vetrino coprioggetto.

Dopo che i due lembi della ferita si erano saldati, alcuni embrioni operati (*Rana*) sono stati uniti in parabiosi con portatori di pari stadio, mentre altri (*Bufo*) sono stati lasciati sviluppare da soli.

Le operazioni sono state eseguite in soluzione fisiologica di Holtfreter. Gli embrioni sono stati fissati in Goldschmitt, mentre le larve in Sanfelice. Le sezioni seriate di 10 μ, sono state colorate con emallume di Mayer ed eosina.

Gli embrioni operati hanno avuto in un primo periodo del loro sviluppo (tra gli stadi di pieghe neurali aperte e di circolazione branchiale circa) un allungamento del tronco e della coda pressapoco simile a quella dei controlli; verso gli stadi di fine tuorlo, vi era già una considerevole differenza fra la lunghezza (del tronco e della coda) degli individui operati e quella dei controlli di pari età.

Nei giorni successivi, tali differenze si sono accentuate; le code prive di corda, dopo aver raggiunto una certa lunghezza, hanno cessato di crescere. Tali code hanno la pinna dorsale e ventrale; la muscolatura si estende lungo l'asse mediale, ma non raggiunge l'estremità caudale e in suo luogo c'è un allineamento di cellule pigmentate.

Le code prive di corda sono in generale rettilinee; tali code pur non essendo completamente immobili, non sono capaci di dare una spinta motrice al corpo dell'animale. Infatti le larve prive di corda e non unite in parabiosi (*Bufo bufo*) restano rovesciate su un fianco, praticamente immobili e incapaci di nutrirsi da sole. Anche Kitchin (1949) [9] trova che l'allevamento degli individui di *Amblystoma punctatum* cordoectomizzati, è un difficoltoso problema. Nei miei esperimenti ho risolto in parte questo ostacolo, unendo in parabiosi gli individui operati; in questo modo il portatore direttamente, tramite la fusione degli intestini e indirettamente, tramite le connessioni vasali, nutre l'operato e lo fa vivere più a lungo; la durata della vita delle larve operate non unite in parabiosi (*Bufo bufo*) è stata al massimo di 10 giorni, mentre quella delle larve unite in parabiosi (*Rana*) 40–45 giorni dopo l'operazione.

In conseguenza dell'ablazione della corda, la regione assile del tronco compresa fra il piano trasverso passante per le otocisti e quello passante per la cloaca, non si allunga e resta considerevolmente più ridotta di quella corrispondente del controllo di pari età; anche la regione ventrale del tronco ha un volume minore rispetto a quella dei controlli, accompagnata da una riduzione delle spire intestinali.

La parte cefalica degli individui cordoectomizzati antecedente al piano trasverso passante per le otocisti non ha subìto invece gravi alterazioni morfogenetiche in conseguenza dell'ablazione della corda dorsale.

Dall'esame microscopico delle code prive della corda risulta che sono presenti il tubo neurale e i miotomi caudali (figg. 1–3); nella parte prossimale della coda i miotomi sono in via generale fusi medialmente al disotto del

tubo neurale, mentre nelle parti distali i miotomi restano completamente separati; anche Lehmann (1926) [10], Cohen (1938) [11], Hoadley (1938) [12], Devillers (1948) [13], Kitchin (1949), Waddington e Perry (1956) [14] e Mulherkar (1960) [15] hanno osservato in Teleostei, Anfibi e Uccelli che asportando la corda o inibendola per mezzo dei sali di litio, del trypan blue o della temperatura (processi di mesodermizzazione o di entodermizzazione della corda) si ha sempre la fusione dei miotomi al di sotto del tubo neurale.

Nelle presenti esperienze si è osservato che nella coda degli animali operati il tubo neurale si è allungato linearmente in direzione caudale (figure 1, 2 e 3); tale fatto è interessante perché è noto che la corda esercita un'azione direttrice sullo sviluppo del tubo neurale caudale. Infatti Giardina (1913). Comes (1928), Stefanelli, Thermes e Poddie (1950) hanno osservato in code rigeneranti di larve di Anfibi anuri, che la corda dorsale ha un importante ruolo morfogenetico – nel senso tigmotropico (Stefanelli, Thermes e Poddie (1950) – sull'allungamento del tubo neurale caudale.

Poiché nelle presenti esperienze è stato osservato invece che il tubo neurale si può allungare linearmente in completa assenza della corda si deve ammettere che nelle prime fasi dello sviluppo embrionale (dallo stadio di neurula al bottone codale) il tubo neurale caudale ha insite capacità morfogenetiche che si esplicano indipendentemente dallo sviluppo della sottostante corda dorsale.

Anche per quanto riguarda lo sviluppo di tutta la coda cordoectomizzata nelle presenti esperienze si è osservato, conformemente ai risultati di Terni (1932) [16], Bytinski-Salz (1936) [17], Bijtel (1956) [18], che inizialmente il bottone codale si allunga anche in assenza della corda dorsale; tale coda tuttavia dopo un iniziale allungamento cessa di crescere.

È intuibile pertanto che la coda cordoectomizzata non prosegue nel suo sviluppo perché manca l'azione morfogenetica data dall'allungamento della corda dorsale e ciò fa pensare che negli Anfibi anuri la corda diventa il «motore» dell'allungamento della coda (vedi Bijtel, 1956) dopo che l'embrione ha superato gli stadi del bottone codale. Tengo a precisare che queste considerazioni vanno limitate agli Anfibi anuri perché negli Urodeli è stato dimostrato che la corda non rigenera già più allo stadio di bottone codale (Stefanelli 1956 [19]), ma viene sostituita da cartilagini assiali (Stefanelli e Capriata, 1943 [20]; H. Holtzer, S. Holtzer e G. Avery, 1955 [21]).

Ritornando al sistema nervoso delle code prive di corda, si è osservato che il tubo neurale caudale non ha subìto modificazioni di forma in conseguenza dell'ablazione della corda, anzi il suo diametro si è andato progressivamente riducendo nelle porzioni più caudali (figg. 1, 2 e 3), Giardina (1913) ha osservato invece che nelle code di *Rana esculenta*, asportate allo stadio di bottone codale, il tubo neurale si allarga dopo l'asportazione della corda dorsale; partendo dall'osservazione che nelle code operate il tubo neurale si espande in forma di ampolla dove manca la corda, l'autore ha formulato l'ipotesi che l'allargamento cefalico del tubo neurale delle larve di Ascidie e

la morfogenesi dell'encefalo dei Vertebrati sono da mettersi in rapporto con l'arretramento della corda dorsale.

Stefanelli, Thermes e Poddie (1950) hanno osservato invece che l'allargamento del tubo neurale in conseguenza dei processi traumatici, avviene ugualmente anche in presenza della sottostante corda dorsale; anzi gli Autori hanno messo in evidenza che la formazione di un'ampolla apicale è «un aspetto generale dell'attività morfogenetica nei processi rigenerativi del midollo spinale codale dei Vertebrati dotati di attività rigenerativa del midollo spinale».

Pertanto gli allargamenti del tubo neurale osservati da Giardina dopo l'asportazione della corda dorsale, non sono che ampolle apicali del tubo neurale in rigenerazione; infatti Giardina nell'eseguire l'ablazione della corda ha asportato completamente il bottone codale e di conseguenza ha tagliato il tubo neurale; è ovvio pertanto che operando in questo modo, si formano nel tubo neurale le ampolle apicali rigenerative indipendentemente dall'ablazione della corda.

Se effettivamente l'assenza della corda provocasse un allargamento del tubo neurale caudale, nelle presenti esperienze questo fenomeno si sarebbe dovuto chiaramente manifestare, poiché il tubo neurale della coda si è sviluppato fin dall'inizio privo della sottostante corda dorsale; invece le osservazioni personali dimostrano che il tubo neurale non si allarga in conseguenza dell'asportazione della corda, ma anzi si è progressivamente ridotto verso le regioni più caudali.

In conclusione, le seguenti esperienze hanno dimostrato che asportando completamente la corda dorsale a embrioni di Anfibi anuri (*Bufo bufo* e *Rana esculenta*) allo stadio di pieghe neurali aperte, non s'impedisce lo sviluppo di una coda esternamente normale; tuttavia tale coda dopo un iniziale allungamento, cessa di crescere, in quanto dopo la prima fase dello sviluppo dell'abbozzo caudale, viene a mancare l'azione morfogenetica data dall'allungamento della corda dorsale.

Nelle code prive di corda si è osservato che il tubo neurale si è allungato linearmente in direzione caudale e ha mantenuto inalterata la sua forma; si deve ritenere pertanto che nelle prime fasi dello sviluppo embrionale il tubo neurale caudale ha delle insite capacità morfogenetiche indipendenti dallo sviluppo della sottostante corda dorsale.

BIBLIOGRAFIA.

[1] T. H. MORGAN and S. E. DAVIS, *The internal factors in the regeneration of the tail of the tadpole*, «Arch. Entw. mech.», *15*, 314 (1903).

[2] N. MANICASTRI, *Osservazioni sulla rigenerazione e sull'accrescimento delle code delle larve di Anuri*, «Monit. Zool. Ital.», *14*, 317 (1903).

[3] A. GIARDINA, *Sul valore morfogenetico della corda dorsale. Studio sperimentale su embrioni e larve di anfibi*, «Arch. Ital. Anat. Embriol.», *12*, 443 (1913–14).

[4] S. COMES, *Sull'azione morfogenetica della corda dorsale nei riguardi del tubo neurale durante la rigenerazione della corda delle larve di Anfibi anuri*, «Boll. Ist. Zool. Univ. Palermo», *1*, 184 (1918–28).

[5] A. Stefanelli, G. Thermes e M. Poddie, *La rigenerazione del midollo spinale delle larve di Anfibi anuri e sue relazioni con la corda dorsale*, « Riv. Biol. », *42*, 239 (1950).

[6] G. Cotronei, *Suscettibilità differenziale, gradiente assiale e rapporti tra correlazioni e differenziazioni*, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (serie V), *31*, 473 (1922).

[7] A. Rossi, *Tavole cronologiche dello sviluppo embrionale e larvale del* Bufo bufo (*L.*), « Monit. Zool. Ital. », *66*, 133 (1958).

[8] W. Shumway, *Stages in the normale development of* Rana pipiens. – I. *External form*, « Anat. Rec. », *78*, 139 (1940).

[9] I. C. Kitchin, *The effects of notochordectomy in* Amblystoma mexicanum, « J. Exp. Zool. », *112*, 393 (1949).

[10] F. E. Lehmann, *Entwicklungsstörungen in der Medullaranlage von Triton, erzeugt durch Unterlagerungsdefekte*, « Arch. Entw. mech. », *108*, 243 (1926).

[11] A. Cohen, *Myotome fusion in the embryo of* Amblystoma punctatum *after treatment with lithiun and other agents*, « J. Exp. Zool. », *79*, 461 (1938).

[12] L. Hoadley, citato da A. Cohen (1938).

[13] C. Devillers, *Suppression du matérial chordal dans la gastrula de truite*, « C. R. Acad. Sci. Paris », *227*, 1411 (1948).

[14] C. H. Waddington and M. M. Perry, *Teratogenic effects of trypan blue on Amphibian embryos*, « J. Embryol. exp. Morph. », *4*, 110 (1956).

[15] L. Mulherkar, *The effects of trypan blue on chick embryos cultured in vitro*, « J. Embryol. exp. Morph. », *8*, 1 (1960).

[16] T. Terni, *Lo sviluppo della pinna degli Urodeli, in base a ricerche morfologiche e sperimentali*, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (serie VI), *15*, 896 (1932).

[17] H. Bytinski-Salz, *Lo sviluppo della coda negli Anfibi.* – II. *Alterazioni delle correlazioni fra i territori costituenti l'abbozzo codale e comportamento dell'ectoderma della pinna caudale*, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (serie VI), *24*, 82 (1936).

[18] J. H. Bijtel, *The growth of the tail in Urodele larvae*, « Experientia », *12*, 259 (1956).

[19] A. Stefanelli, *Regeneration in Vertebrates*, Edito da C. S. Thornton (*The developmental biology Conference series*) p. 27 (1956).

[20] A. Stefanelli e A. Capriata, *La rigenerazione del midollo spinale nella coda rigenerata dei Tritoni* (Triton cristatus *e* Triton taeniatus), « Ricerche di Morfologia », *20–21*, 1 (1943).

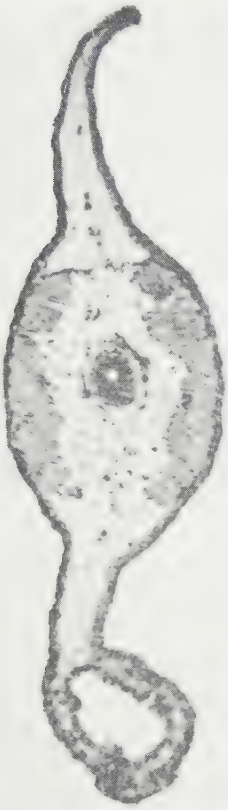
[21] H. Holtzer, S. Holtzer and G. Avery, *Morphogenesis of tail vertebrae during regeneration*, « J. Morphol. », *96*, 145 (1955).

SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA I

Figg. 1, 2, 3. – Sezioni di coda di *Bufo bufo* priva della corda dorsale, rispettivamente al livello prossimale, medio e distale.

Figg. 4, 5, 6. – Sezioni di coda del controllo di *Bufo bufo* di pari stadio, rispettivamente al livello prossimale, medio e distale.

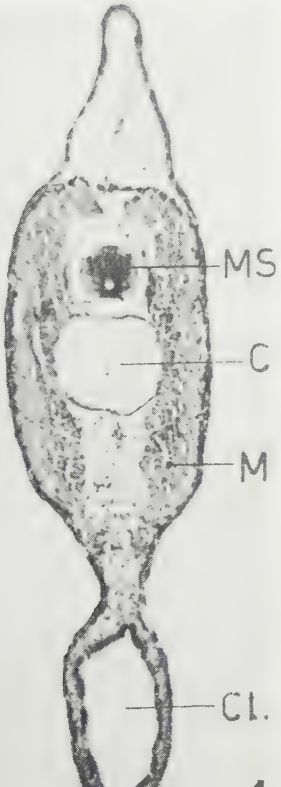
Abbreviazioni. – C = corda; Cl. = cloaca; M = muscolatura; MS = midollo spinale.
Ogni unità della scala in calce alla tavola è uguale a 100 μ.



1

2

3



4

5

6

Biologia. — *Lamelle annulate negli spermatozoi immaturi del rospo* (Bufo bufo (*L.*))(*). Nota(**) di BRUNO BERTOLINI, presentata dal Corrisp. A. STEFANELLI.

Le lamelle annulate sono delle particolari strutture che la microscopia elettronica ha permesso di osservare nel citoplasma di alcune cellule.

Esse furono osservate da diversi Autori (McCulloch 1952 [1]; Afzelius 1955 [2]; Palade 1955 [3]; Rebhun 1956 [4, 5]), ma fu Swift (1956) [6] che le descrisse in diversi tipi cellulari e le considerò un particolare organello citoplasmatico, dando loro il nome di lamelle annulate.

Queste strutture sono state ritrovate in oociti di Molluschi (Rebhun 1956 [4, 5]; Swift 1956 [6]), in oociti di Echinodermi (McCulloch 1952 [1]; Afzelius 1955 [2]; Merriam 1959 [7]; Gross, Philpott e Nass 1960 [8]), negli spermatociti del ratto (Palade 1955 [3]; Swift 1956 [6]) ed in quelli di un Crostaceo (Ruthmann 1958 [9]), nelle cellule del pancreas esocrino delle larve di *Amblystoma* (Swift 1956 [6]) ed in cellule tumorali (Schulz 1957 [10]; Wessel e Bernhard 1957 [11]).

Le lamelle annulate consistono di due membrane parallele, connesse da anelli di un materiale più denso agli elettroni, e la loro struttura ricorda molto da vicino quella della membrana nucleare con i suoi pori. Gli anelli appaiono disposti regolarmente secondo un disegno esagonale nelle sezioni parallele alla superficie della lamella.

Dalle osservazioni di Rebhun (1956) [4, 5] e di Ruthmann (1958) [9] si è potuto accertare che le lamelle annullate corrispondono alle formazioni basofile di natura ergastoplasmatica, ricche di RNA, già note alla citologia classica ed indicate col nome di corpi cromatoidi negli spermatociti dei Crostacei o come nuclei vitellini negli oociti.

La basofilia delle lamelle non comporta in generale la presenza di granuli di Palade nella loro struttura, per cui esse contengono dell'RNA in forma agranulare, invisibile al microscopio elettronico.

Negli spermatidi del rospo Burgos e Fawcett (1956) [12] osservarono delle strutture che essi definiscono di ignota origine e funzione, supponendo che forse siano omologhe alla « manchette » degli spermatozoi dei Mammiferi. Nelle fotografie di sezioni trasversali delle teste degli spermatidi, pubblicate da questi Autori, esse appaiono come due strutture parallele, con variazioni periodiche di densità nel senso della loro lunghezza.

La loro posizione è da una parte del nucleo, e nelle sezioni longitudinali della testa degli spermatidi esse non sono visibili, come dovrebbero essere

(*) Ricerca eseguita nell'Istituto di Anatomia comparata « G. B. Grassi » dell'Università di Roma.

(**) Pervenuta all'Accademia il 12 luglio 1960.

invece se occupassero la stessa posizione della « manchette » degli spermatozoi dei Mammiferi, che aderisce tutt'intorno all'equatore del nucleo e si prolunga, come una sottile membrana cilindrica o conica, verso la parte caudale del citoplasma.

L'identificazione delle strutture osservate da Burgos e Fawcett con le lamelle annulate di Swift è appunto l'oggetto della presente Nota.

Le osservazioni sono state compiute su spermatozoi immaturi di rospo (*Bufo bufo* (L.)); piccoli frammenti di testicolo sono stati fissati per 3 ore in OsO_4 1 % in tampone acetato–veronal a pH 7,2, lavati in soluzione di Ringer, disidratati in alcool etilico a concentrazione crescente e successivamente in acetone, sempre a 0° C, infiltrati per 2 ore in *n*–butil–metacrilato/metil–metacrilato 19 : 1 + 1 % di perossido di benzoile come catalizzatore, poi per 24 ore nella stessa miscela semipolimerizzata, ed infine inclusi completando la polimerizzazione a 60° C.

Le sezioni sono state eseguite con l'ultramicrotomo Sjöstrand LKB 3314 A, e fotografati con i microscopi elettronici Philips e RCA EMU–2 (1).

Nelle sezioni longitudinali di alcuni spermatozoi ancora non completatamente maturi, ma che appaiono assai vicini alla completa maturazione, per la struttura del nucleo, compatta e a grossi granuli, e per la scarsità del citoplasma, ridotto ad un lobo ricco di mitocondri, che circonda la metà caudale del nucleo e la base della coda, appaiono delle strutture facilmente identificabili come lamelle annulate.

Esse sono particolarmente evidenti e riconoscibili nelle sezioni che tagliano la cellula parallelamente alla superficie della lamella e quindi solo in poche cellule tra quelle sezionate.

Come negli altri tipi cellulari in cui sono state osservate, anche negli spermatozoi del rospo le lamelle annulate constano di anelli fortemente opachi agli elettroni, disposti regolarmente secondo un disegno esagonale, ed uniti da una matrice appena più opaca del citoplasma circostante e del « foro » interno dell'anello.

Non ho potuto osservare granuli associati alle lamelle od all'interno degli anelli, concordemente alla maggioranza degli Autori; una eccezione a questo riguardo è rappresentata dalle osservazioni di Merriam [7], sugli oociti di un Echinoderma.

Il diametro degli annuli è di circa 400 Å, il diametro del « foro » di circa 200 Å e lo spessore dell'anello di circa 100 Å. Anche le dimensioni corrispondono quindi a quelle delle lamelle annulate descritte dai vari Autori.

Il significato di questo organello cellulare è ancora assai poco chiaro. Secondo alcuni Autori (Swift 1956 [6]; Rebhun 1956 [4, 5]; Ruthmann 1958 [9]) esso sarebbe una particolare forma di ergastoplasma, originantesi dalla membrana nucleare.

(1) Ringrazio il prof. D. Gueritore, alla cui cortesia devo l'aver potuto usufruire del microscopio elettronico RCA dell'Istituto « Regina Elena » per la cura e lo studio dei tumori.

La grande somiglianza tra la struttura delle lamelle annulate e quella della membrana nucleare, ha fatto pensare che esse potessero rappresentarne dei residui, rimasti da una precedente divisione cellulare (Afzelius 1955 [2]), ed in effetti le recenti osservazioni di Porter e Machado (1960 [13]) sulle mitosi delle cellule dell'apice radicale, sembrano confermare che i frammenti della membrana nucleare contribuiscano a formare il reticolo endoplasmatico delle cellule figlie, e che viceversa la membrana nucleare si possa ricostituire a partire da frammenti di citomembrane ergastoplasmatiche.

L'ipotesi dell'origine nucleare delle lamelle annulate è stata però criticata da Afzelius (1957 [14]), che non crede che la somiglianza strutturale permetta senz'altro di fare delle affermazioni sulla loro origine.

Nella evoluzione degli elementi germinali maschili del rospo non si possono notare delle membrane nucleari con dei pori così notevoli ed evidenti, come dovrebbero essere invece se da queste dovessero direttamente formarsi le lamelle annulate.

È inoltre ben noto che nella maturazione funzionale dello spermatide la massima parte delle ribonucleoproteine citoplasmatiche, cioè, dal punto di vista morfologico, l'ergastoplasma, al quale apparterrebbe anche la struttura in questione, vengono espulse con la goccia di citoplasma che viene eliminata (Pasteels 1948 [15]; Stefanelli 1951 [16]; Daled 1951 [17]; Stefanelli e Urbani 1954 [18]).

Da quanto è stato esposto risulta perciò che tanto la natura, quanto l'origine e la funzione delle lamelle annulate sono ancora assai poco chiare, ma anche che lo studio di questa struttura potrà portare dei contributi al problema dei rapporti morfologici e funzionali tra il nucleo e l'ergastoplasma.

BIBLIOGRAFIA.

[1] D. MCCULLOCH, *Fibrous structures in the ground cytoplasm of the* Arbacia *egg.*, « J. exp. Zool. », *119*, 47–64 (1952).

[2] B. A. AFZELIUS, *The ultrastructure of the nuclear membrane of the sea urchin as studied with the electron microscope*, « Exptl. Cell Res. », *8*, 147–158 (1955).

[3] G. E. PALADE, *A small particulate component of the cytoplasm*, « J. Biophys. Biochem. Cytol. », *1*, 59–68 (1955).

[4] L. I REBHUN, *Electron microscopy of basophilic structures of some invertebrate oocytes. – I. Periodic lamellae and the nuclear envelope*, « J. Biophys. Biochem. Cytol. », *2*, 93–104 (1956).

[5] L. I. REBHUN, II. *Fine structure of the yolk nuclei*, « J. Biophys. Biochem. Cytol. », *2*, 159–170 (1956).

[6] H. SWIFT, *The fine structure of annulate lamellae*, « J. Biophys. Biochem. Cytol. », *2* Suppl. 415–418 (1956).

[7] R. W. MERRIAM, *The origin and fate of annulate lamellae in maturing Sand Dollar eggs*, « J. Biophys. Biochem. Cytol. », *5*, 117–121 (1959).

[8] P. R. GROSS, D. E. PHILPOTT e S. NASS, *Electron microscopy of the centrifuged Sea Urchin egg, with a note on the structure of the ground cytoplasm*, « J. Biophys. Biochem. Cytol. », *7*, 135–142 (1960).

[9] A. RUTHMANN, *Basophilic lamellar systems in the crayfish spermatocyte*, « J. Biophys. Biochem. Cytol. », *4*, 267–274 (1958).

[10] H. Schulz, *Elektronenmikroskopische Untersuchungen eines Mammakarzinoms der Ratte*, « Oncologia », *10*, 307–329 (1957).

[11] W. Wessel e W. Bernhard, *Vergleichende elektronenmikroskopische Untersuchung von Ehrlich– und Yoshida-Ascitestumorzellen*, « Z. Krebsforsch. », *62*, 140–162 (1957).

[12] M. H. Burgos e D. W. Fawcett, *An electron microscope study of spermatid differentiation in the toad* Bufo arenarum *Hensel*, « J. Biophys. Biochem. Cytol. », *2*, 223–239 (1956).

[13] K. Porter e R. D. Machado, *Studies on the endoplasmic reticulum. – IV. Its form and distribution during mitosis in cells of onion root tip*, « J. Biophys. Biochem. Cytol. », *7*, 167–180 (1960).

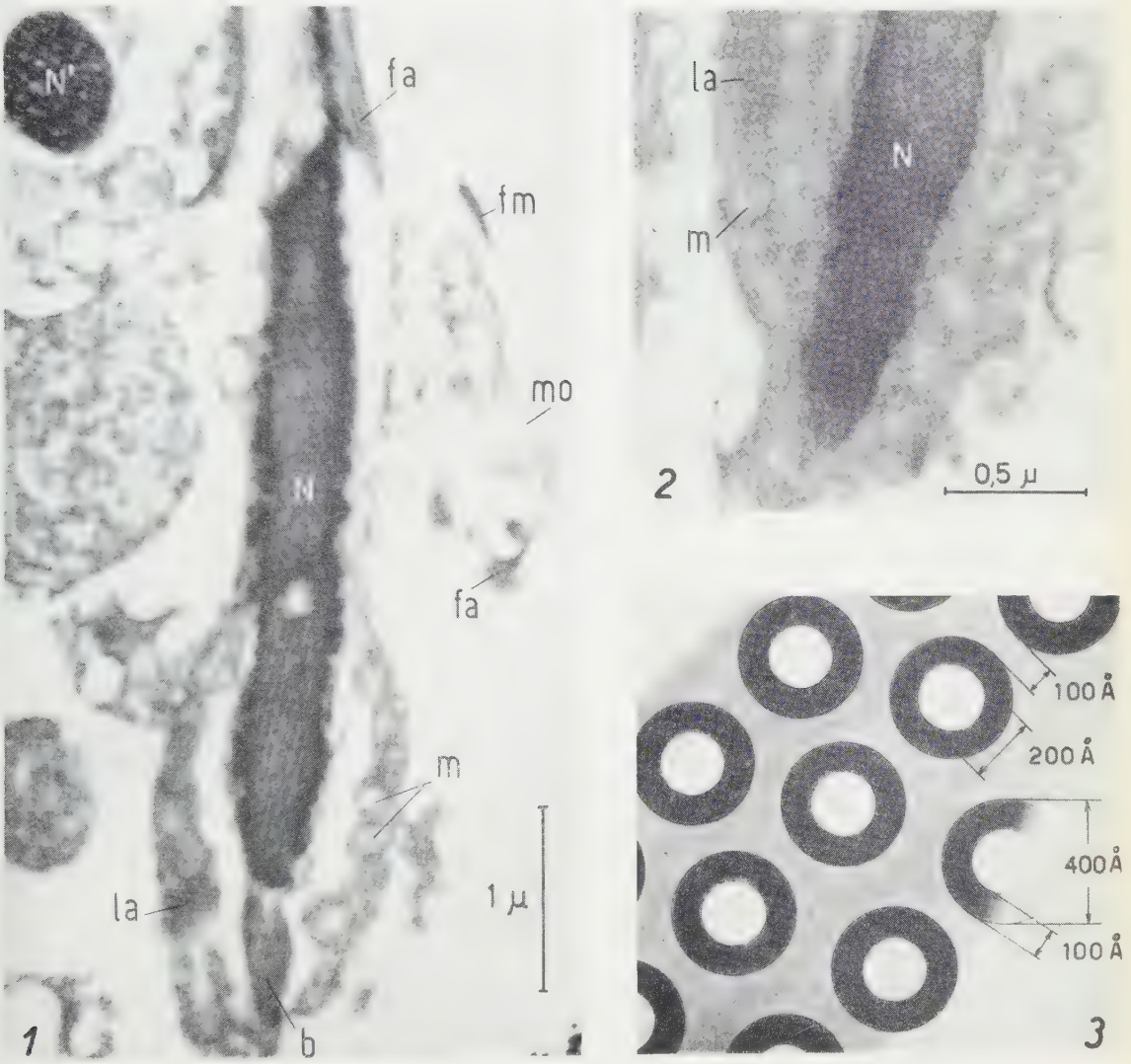
[14] B. A. Afzelius, *Electron microscopy of the basophilic structures of the sea urchin egg.*, « Z. Zellforsch. u. mikr. Anat. », *45*, 660–675 (1957).

[15] J. Pasteels, *Recherches sur le cycle germinal chez l'Ascaris. Etude cytochimique des acides nucléiques dans l'oogénèse, la spermatogénèse et le développement chez* Parascaris equorum *Goerze*, « Arch. de Biol. », *59*, 405–446 (1948).

[16] A. Stefanelli, *Aspetti istochimici del differenziamento*, « Boll. Soc. It. Biol. Sper. », *27*, 186–210 (1951).

[17] H. J. Daled, *Etude cytochimique sur l'évolution de l'acide ribonucléique dans la spermatogenèse du rat*, « Arch. d'Anat. micr. Morphol. exp. », *40*, 183–194 (1951).

[18] A. Stefanelli e E. Urbani, *Aspetti istochimici della spermioistogenesi di Cavia*, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (serie VIII), *16*, 282–287 (1954).



Figg. 1, 2. – Sezioni longitudinali di due spermatozoi; nel lobo citoplasmatico che circonda la parte caudale del nucleo (N) si notano numerosi mitocondri (*m*), le lamelle annulate (*la*) e la base della membrana ondulante della coda (*b*).

Nella fig. 1 intorno allo spermatozoo tagliato longitudinalmente, si notano sezioni di parti di altri spermi: un nucleo tagliato trasversalmente (N'), una sezione longitudinale di coda, che comprende il solo filamento assile (*fa*), ed una sezione trasversale che mostra il filamento assile munito della membrana ondulante (*mo*), al cui margine si trova un ispessimento opaco, il filamento marginale della membrana (*fm*).

Fig. 3. – Schema di una lamella annulata.

In esso sono indicate le misure approssimative e la regolare disposizione degli anelli, secondo un disegno esagonale.

Biologia. — *Derivazione di elementi nervosi da cellule di natura mesodermica nella rigenerazione del cordone nervoso dei Lombricidi* (Allolobophora caliginosa *ed* Allolobophora rosea) (*). Nota (**) di GINEVRA THERMES, presentata dal Corrisp. A. STEFANELLI.

In una mia precedente ricerca, i cui risultati sono in corso di pubblicazione (1960) [1], sottoposi numerosi individui, in parte appartenenti alla specie *Allolobophora caliginosa*, in parte appartenenti alla specie *Allolobophora rosea*, ad una operazione piuttosto complessa, nella zona centrale del corpo, alcuni segmenti dietro il clitello. Assieme a molte altre parti asportai un tratto del cordone nervoso, per una lunghezza variabile dai tre agli otto segmenti. In un individuo fissato 4 ore dopo l'operazione notai, addossato al moncone nervoso reciso della parte cefalica, un notevole ammasso di cellule di cicatrizzazione che, inferiormente, si mostrava collegato alla somatopleura della parete ventrale del corpo, mediante una larga banda di cellule, e superiormente era collegato alle cellule di cicatrizzazione che costituivano un notevole involucro attorno al vaso sanguigno ventrale. In un altro individuo della stessa ricerca, fissato 8 ore dopo l'operazione, potei stabilire che le cellule di cicatrizzazione, situate attorno al vaso sanguigno ventrale, provenivano dai dissepimenti.

Basandomi su questi dati, su una ricerca di Schwartz (1932) [2] in cui Egli sostenne che, nei Lombricidi, il ganglio cerebrale rigenerava a spese di cellule provenienti dal connettivo connesso con la muscolatura della faringe, e su osservazioni fatte da Friedlaender (1895) [3] e da Hescheler (1898) [4] (Friedlaender, nella rigenerazione del ganglio cerebrale, nei Lombricidi, ammise possibile la trasformazione di presunti leucociti in cellule nervose, ed Hescheler ammise la possibilità che, nella rigenerazione del cordone nervoso, nei Lombricidi, cellule di natura mesodermica si trasformassero in cellule nervose) sostenni anch'io l'ipotesi che, nella rigenerazione del cordone nervoso, cellule di natura mesodermica potessero dare origine a cellule nervose.

L'ipotesi poteva essere accettata, non solo in base ai dati sopra elencati, ma anche in base ad altri notevoli fatti. Al fatto cioè che nelle Planarie, Wolff e Dubois (1947) [5] sostennero l'esistenza di cellule mesodermiche totipotenti,

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Zoologia dell'Università di Cagliari.
(**) Pervenuta all'Accademia il 20 luglio 1960.
(1) G. THERMES, « Arch. Zool. It. », XLV (1960).
(2) H. G. SCHWARTZ, « J. Comp. Neurol. », 55 (1932).
(3) B. FRIEDLAENDER, « Zeitschr. f. wiss. Zool. », LX (1895).
(4) K. HESCHELER, « Jen. Zeitschr. », 31 (1898).
(5) E. WOLFF et F. DUBOIS, « C. R. Ac. Sc. », 224 (1947).

non solo, ma la totipotenza delle cellule di natura mesodermica venne sostenuta da Probst (1931) [6], da Dehorme (1949) [7] e da Stephan-Dubois (1956) [8] per i Policheti, e da Stolte per gli Oligocheti Limicoli. Con la speranza di raggiungere la dimostrazione dell'ipotesi concepita, nella presente ricerca, eseguii su 12 lombrichi, appartenenti in parte alla specie *A. caliginosa*, ed in parte alla specie. *A. rosea*, un semplice taglio trasversale, nella zona centrale del corpo, pochi segmenti dietro il clitello, dividendo così gli animali in due parti, una cefalica ed una caudale.

Presi in esame la rigenerazione del cordone nervoso in ambedue i monconi di ciascun individuo, fissando, in tempi successivi, in liquido di Bouin, quindi sezionando e colorando con ematossilina ed eosina, la parte interessata nel processo rigenerativo e quella prossima, comprendente un certo numero di segmenti.

Tra i 12 individui della ricerca tre si presentarono particolarmente interessanti in relazione al fine prestabilito: uno appartenente alla specie *A. caliginosa* e due appartenenti alla specie *A. rosea*. Le sezioni per tutti e tre furono trasversali.

Nell'individuo appartenente alla specie *A. caliginosa*, fissato 12 ore dopo l'operazione, nelle sezioni prossime al taglio, nel moncone cefalico (che rigenerava in direzione caudale) il cordone nervoso si presentava enormemente alterato. Questo processo degenerativo che il cordone nervoso subisce, subito dopo il taglio, è stato da me preso in esame in un altro lavoro di prossima pubblicazione; qui interessa notare che esso si trovava completamente circondato da un tessuto che, come si vedrà, è giusto chiamare tessuto di rigenerazione, collegato al vaso sanguigno ventrale ed alla somatopleura della parete ventrale del corpo, come si può osservare nella fig. 1, Tav. I. Nella fig. 2, Tav. I, appartenente ad una sezione un tantino più cefalica, quindi un pò più lontana dal taglio, il cordone nervoso, un pò meno degenerato, si individua meglio. Il tessuto di rigenerazione presenta gli stessi collegamenti prima esposti, ma non circonda più il cordone nervoso in modo completo, come nella sezione precedentemente esaminata. Le due figure, di tutta la sezione, comprendono la parte che interessa, situata tra la parete ventrale dell'intestino e la parete ventrale del corpo. Lo stesso si può dire delle figg. 3, 4, 5 e 6, Tav. I, appartenenti al moncone caudale (che rigenerava in senso cefalico) dello stesso individuo.

Dalla fig. 3 alla fig. 6 si passa via via da un punto assai prossimo al taglio ad un punto un tantino meno prossimo. Nella fig. 3 il cordone nervoso non si direbbe ancora presente: si nota però un ammasso di cellule collegate, sia al vaso sanguigno ventrale, sia alla somatopleura della parete del corpo. Nella fig. 4 questo ammasso di cellule aumenta e nelle figg. 5 e 6 si riconosce la presenza del cordone nervoso, per quanto esso sia assai alterato.

(6) G. Probst, « Arch. Entw.-mech. », 124 (1931).
(7) A. Dehorme, « Bull. Inst. Oceanogr. Monaco », 952 (1949).
(8) F. Stéphan-Dubois, « Bull. Soc. Zool. France », 81 (1956).

Esaminando la serie completa delle sezioni intermedie fra la sezione della fig. 3 e quella della fig. 5, si constata che le cellule dell'ammasso notato nella fig. 3, stanno addossate al cordone nervoso.

Le figg. 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 e 14, Tav. I rappresentano la stessa parte del corpo delle figure precedenti, del moncone cefalico, di un individuo appartenente alla specie *A. rosea*, fissato 12 ore dopo l'operazione.

Andando via via dalla fig. 7, appartenente ad una zona prossima al taglio, alla fig. 14, appartenente ad una sezione più cefalica, quindi un tantino più lontana dal taglio, si vede, compreso tra la parete ventrale dell'intestino, e la parete ventrale del corpo, un ammasso di cellule collegato con un vaso sanguigno e la somatopleura della parete ventrale del corpo. In questo ammasso di cellule, ad un certo punto, a sinistra (ciò si comincia a vedere con chiarezza nella fig. 11) si delimita, rispetto alla rimanente parte dell'ammasso situata a destra, il cordone nervoso. Nella fig. 12 l'ammasso di cellule, a destra, si è staccato dal cordone nervoso, ma nella fig. 13 di nuovo gli si addossa. Nella fig. 14, infine, il cordone nervoso ha ripreso un aspetto quasi normale e l'ammasso di cellule che gli stava addossato, a destra, ha finito quasi con l'estinguersi.

La fig. 15, Tav. I è l'ingrandimento della fig. 8, Tav. I, e precisamente della parte destra dell'ammasso di cellule prima descritto, ove si può notare chiaramente il collegamento di questo ammasso con la somatopleura della parete ventrale del corpo. Si vede come, in questo ammasso di cellule, superiormente, siano presenti diverse cellule nervose già notevolmente voluminose; ma il fatto di maggiore interesse consiste nella presenza di cellule nervose situate tra le maglie del tessuto della somatopleura, che ha un aspetto mesenchimatoso anche negli individui in condizioni normali. Data la disposizione di queste cellule, così regolare, così ordinata, dato il modo preciso con cui sono inserite fra le maglie della somatopleura, si deve escludere che possa trattarsi di elementi ivi migrati.

Ritengo perciò che queste cellule, già col nucleo grande ed abbastanza chiaro, con voluminoso nucleolo e con citoplasma basofilo, siano cellule della somatopleura (di natura mesodermica), trasformate in cellule nervose. Nella fig. 13 il piccolo mucchio di cellule addossate, a destra, al cordone nervoso, è separato da esso dalla membrana di quest'ultimo. In questo mucchio di cellule, come si può vedere meglio nell'ingrandimento (fig. 17, Tav. I), è presente una cellula nervosa, caratterizzata dal citoplasma basofilo, grande nucleo meno basofilo del citoplasma e notevole nucleolo. Seguendo le varie sezioni, si vede che questo mucchio di cellule è collegato alle cellule che nella fig. 16, Tav. I (ingrandimento della fig. 12), formano un ammasso staccato dal cordone nervoso e collegato alla somatopleura della parete del corpo. Qui è presente un grosso nucleo chiaro e granuloso, dotato di due nucleoli. Non penso che, per questo ultimo elemento, e per quello della fig. 17, possa trattarsi di cellule migrate dall'epidermide, perché in nessun punto dell'epidermide vi è indizio di migrazione, né penso che tale migrazione possa esserci stata in un tempo precedente, perché, quando si verifica, suole durare per

qualche giorno [1]. Ritengo quindi che si tratti, ancora una volta, di cellule della somatopleura, trasformate in cellule nervose.

Il terzo individuo che interessa esaminare, apparteneva alla specie *A. rosea*, e venne fissato 30 giorni dopo l'operazione. Ai fini di questa ricerca, si presentò interessante il solo moncone cefalico di questo individuo. Questo moncone, dopo 30 giorni dall'operazione, aveva rigenerato una sottile appendice lunga mm. 4,5.

Le figg. 18, 19, 20 e 21, Tav. II, appartengono a sezioni di questa appendice, assai prossime all'estremità libera, e precisamente, andando dalla fig. 18 alla fig. 21, ci spostiamo da una zona più caudale ad una zona meno caudale. La fig. 18 mostra come il cordone nervoso, a destra, sia collegato, mediante una banda di cellule, alle cellule che circondano il vaso sanguigno ventrale. L'ingrandimento di questa zona, nella fig. 22, Tav. II, mostra come, in questa banda, le cellule si stiano trasformando in cellule nervose. La fig. 19, Tav. II, mostra meglio questa trasformazione: qui, addossato al vero e proprio cordone nervoso, non solo vi è un gran mucchio di cellule nervose, ma anche una zona fatta di sostanza bianca. A sinistra, vi è un altro mucchio di cellule che stanno accanto al cordone nervoso, senza essere addirittura addossate ad esso, e sono collegate, sia con le cellule che si trovano attorno al vaso sanguigno ventrale, sia con quelle che provvedono alla formazione del dissepimento di questo metamero. Le figg. 23 e 24, Tav. II, sono l'ingrandimento di queste due zone. Nella fig. 24 si vede come la formazione delle cellule nervose, nell'ammasso, a destra, addossato al cordone nervoso, sia assai progredita. Nella fig. 23, ove si vede l'ammasso di cellule di sinistra, questa trasformazione è meno progredita, ma tuttavia evidente.

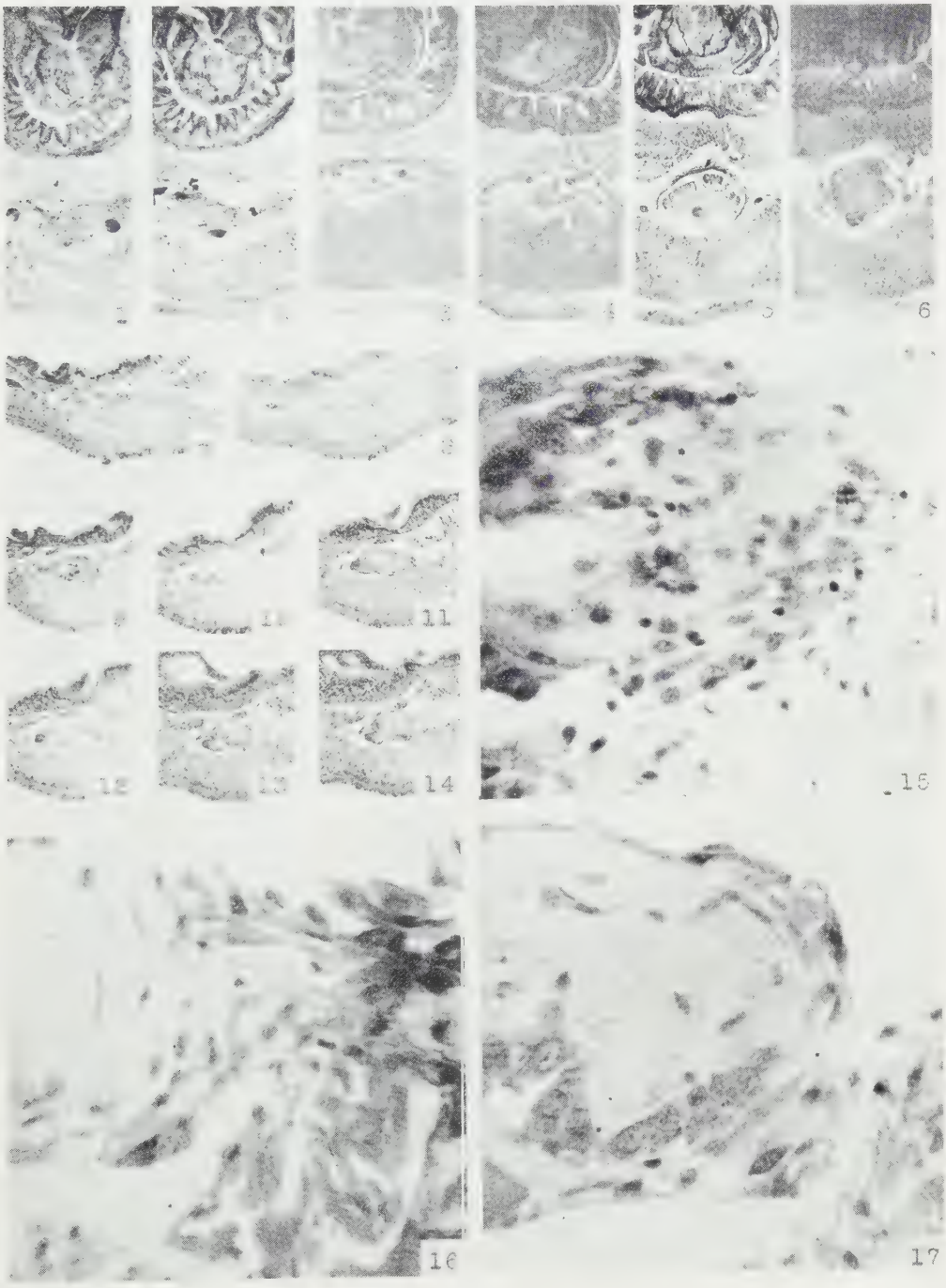
La fig. 20 mostra come l'ammasso di cellule nervose, a destra, si sia meglio fuso col cordone nervoso, mentre l'ammasso notato, a sinistra, nella figura precedente, pur essendo meglio definito rispetto alla sua natura nervosa, ancora rivela di essere, rispetto al cordone nervoso, in questa fig. 20, una parte aggiunta.

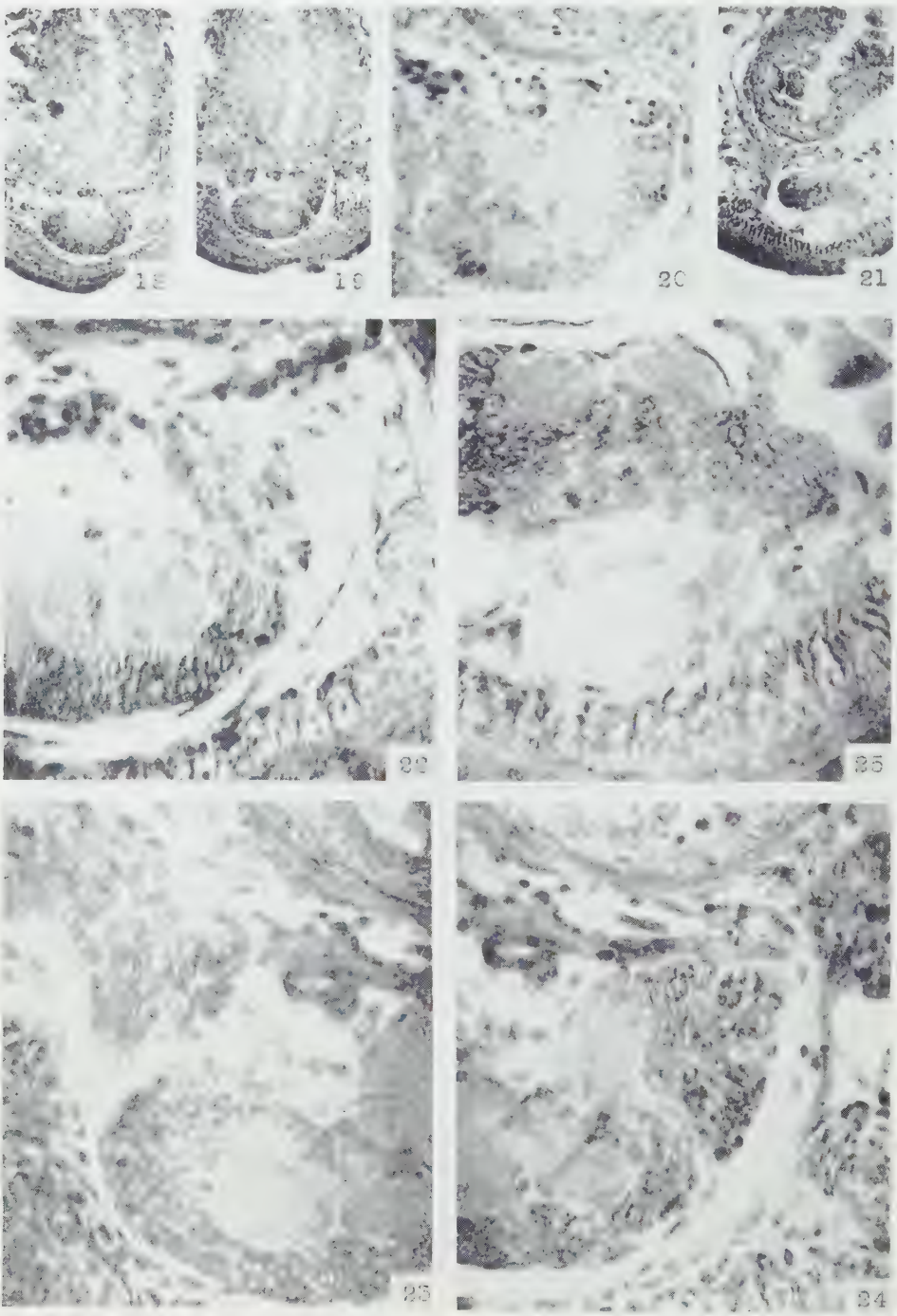
La fig. 21, Tav. II, mostra che, in questo punto un pò più cefalico, vi è un ammasso di cellule che collega il cordone nervoso alla somatopleura della parete ventrale del corpo. La fig. 25, Tav. II, è l'ingrandimento di questa zona e qui si vede come le cellule dell'ammasso si stiano trasformando in cellule nervose. Questa trasformazione è meno spinta fra le cellule più direttamente vicine alla somatopleura, ove si nota una mitosi.

Il cordone nervoso, per l'aggiunta di questa grande quantità di cellule, tende a raggiungere un'ampiezza assolutamente fuori dal normale. Un altro indice che questo individuo sta andando incontro a condizioni anormali viene dato dalla enorme quantità di cellule linfatiche contenute nella cavità celomatica.

In questo individuo gli elementi nervosi, che dai varii ammassi osservati si aggiungono alle cellule del cordone nervoso vero e proprio, sono di origine mesodermica?

Qui si rimane nel dubbio, in quanto tutti gli organi, tutti i tessuti, in questa zona, sono rigenerati e sarebbe quindi necessario risalire alla loro origine.


1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17


18
19
20
21
22
23
24

Ciononostante, lo studio di questo individuo è di notevole interesse perché serve a dimostrarci l'esistenza di un determinato processo: il processo cioè che provoca la trasformazione in cellule nervose, sia di cellule che si trovano nella somatopleura della parete ventrale del corpo, sia di cellule che si trovano attorno al vaso sanguigno ventrale, sia di cellule legate in qualche modo ai dissepimenti.

Giungo alla conclusione che se, nella maggioranza dei casi, le cellule nervose che provvedono alla rigenerazione del cordone nervoso, derivano, sia da quelle del cordone nervoso antico [9], sia da quelle dell'epidermide [9] [10] [11] [12], ciò non toglie che in taluni casi si possa pensare che provengano anche da elementi di natura mesodermica, quali sono quelli della somatopleura.

Probabilmente ciò si verifica sempre, ma solo in un primissimo periodo della rigenerazione, quando la gemma rigenerativa non si è ancora formata; e si verifica anche in un periodo più tardivo, ma, probabilmente, solo quando la rigenerazione diviene anormale, come nel caso ultimamente esaminato, ove, affinché il cordone nervoso acquisti quello sviluppo esagerato che tende ad avere, non sono sufficienti né la moltiplicazione delle cellule nervose stesse, né l'apporto di cellule provenienti dall'epidermide.

(9) O. RABES, « Arch. Entw.-mech. », XIII (1902).
(10) A. STEFANELLI e A. BIGIOTTI, « Boll. Zool. », XVI (1949).
(11) G. THERMES, « Boll. Zool. », XXIII (1956).
(12) G. THERMES, « Arch. Zool. It. », XLI (1956).

SPIEGAZIONE DELLE TAVOLE I e II

La spiegazione delle tavole è contenuta nel testo.

Nella Tav. I le figg. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 e 14 hanno un ingrandimento di 35 ×; le figg. 15, 16 e 17 hanno un ingrandimento di 440 ×.

Nella Tav. II le figg. 18, 19 e 21 hanno un ingrandimento di 90 ×; la fig. 20 ha un ingrandimento di 250 × e le figg. 22, 23, 24 e 25 hanno un ingrandimento di 440 ×.

Biologia. — *L'andamento dell'attività mitotica nel mielencefalo di un Anfibio anuro durante lo sviluppo* (*). Nota (**) di ROSALBA PINACCI, presentata dal Corrisp. A. STEFANELLI.

L'osservazione di un'elevata attività mitotica durante la morfogenesi cerebellare in Anfibi anuri in metamorfosi (Baffoni ed Elia, 1956; Baffoni, 1959) (1) ha suggerito un più completo esame sull'andamento della densità mitotica lungo tutto il neurasse di Anfibi anuri in sviluppo. Le osservazioni, iniziate nella porzione metencefalica del romboencefalo, sono quindi state estese al midollo spinale (Baffoni e Pinacci, 1958) (2) ed alle prime tre vescicole encefaliche (Baffoni, 1959) (3). I risultati di questo esame hanno messo in evidenza che il comportamento dell'indice mitotico nelle varie regioni del neurasse e nelle diverse zone di una stessa regione, varia sia quantitativamente sia qualitativamente, in rapporto con il significato funzionale dei centri di una determinata zona ed in rapporto con le modalità del loro accrescimento. Tali risultati hanno trovato una conferma sperimentale in seguito all'esame delle variazioni della attività mitotica nel neurasse di larve di Anfibi anuri durante la precoce metamorfosi, provocata sperimentalmente con ormone tiroideo (Baffoni, 1957–1959) (4).

La presente ricerca è stata compiuta allo scopo di completare il quadro generale sull'andamento dell'attività mitotica, portando l'esame alla regione mielencefalica del neurasse dello stesso Anfibio anuro sul quale sono state compiute le precedenti osservazioni (*Bufo bufo* L.).

Rimando ai già citati lavori per quanto concerne i metodi di studio impiegati ed i criteri adottati per il computo delle variazioni della densità mitotica (numero di mitosi dell'unità di superficie = 10.000 μ^2). Nella tabella e nella figura 1 sono riportati i risultati dei valori medi riscontrati in ogni stadio (classificati in base alla seriazione eseguita nel *Bufo bufo* da Rossi, 1959) (5). Come è noto, nel neurasse in sviluppo le mitosi sono localizzate quasi esclusivamente tra gli elementi dello strato ventricolare; tenendo presente che nella porzione metamerica del neurasse il *sulcus limitans* separa

(*) Ricerca eseguita nell Istituto di Anatomia Comparata « G. B. Grassi » dell'Università di Roma, con il contributo del C.N.R.

(**) Pervenuta all'Accademia il 20 luglio 1960.

(1) G. M. BAFFONI ed E. ELIA, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (ser. 8ª), XXII, p. 327 (1957); G. M. BAFFONI, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (ser. 8ª), XXIII, p. 90 (1957).

(2) G. M. BAFFONI e R. PINACCI, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (ser. 8ª), XXV, p. 128 (1958).

(3) G. M. BAFFONI, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (ser. 8ª) XVI, p. 598 (1959).

(4) G. M. BAFFONI, « Rivista di Neurobiol. », V, p. 33 (1959).

(5) A. ROSSI, « Monit. Zool. Ital. », XLVI, p. 1 (1959).

con discreta approssimazione la porzione sensitiva (piastra alare) da quella motoria (piastra basale), è stato tenuto separato conto della densità mitotica nelle due regioni del mielencefalo.

TABELLA I.

Stadio	Età giorni	Piastra alare			Piastra basale		
		Area dmm²	Mitosi	Densità	Area dmm²	Mitosi	Densità
23	7	12,71	151	11,8	14,15	105,5	7,4
24	8	12,40	178,5	14,4	12,40	130	10,5
25	10	14,77	235	15,9	13,35	157	11,8
III	26	18,87	270,5	14,3	16,48	184	11,2
VI	35	21,65	293,5	13,5	19,55	168,5	8,6
VIII	45	23,76	165,5	7	18,70	127,5	6,8
IX	50	26,95	174	6,5	21,47	94	4,4
XI	55	18,10	123	6,8	15,88	101	6,7
XIII	60	20,35	92	4,5	18,03	70	3,9
XV	65	14,83	71,5	4,8	11,93	63,5	5,3
dopo 15 gg. . .	80	24,43	53,5	2,2	17,91	50,5	2,8
dopo 30 gg. .	95	18,52	30,5	1,6	15,51	29	1,9

I risultati ottenuti possono sommariamente riassumersi come segue:

1° l'attività mitotica della porzione laterale (piastra alare) dello strato ventricolare del mielencefalo, come è stato osservato nella porzione metencefalica del romboencefalo (Baffoni e Elia, 1957; Baffoni, 1958) [1] e nel midollo spinale (Baffoni e Pinacci, 1958) [2], è costantemente superiore a quella della porzione mediale (piastra basale); tale differenza va attribuita, anche in questo caso, al più tardivo differenziamento dei centri sensitivi, rispetto a quelli motori, ed in particolare allo sviluppo di nuovi centri acustici e vestibolari (Stefanelli e Zacchei, 1949) [6].

2° i massimi valori assoluti di densità riscontrati nel mielencefalo sono più bassi di quelli riscontrati rispettivamente nella regione sensitiva e motoria del midollo spinale [2] e particolarmente di quelli verificati nella piastra alare del metencefalo [1]; essi si avvicinano pertanto a quelli della piastra basale del metencefalo ove i processi di sviluppo, in rapporto alla

(6) AL. STEFANELLI e A. M. ZACCHEI, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (ser. 8ª), VII, p. 358 (1949).

formazione di nuovi centri funzionalmente connessi con la condizione terrestre, sono inferiori o tuttalpiù simili a quelli del mielencefalo; va notato che, nella piastra basale del mielencefalo, come in quella del metencefalo, il profilo e l'estensione della superficie ventricolare non si modificano sensibilmente durante il periodo larvale;

3° a differenza di quanto è stato osservato nel midollo spinale [2] ed in particolare nella regione metencefalica del romboencefalo [1], l'attività mitotica della regione mediale differisce da quella della regione laterale

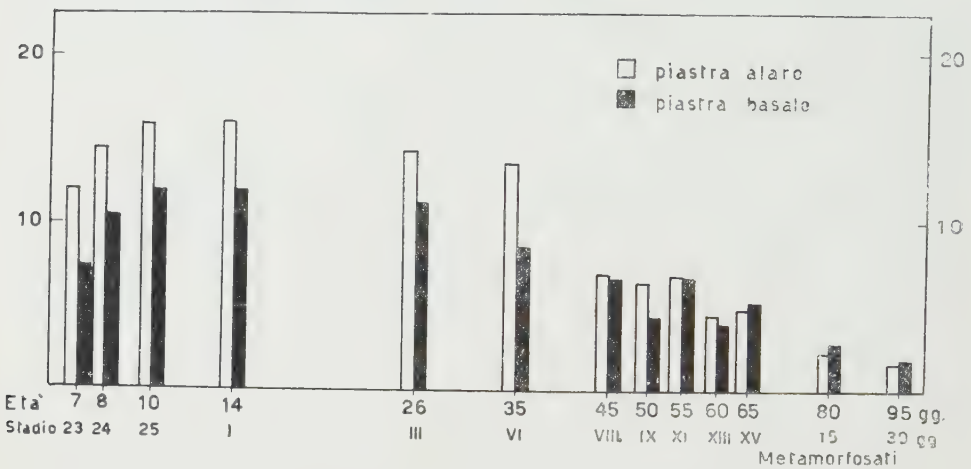


Fig. 1. – Andamento dell'attività mitotica nello strato ventricolare del mielencefalo durante lo sviluppo di un Anfibio anuro (*Bufo bufo*).

(Il tempo sulle ascisse è in scala logaritmica).

solo quantitativamente: infatti ambedue presentano lo stesso andamento; ciò si spiega considerando che nel mielencefalo il differenziamento di nuovi centri nervosi, in rapporto all'adeguamento alla condizione terrestre, è meno imponente che in altre regioni della porzione metamerica del neurasse, nelle quali si sviluppano centri in rapporto funzionale con l'attività tetrapoda (formazione delle intumescenze nel midollo spinale e del cervelletto nel metencefalo); va precisato in proposito che, come è stato dimostrato dalle ricerche comparative di Stefanelli, i centri cocleari non originano dai preesistenti centri della linea laterale, bensì si formano *ex novo* (Stefanelli e Zacchei) [6], va però anche considerato che lo sviluppo di questi nuovi centri interessa una parte molto limitata del grigio mielencefalico, come lo indicano i bassi livelli di attività mitotica in questa porzione del neurasse;

4° l'andamento dell'attività mitotica nel mielencefalo presenta un massimo all'inizio del periodo larvale, quindi una progressiva e lenta diminuzione fino all'inizio della premetamorfosi (stadio VIII) che si accentua dopo la metamorfosi; in corrispondenza delle crisi metaboliche che si verificano al termine della vita embrionale e di quella larvale, in rapporto con i due periodi di digiuno che precedono il cambiamento del tipo di nutrizione

(cfr. Cotronei, 1919–32) [7], nel mielencefalo, come nel midollo spinale [2], si osservano due cadute dell'attività mitotica;

5° l'esame lungo l'asse antero–posteriore del mielencefalo, ha messo in evidenza l'esistenza di una successione di zone con più elevata attività mitotica: ciò si verifica sia nella piastra alare che in quella basale; i focolai mitotici sono cinque nel periodo embrionale ed in gran parte di quello larvale (stadio I–VI), ma si riducono a quattro (stadio VII–X) e quindi a tre nell'ultimo periodo larvale; ritengo che questa riduzione sia apparente in quanto a partire dallo stadio VI le pareti del mielencefalo si ispessiscono, il IV ventricolo si riduce in lunghezza e pertanto il piano passante per il calamo (che è stato preso come limite posteriore del mielencefalo) si sposta in avanti; questa supposizione spiega un fatto che ci aveva fatto restare perplessi eseguendo l'esame dei focolai mitotici lungo il midollo spinale di animali metamorfosati: infatti dopo lo stadio X (corrispondente al XVIII nella classificazione impiegata per il midollo spinale) ne avevamo riscontrati dodici, invece dei dieci che corrispondevano al numero dei nervi spinali. Nel mielencefalo, oltre alla presenza dei focolai mitotici, non si osservano altre differenze in rapporto al gradiente antero–posteriore [8].

Conclusioni: i più significativi risultati emersi dall'esame compiuto sull'attività mitotica nel mielencefalo, consistono nel fatto che questa ha un andamento diverso da quella delle due regioni del neurasse ad esso contigue in quanto i valori di densità sono più bassi, presentano oscillazioni più attenuate, ed un comportamento simile nella regione motoria e sensitiva.

(7) G. COTRONEI, «Mem. Soc. Ital. Sci. dei XL» (ser. 3ª) XXI, p. 1 (1919); «Arch. Zool. Ital.», X, p. 85 (1922); «Rend. R. Acc. Naz. Lincei» (ser. 6ª), XXIV, p. 411 (1938).

(8) Ringrazio il prof. Baffoni per la guida ed i consigli datimi durante l'elaborazione di questa Nota.

A. SIGNORINI e G. COTRONEI.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Ferie 1960 Settembre–Ottobre

NOTE DI SOCI

(Ogni Nota porta a pie' di pagina la data di arrivo o di presentazione)

Matematica. — *Intorno al numero degli zeri di un polinomio nel campo reale* (*). Nota I del Socio BENIAMINO SEGRE.

Il presente lavoro tratta l'argomento indicato nel titolo, con particolare riguardo al caso dei polinomi a radici tutte reali. Un breve sommario trovasi alla fine del § 1.

1. – UN TEOREMA FONDAMENTALE.

Dato un polinomio di grado n (≥ 2):

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i\, x^{n-i} \qquad (a_0 \neq 0), \tag{1}$$

a coefficienti reali, poniamo per abbreviare

$$b_i = (i+1)\, a_{i+1} \quad , \quad c_i = (n-i)\, a_i \, , \tag{2}$$

con che abbiamo:

$$g(x) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i\, x^{n-i-1} = nf(x) - xf'(x) \, ,$$

$$f_1(x) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i\, x^{n-i-1} = f'(x) \, . \tag{3}$$

(*) Pervenuta all'Accademia il 19 settembre 1960.

Se nel risultante di Sylvester degli ultimi due polinomi si scambiano righe e colonne, invertendo poi l'ordine delle ultime $n-1$ colonne, si ottiene il determinante [d'ordine $2(n-1)$]:

$$(4) \qquad D_{n-1} = \begin{vmatrix} b_0 & & & & & & c_0 \\ \vdots & \ddots & & & & \iddots & \vdots \\ b_{n-2} & \cdots & b_0 & c_0 & \cdots & c_{n-2} & \\ b_{n-1} & \cdots & b_1 & c_1 & \cdots & c_{n-1} & \\ & \ddots & \vdots & \vdots & \iddots & & \\ & & b_{n-1} & c_{n-1} & & & \end{vmatrix};$$

e vedremo poi (§ 2) che questo D_{n-1} *non differisce che per il fattore* n^{n-2} *dal discriminante* D di $f(x)$.

Designato con D_k il minore (d'ordine $2k$) formato dalle $2k$ righe e colonne centrali di D_{n-1}, ossia assunto

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_0 & c_0 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix},$$

$$(5) \qquad D_k = \begin{vmatrix} b_0 & & & & & & c_0 \\ \vdots & \ddots & & & & \iddots & \vdots \\ & & b_0 & c_0 & & & \\ b_{2k-1} & \cdots & b_k & c_k & \cdots & c_{2k-1} & \end{vmatrix} \qquad (k = 2, \cdots, n-1),$$

con la convenzione di attribuire il valore zero alle b_i ed alle c_i di indice $i \geq n$, proveremo il

Teorema 1. – *Se* $D_1 D_2 \cdots D_{n-1} \neq 0$ (*onde* $f(x)$ *viene ad ammettere* n *zeri distinti nel campo complesso*), *il numero* n_r *delle radici reali di* $f(x)$ *si calcola con la formula*: $n_r = n - 2v$, *ove si denoti con* v *il numero delle variazioni di segno nella successione*

$$(6) \qquad D_0 = 1 \quad , \quad D_1 \quad , \quad D_2 \quad , \quad \cdots \quad , \quad D_{n-1};$$

in altri termini, quest'ultimo numero uguaglia precisamente quello delle coppie distinte di radici complesse coniugate di $f(x)$.

La proprietà testè enunciata verrà stabilita in una successiva Nota II, quale conseguenza di un classico criterio di Sturm; va però rilevato che la pura e semplice applicazione di questo criterio condurrebbe ad un risultato di gran lunga più complesso. Nella presente Nota, ci limiteremo a fare talune considerazioni preliminari utili a quello scopo ed a segnalare qualche corollario. Una ulteriore Nota III verterà infine su condizioni d'altro tipo affinché tutte le radici di un polinomio $f(x)$ risultino reali, ottenute (per

via assai diversa da quella che qui seguiremo nel ricavare il cor. 3) utilizzando invece alcune semplici proprietà topologiche, inerenti ai gruppi di punti di una retta ed ai relativi gruppi polari.

2. – OSSERVAZIONI PRELIMINARI.

Detti $x_1, x_2, \cdots, x_n$ gli zeri (reali o complessi) del polinomio (1), il discriminante D di questo si esprime per definizione mediante la

$$(7) \qquad D = a_0^{2n-2} \prod_{i<j} (x_i - x_j)^2 = (-1)^{n(n-1)/2} a_0^{2n-2} \prod_{i \neq j} (x_i - x_j) .$$

Per stabilire l'uguaglianza

$$(8) \qquad D_{n-1} = n^{n-2} D$$

(di cui al § 1), orliamo il determinante (4) aggregandogli una prima riga formata dai $2n-1$ elementi $0, 0, \cdots, 0, c_0$ ed un'ultima colonna formata dai $2n-1$ elementi $c_0, c_1, \cdots, c_{n-1}, 0, 0, \cdots, 0$; il determinante che così si ottiene vale dunque $c_0 D_{n-1} = n a_0 D_{n-1}$. In esso, alle colonne di posto $1, 2, \cdots, n-1$ aggiungiamo ordinatamente le colonne di posto $2n-1$, $2n-2, \cdots, n+1$, ed osserviamo che – in virtù delle (2) – risulta $b_{i-1} + c_i = n a_i$ (con $b_{-1} = 0$). Il nuovo determinante si riduce quindi al risultante R di Sylvester dei polinomi (1) e (2), quando in esso si sopprima il fattore n da ciascuna delle colonne di posto $1, 2, \cdots, n-1$, si inverta poi l'ordine delle n rimanenti colonne, e si scambino infine righe e colonne. Si ottiene pertanto:

$$(9) \qquad n a_0 D_{n-1} = (-1)^{n(n-1)/2} n^{n-1} R .$$

D'altro canto, in base ad una ben nota proprietà del risultante, si ha

$$(10) \qquad R = a_0^{n-1} \prod_{i=1}^{n} f'(x_i) ;$$

ma è $f(x) = a_0 (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$, e quindi

$$f'(x_i) = a_0 (x_i - x_1) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n) ,$$

onde la (10) diventa

$$(11) \qquad R = a_0^{2n-1} \prod_{i \neq j} (x_i - x_j) .$$

Basta ora raffrontare le (7), (9), (11) per dedurne la (8).

Il teorema del n. 1 potrebbe venire esteso, almeno parzialmente, al caso in cui taluna delle (6) si annullasse; ma non ci tratterremo qui su ciò per brevità. Rileviamo soltanto al riguardo che

Se fra le espressioni (6) *ve n'è una ed una sola che sia nulla:*

$$D_k = 0 , \qquad \text{con} \quad 1 \leq k \leq n/2 , \quad n > 2 ,$$

allora D_{k-1} *e* D_{k+1} *risultano necessariamente di segni opposti, ed il teorema del n. 1 permane valido con riferimento alla successione che si ricava dalla* (6) *sopprimendo* D_k.

In base alle ipotesi ammesse si ha $k < n-1$, e quindi $D_{n-1} \neq 0$; sicché – in virtù della (8) – il polinomio $f(x)$ ha nel campo complesso n zeri d i s t i n t i, fra i quali ve ne sarà un certo numero, n_r, di *reali* ($0 \leq n_r \leq n$). Queste proprietà si conserveranno – e con lo stesso n_r – ove si sostituisca ad $f(x)$ il polinomio $f(x)$ che se ne ricava coll'assoggettare il coefficiente a_{2k} ad un'arbitraria p i c c o l a v a r i a z i o n e (si noti che è $2k \leq n$) e col tenere f i s s i gli altri coefficienti; è chiaro che con ciò

$$D_0, \cdots, D_{k-1}, D_{k+1}, \cdots, D_{n-1}, \tag{12}$$

i quali sono dei polinomi (originariamente non nulli) in tali coefficienti, vengono a conservare ciascuno il proprio segno.

Si rilevi ora che, in forza delle (5), (2), risulta

$$D_k = -b_{2k-1} c_0 D_{k-1} + P_k = -2kn a_0 a_{2k} D_{k-1} + P_k, \tag{13}$$

ove D_{k-1} e P_k denotano p o l i n o m i n e l l e s o l e $a_0, a_1, \cdots, a_{2k-1}$ a coefficienti interi; pertanto, siccome per ipotesi $a_0 D_{k-1} \neq 0$, durante la suddetta piccola variazione D_k viene effettivamente ad assumere tanto valori p o s i t i v i quanto valori n e g a t i v i (a seconda che la variazione di a_{2k} ha luogo in un senso o nell'altro). Si può dunque applicare il teorema del n. 1 ad $\bar{f}(x)$, il che permette di determinare n_r. Poiché tale determinazione non deve dipendere dal modo come si effettua la piccola variazione, ciò esige intanto che D_{k-1} e D_{k+1} abbiano segni o p p o s t i, e conduce senz'altro al risultato enunciato: $n_r = n - 2v$, ove si denoti con v il numero delle variazioni di segno nella successione (12).

La proprietà testè stabilita è di verifica immediata per $k = 1$. All'uopo basta osservare che è $D_0 = 1 > 0$; poiché inoltre

$$D_2 = \begin{vmatrix} b_0 & 0 & 0 & c_0 \\ b_1 & b_0 & c_0 & c_1 \\ b_2 & b_1 & c_1 & c_2 \\ b_3 & b_2 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = (b_0 c_1 - b_1 c_0)(b_0 c_3 + b_1 c_2 - b_2 c_1 - b_3 c_0) - (b_0 c_2 - b_2 c_0)^2,$$

risulta di fatto $D_2 < 0$ ogni qual volta si abbia $D_1 = b_0 c_1 - b_1 c_0 = 0$, $D_2 \neq 0$.

Aggiungiamo infine che – come già è stato accennato alla fine del § 1 – il caso in cui sia $n_r = n$ verrà trattato da tutt'altro punto di vista nella Nota III, sotto la sola condizione che risulti $D_{n-1} \neq 0$.

3. – Ulteriori conseguenze.

D'ora in poi nella presente Nota – salvo esplicito avviso in contrario – ci riferiremo soltanto a polinomi (1) per i quali

$$D_1 D_2 \cdots D_{n-1} \neq 0; \tag{14}$$

condizione, questa, che di certo sussiste per una scelta generica dei coefficienti a. Poiché ovviamente $n_r \geq 0$, il teorema enunciato nel n. 1 porge senz'altro il seguente

COROLLARIO 1. – *Il numero v delle variazioni di segno nella successione* (6) *non può mai superare* $[n/2]$; *questo massimo viene raggiunto se, e soltanto se, il polinomio* (1) – *secondoché abbia grado n pari o dispari* – *è privo di radici reali* (*e cioè di segno definito*) *oppure dotato di una sola radice reale.*

Ad esempio, se $n = 2m > 2$ è pari, e si suppone

$$D_1 < 0,\ D_2 > 0,\ D_3 < 0,\ \cdots,\ \text{segn } D_m = (-1)^m, \tag{15}$$

il polinomio $f(x)$ risulta per ciò che precede di segno definito e si ha necessariamente

$$\text{segn } D_{m-i} = \cdot 1^m \qquad \text{per} \quad i = 1, \cdots, m-1.$$

Poiché $D_0 = 1$, le (15) equivalgono alle

$$D_{k-1} D_k < 0 \qquad \text{per} \quad k = 1, 2, \cdots, m;$$

avuto riguardo alla (13), le ultime condizioni – implicanti, giusta quanto s'è detto, che il polinomio $f(x)$ sia di segno definito – possono venire scritte nella forma

$$a_0 a_{2k} > R_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, m),$$

ove R_k denota un'opportuna funzione razionale delle sole $a_0, a_1, \cdots, a_{2k-1}$ (a coefficienti razionali).

Sempre nell'ipotesi che valga la (14), il numero v delle variazioni di segno nella successione (6) risulta manifestamente pari o dispari secondoché D_{n-1} è positivo o negativo. Avuto riguardo alla (8) ed al teorema del n. 1, ne discende il

COROLLARIO 2. – *Il numero n_r delle radici reali di un polinomio di grado n e discriminante* $D \neq 0$ (*numero che ha sempre la stessa parità di n*) *risulta congruo ad n* mod 4 *se, e soltanto se,* D *è positivo.*

Questo risultato vale anche nell'ipotesi che (essendo $D \neq 0$) la (14) non sussista, come si vede assoggettando allora $f(x)$ ad una generica piccola variazione; invero, in corrispondenza a quest'ultima, n_r non muta, D conserva il proprio segno e la (14) viene a sussistere. Il corollario 2 mostra fra l'altro che, *per* $n = 2, 3, 4, 5,$ *la* $D < 0$ *equivale alla* $n_r = n - 2$.

Rileviamo da ultimo che, in forza della $n_r = n - 2v$, affinché sia $n_r = n$ occorre e basta che si abbia $v = 0$. Dal teor. 1 si ottiene così il

COROLLARIO 3. – *Gli zeri di un polinomio $f(x)$, di grado $n \geq 2$, sono tutti reali se e soltanto se, valendo la* (14), *ciascuna delle espressioni* $D_1, D_2, \cdots, D_{n-1}$ *risulta positiva.*

Il fatto che la positività di tali espressioni discenda dalla realtà delle radici può anche venire stabilito in modo diretto, col dare l'espressione esplicita delle prime in funzione delle seconde e di a_0. Ciò è già stato fatto

poc'anzi per D_{n-1}, attraverso le (7), (8). Inoltre, relativamente per esempio a D_1, in base alle (5), (2) si ha:

$$D_1 = b_0 c_1 - b_1 c_0 = (n-1) a_1^2 - 2 n a_0 a_2 = a_0^2 \left[(n-1) \left(\frac{a_1}{a_0} \right)^2 - 2 n \frac{a_2}{a_0} \right] =$$

$$= a_0^2 \left[(n-1) \left(\sum_i x_i \right)^2 - 2 n \sum_{(i,j)} x_i x_j \right] = a_0^2 \sum_{(i,j)} (x_i - x_j)^2 ,$$

dove le $\sum_{(i,j)}$ vanno estese alle combinazioni binarie degli indici $1, 2, \cdots, n$. Ne discende che:

Un polinomio a radici tutte reali ha il relativo D_1 *uguale allo zero se, e soltanto se, quelle radici risultano a due a due uguali fra loro.*

4. – Intorno ai segni delle D_k.

Le (2), (4) mostrano che D_{n-1} è un polinomio nelle a, omogeneo di grado $2n-2$, il cui termine di grado m a s s i m o in a_n è quello scritto esplicitamente nelle uguaglianze:

$$D_{n-1} = (-1)^{n(n-1)/2} (b_{n-1} c_0)^{n-1} + \cdots = (-1)^{n(n-1)/2} (n^2 a_0 a_n)^{n-1} + \cdots .$$

Dalla (8) si trae quindi che, con analogo significato per i puntini, risulta

$$D = (-1)^{n(n-1)/2} n^n a_0^{n-1} a_n^{n-1} + \cdots ,$$

eppertanto:

Fissati comunque i coefficienti $a_0 \neq 0, a_1, \cdots, a_{n-1}$ *del polinomio* $f(x)$, *e scelto* a_n *sufficientemente grande in valore assoluto, il discriminante* D *di* $f(x)$ *(e conseguentemente pure* D_n*) ha sempre il segno di* $(-1)^{n(n-1)/2}$ *se* n *è dispari. Mentre invece, quando* n *è pari,* D *viene ad ammettere questo segno o l'opposto secondoché* $a_0 a_n > 0$ *o* $a_0 a_n < 0$.

Il risultato testè ottenuto s'interpreta subito in relazione al numero n_r delle radici reali, poggiando sul corollario 2 del § 3. Così, ad esempio, si ottiene che *è sempre* $n_r \equiv 1 \pmod 4$ *se si suppone* $n \equiv 1 \pmod 4$ *ed* a_n *sufficientemente grande in valore assoluto.*

Posto per abbreviare

$$m = [n/2] ,$$

con argomentazioni addotte (nel caso di n pari) subito dopo il cor. 1 del § 3 si vede che, *per* $k = 1, 2, \cdots, m$, *esistono delle funzioni razionali*

$$R_k = R_k (a_0, a_1, \cdots, a_{2k-1}) ,$$

a coefficienti razionali, tali che le

$$D_{k-1} D_k < 0 \quad , \quad D_{k-1} D_k > 0$$

siano esplicitabili rispettivamente nella forma:

$$a_0 a_{2k} > R_k \quad , \quad a_0 a_{2k} < R_k .$$

Ne discende che, con opportuna scelta delle $a_0, a_1, \cdots, a_{2m}$, *si possono attribuire alle* $D_1, D_2, \cdots, D_m$ *segni arbitrari*. Simultaneamente, in virtù di ciò che precede, disponendo di a_n si può *fare assumere a* D_n il segno di $-(-1)^{n(n-1)/2} D_{m-1} D_m$ o quello di $(-1)^{n(n-1)/2}$ secondoché n è pari o dispari.

Una facile discussione, che per brevità omettiamo, mostra che, *per* $n = 2, 3, 4$, *nella successione* (6) *possono di fatto comparire tutte le combinazioni di segni compatibili col corollario 1 del* § 3. Resta la questione (che qui ci limitiamo a segnalare) di decidere se analoga proprietà valga ancora o meno per $n > 4$.

Citologia vegetale. — *I clorocromoplasti.* Nota (*) del Corrisp. Roberto Savelli.

Denominazioni e criteri di definizione. – In una Nota recente (questi « Atti », vol. XXVIII, p. 73) è stata creata confusione di termini e di Autori; perciò anzitutto reclamo quel che mi compete, e rendo a ciascuno il suo.

Il termine « clorocromoplasti » (1) fu introdotto da me nel 1938; è riuscito a prevalere, accolto nei testi più autorevoli, come per esempio nel libro del Karrer, *Carotinoide* (p. 13). La paternità dell'espressione « cloroplasti cromici », a torto attribuitami, spetta invece a Buscalioni e Bruno, il cui unico lavoro del 1928 costituisce da solo tutta quanta la «*italienische Literatur*» anteriore al 1937, talvolta citata in argomento.

Il termine attribuito al Rothert gli fu del tutto ignoto, essendo di 25 anni posteriore: infatti egli impiega sempre la parola *Intermediärplastiden*, che del resto segna un bel progresso sulle locuzioni allora correnti (*rote Chromatophoren*, *rote Plastiden*, *rote Chloroplasten*, *vegetative Chromatophoren*, ecc.), per lo più insufficienti a distinguere e caratterizzare i clorocromoplasti.

Questi devono sempre contenere, poca o molta, clorofilla; ma spesso evolvono verso i puri cromoplasti quando essa scompare. Anzi, la loro conoscenza si sviluppa appunto attraverso la ricerca di quei cromoplasti che, fuori delle abituali loro sedi (fiore e frutto) vengono a comparire negli organi vegetativi (2). Ritengo che ovunque ciò avvenga in parti aeree verdi (foglie e steli) – tolti cioè gli organi sotterranei e le specie parassite o saprofite prive di clorofilla – ivi si possano attendere, persistenti o transitorii, anche i clorocromoplasti. Due fatti concorrono, secondo me, nell'idea di clorocromoplasto e valgono a distinguerlo dal cloroplasto. Il primo e più importante è di natura qualitativa e chimica, e consiste nella elaborazione di carotinoidi *diversi da quelli che normalmente accompagnano la clorofilla*: questi carotinoidi insoliti sono spesso una espressione di disagio fisiologico, una *reazione* a determinate condizioni di *luce*, di *temperatura* e di *ricambio idrico*. Un plastidio che insieme con la clorofilla elaborasse questi speciali carotinoidi, per lo più rossi, sarebbe un clorocromoplasto anche se i detti carotinoidi vi fossero distribuiti in maniera apparentemente omogenea, come talvolta vidi in plastidii di *Selaginella denticulata*, la cui massa sembrava interamente costituita da

(*) Pervenuta all'Accademia il 20 ottobre 1960.

(1) L'altro termine, « cromocloroplasti », talvolta da me stesso impiegato, è da parte mia piuttosto un *lapsus calami* che non una variante utile, perché nel mio pensiero il concetto di cloroplasto merita la precedenza per ragioni filogenetiche.

(2) Nel 1914 Rothert indicava questo fatto in ben 42 famiglie, aumentate successivamente.

una specie di marmellata rosso–bruna. Ma più frequentemente, al contrario, si ha una *separazione parcellare*, nel corpo del plastidio, di territorii verdi, da altri territorii diversamente colorati; ed io non mi sentirei di negare la qualifica di clorocromoplasto a quel plastidio che, *pur non elaborando carotinoidi speciali*, mostrasse tuttavia una separazione di aree gialle e di aree verdi, tanto estese da venir risolte e riuscire percettibili al comune fotomicroscopio.

In altre parole, tanto il fatto biochimico quanto il fatto topografico, sopra accennati, bastano – ciascuno da solo – a caratterizzare il clorocromoplasto; ma d'ordinario i due fatti si associano generando il caso più tipico, in cui le parcelle, che si distinguono a contrasto, sono alcune verdi (o gialloverdicce), altre tinte da colori, rossi o bruni, estranei al cloroplasto puro. Tali appunto erano in prevalenza i casi miei, avendo io concentrato il mio studio sulle Aloinee, che (insieme coi *Buxus*) in Sicilia, terra bruciata, regno del sole, facevano gran pompa di questo fenomeno, rivestendo colori di fiamma.

La presente Nota aggiungerà qualcosa di quello che ho poi visto, sulle stesse piante, ma in tutt'altro ambiente, a Bologna, nei vent'anni successivi.

MODI DI OSSERVAZIONE E DI DOCUMENTAZIONE. – È stato detto da più parti, e recentemente dal Weier, che a dispetto dei grandi successi del microscopio elettronico nella indagine strutturale dei plastidii, una parte ancora molto importante compete al fotomicroscopio, specie ove trattisi di collegare aspetti morfologici con determinati stati o momenti della attività fisiologica.

A me pare che la parte più durevolmente riservata al fotomicroscopio sia l'*osservazione sul vivo*, come quella che riduce gli artefatti al minimo, e perciò più nettamente si contrappone alle tecniche preparatorie delle ricerche d'infrastruttura. Ma ciò che rischia di conseguirne, è un deprecabile distacco fra i due modi di studio e fra i due ordini di risultati. Questa difficoltà di collegamento è in taluni casi francamente ammessa da valenti ultrastrutturisti, e non resta, per ora, che prenderne atto.

Il qualsiasi interesse del presente contributo sta principalmente nella duplice circostanza che la documentazione è fotografica e tratta dal vivo. Finora, come del resto la generalità degli Autori, avevo dato solo qualche disegno: in tal modo istintivamente vengono riportati sul piano del disegno i particolari che, focheggiando, l'occhio vede in realtà su piani diversi: l'immagine ne risulta completata, e al tempo stesso falsata, rispetto a quella che darebbe la fotografia. Per esempio, nei nostri oggetti, il numero delle parcelle rosse ritratte col disegno risulta sempre superiore a quello fotografabile. Un valore documentario di sicura autenticità ha invece la fig. 1, qui presentata, che ritrae esemplari tipicissimi di clorocromoplasti a parcelle, e mette in luce diversi particolari, finora sfuggitimi: fra l'altro non avevo rilevato che gli isolotti carotinoidici sono tanto spesso congiunti da istmi o ponti, come si vedono anche nella fig. 2, nella 7, e persino nella 4 e nella 5 che pur si riferiscono a plastidii ormai in disfacimento.

La fotografia sul vivo implica difficoltà particolari, ed una tecnica, sulla quale non posso sostare (cfr. Savelli, *Ingiallimento di alcuni* Cephalocereus, *ecc.* « Cesalpinia », 1959, N. 3, alle pp. 5–9), generalmente molto diversa da quella consueta che si pratica su sezioni sottili: qui talvolta si tratta di fotografare l'interno di cellule molto grandi entro strati di tessuto di rilevante spessore, come è il caso della fig. 2, ove gli oggetti messi a fuoco appaiono come entro un pozzo di luce, i cui orli sfocati restano nell'oscurità. Non sempre impiego luce trasmessa, ma anche riflessa, normale o radente (figg. 10 e 13). I pochi documenti consegnati in questa Nota, ottenuti in varii tempi e con tecniche diverse, sono scelti tra quelli che mi son parsi meglio dimostrativi e validi a testimoniare momenti non facili a cogliersi nella evoluzione di questi plastidii, o loro aspetti ancora non universalmente ammessi e riconosciuti.

Tre tipi di struttura dei clorocromoplasti. – Weber (« Protoplasma », XXVIII, 1937, pp. 284–89) per designare quelle parcelle, quegli isolotti di cui s'è detto, parlava di *Grana* (*rote Grana*, *Rhodoxanthingrana*), espressione ammissibile nel 1912, in Rothert; ma che nel 1938 io trovavo già confusionaria e inadatta al caso. Credo che il tempo m'abbia dato ragione. Da quando, nel 1932, Heitz fece rivivere l'idea dei « grana » clorofillici, e nel 1936 pretese di considerarli elementi strutturali obbligatorii di ogni normale cloroplasto, altro tempo è passato, e la loro figura si è venuta sempre meglio precisando. Sono – quando veramente ci sono – corpi assai regolari per struttura, dimensioni e distribuzione. Certo, sul vivo, dobbiamo immaginarceli un po' diversi e più grandi di come il microscopio elettronico ce li mostra dopo l'essiccazione nel vuoto: allo stato secco, nelle piante superiori, il caso più frequente è che abbiano un volume di circa 0,05–0,07 μ^3, con 0,6 μ circa di massimo diametro. Vorrei dire, se mi si passa l'espressione popolare, che le foto 6 e 7, qui riprodotte, per le parti rosse dei clorocromoplasti suggeriscono piuttosto l'idea di grossi gnocchi, che non l'idea di « grana »: sono formazioni irregolari, variabili di forma e grandezza, che io non ho mai chiamato « grana », ma che chiamerei volentieri *glomeruli*, o *corpuscoli*.

Questi glomeruli o corpuscoli alla cui costituzione partecipa il carotinoide straordinario, spesso si mostrano come corpi più densi, più sodi del resto del plastidio. È anche possibile, per pressione o in altro modo, e grazie appunto alla loro maggior consistenza, far uscire dal plastidio quelli che si trovano in posizione superficiale, spremendoli fuori, separandoli dalla più molle materia verde o giallastra che li circonda. Detti in « Protoplasma », 29, 1938, qualche disegno relativo a ciò; ma le foto 7, 8, 9 di questa Nota, concernenti plastidii allo stato naturale, non violentati da alcuna pressione esterna, mostrano già questo effetto di sporgenza ad angoli ottusi, che dà l'idea di cunei o di prismi quasi solidi prominenti sulla superficie generale del plasto.

La presenza o la mancanza di questi glomeruli permette una prima distinzione, e la loro diversa composizione ne permette una seconda, determinando così tre tipi fondamentali di clorocromoplasto, tra cui sono possi-

bili diverse transizioni. Io confermo la validità di questi 3 tipi, ma sottolineo con forza ancora maggiore ciò che dissi nel 1938, che questi tipi non vanno considerati come una prerogativa specifica, come peculiari, per esempio di un dato genere. Non deve parlarsi di un tipo *Gasteria* per quello che io descrissi dapprima in queste piante; e lo prova chiaramente la fig. 1 di questa Nota, relativa appunto ad una *Gasteria*, ma coltivata a Bologna, non a Catania, e che presenta il tipo che allora avevo descritto su *Aloe*, su *Haworthia*: si tratta delle espressioni di stati o momenti fisiologici, transitorii e commutabili, delle risposte a differenti condizioni esterne ed interne; non è perciò necessario ritrovarle in ogni tempo in una data specie, ma in compenso è possibile che compaiano dove finora non erano state viste.

Quello che credo meglio esporre come *primo tipo*, lo osservai in tutte le *Kniphofiae* dell'Orto botanico di Catania; ma a Bologna l'ho ritrovato ancor più netto nelle guaine fogliari di molte *Aloe*, per esempio *A. ciliaris*. Sur un fondo quasi incolore, o appena colorato di un verde pallido o gialliccio, spiccano nel plastidio da 3 a 20 corpuscoli rosso–marrone, talora quasi bruno–caffé, alcuni così intensamente colorati da sembrare quasi neri: è l'effetto ottico dovuto alla combinazione sottrattiva del rosso e del verde, complementari, che si trovano mescolati in diversa misura in questi corpuscoli. Per accertare che essi sono realmente così colorati a titolo proprio, e non per sovrapposte luci trasmesse o riflesse da parti circostanti, si può provocare la fluoruscita del plastidio e procedere con mezzi blandi al suo disfacimento: allora i glomeruli, in grazia appunto di quella maggior consistenza di cui s'è detto, escono liberi e si possono osservare isolatamente.

In questo tipo, la quasi totalità della clorofilla è negli stessi corpuscoli che contengono il carotinoide straordinario, e le due sorta di pigmenti sono associate in modo che la individualità delle singole particelle sfugge al potere risolutivo del fotomicroscopio; ma la prova della loro coesistenza risulta già dalla semplice considerazione delle diverse gradazioni cromatiche, che da un rosso appena imbrunito arrivano ad un verde insolitamente cupo; e risulta poi ancor meglio quando, gradatamente, si distrugga uno dei pigmenti (per esempio per fotoossidazione) smascherando l'altro.

Le varianti intorno a questo tipo dipendono appunto dalla diversa proporzione in cui il verde e il rosso son mescolati nei corpuscoli, e dipendono anche dalla intensificazione che può intervenire nella colorazione di fondo. Nel caso tipico la clorofilla, nel fondo generale del plastidio, è appena svelabile per via di fluorescenza, ma può aumentare e condurre a plastidii con fondo verde (talvolta verde–glauco) e corpuscoli color caffè, delimitati con contorni assai netti.

I corpuscoli od isolotti cromatici racchiudono dunque essi stessi la clorofilla, e se in generale il clorocromoplasto tutto intero è una entità mista, qui ogni corpuscolo è esso stesso misto e partecipante della doppia natura di cloro– e di cromoplasto; perciò deve racchiudere quelle sostanze proteiche senza le quali ormai non sapremmo immaginare in funzione la clorofilla, e quelle strutture che condizionano la presenza della clorofilla stessa nel clo-

roplasto: ci confortano a pensarlo le osservazioni di Steffen e Walter (« Planta », 50, 1958, p. 643 e fig. 1 *a*) su quelle « forme di passaggio » o « intermedie », che mostrano caratteri di cromoplasto ma serbano « resti di struttura lamellare », come Gerola ha poi confermato.

Nel *secondo tipo*, visto spesso in varie *Haworthiae* e in diverse *Aloe*, le due sorta di pigmento occupano aree distinte e, in generale, parcelle di un rosso vivo e puro spiccano su fondo verde intenso. Il plastidio può presentarsi complessivamente verde, macchiettato o picchiettato di rosso; oppure le parcelle rosse, poche e grandi, appaiono allungate, a nastro o a fuso. Qualche volta uno solo di questi fusi attraversa longitudinalmente il corpo verde del plastidio, e sembra proprio un piccolo cromoplasto incluso entro un cloroplasto. Queste parcelle rosse non hanno valore di « inclusi nello stroma », anzi lo stroma esso stesso partecipa alla loro costituzione, ripartendosi in porzioni ineguali, di cui ciascuna sostiene il suo proprio pigmento, rosso o verde; e si può presagire che le parti intensamente verdi abbiano substruttura simile o identica a quella dei cloroplasti, e le parti rosse abbiano una delle fondamentali strutture cromoplastiche, probabilmente quella *granulare* o quella *fibrillare*, che mi sembrano le due più chiaramente studiate per i cromoplasti ordinarii (Steffen e Walter, loc. cit.). Se poi il verde di fondo del plastidio si attenuasse o tendesse al gialliccio, come nei plastidii che illustrò molto bene Vignoli in *Ceratozamia*, in questo io vedrei una situazione vicina al cromoplasto puro, non una transizione verso il primo tipo, che resta caratterizzato dalla localizzazione intracorpuscolare della clorofilla.

Questi due tipi hanno in comune il fatto che i centri di accumulo del carotinoide straordinario – o in mescolanza col verde, o separatamente da esso – si trovano però sempre entro il corpo vivo del plastidio: invece nel *terzo tipo* il carotinoide straordinario va ad accumularsi entro grossi inclusi liquidi e lipidici di secrezione, perciò in parti non vive. Casi tipici restano quelli di numerose *Gasteriae*: ciascun plastidio si presenta di un verde talvolta molto intenso, raramente con 1–2, più frequentemente 3–10 inclusi lipidici *perfettamente liquidi e perfettamente sferici*, tinti in rosso, talora rosso sangue, e talora lucenti come rubini.

Evidentemente il carotinoide rosso, prima di manifestarsi nelle gocciole deve essersi formato nella parte viva del plastidio, ma poiché non si vedono parcelle particolarmente colorate bisogna ammettere che vi sia diffuso omogeneamente in uno stato di suddivisione molto fine [3], submicronica, ed in quantità sempre molto tenue perché man mano che si forma vien ceduto agli inclusi liquidi che funzionano da ricettori, e nei quali passa in soluzione. In altre parole, in questi plastidii si verifica una *clorolisi differenziale* o *selettiva*, che lascia staccare il carotinoide straordinario soltanto, mentre gli altri pigmenti sono trattenuti.

(3) Raramente si può mettere in evidenza nei plastidii, una spolveratura di carotinoide, come in sabbia finissima. La fig. 10 mostra un plastidio di *Aloe*, a biscotto, che nella sua parte inferiore presenta qualcosa del genere.

La secrezione del lipide e del carotinoide non sono necessariamente simultanee: quella del lipide generalmente precede, ed il passaggio del carotinoide al lipide, che ben presto se ne carica, è un fatto secondario. Infatti le stesse gocciole *en boulle de billard*, ma incolore, e forse un po' più piccole, si trovano nei cloroplasti ordinarii, spesso in posizione marginale, come mostra la fig. 13, riferentesi bensì ad *Aloe*. Raramente qualcuno di questi cloroplasti può esser colto, per così dire, in flagrante trasformazione, quando per esempio presenta da un lato gocce lipidiche perfettamente incolore, appena rosee nella parte più interna del plastidio, e una o due di un rosso–carico sull'altro lato. Il più bello, il più raro documento, consegnato in questa Nota, e bastevole da solo a giustificarla, è il clorocromoplasto delle figg. 11 e 12. Fu possibile estrarlo intatto da una cellula sottoepidermica di *Gasteria verrucosa*, farlo rotolare su se stesso e ritrarlo in varie posizioni. Il suo secreto lipidico è in vescicole grosse, superficiali, protuberanti, a cui la diversità di pressione imprime forme diverse dalla sferica: due o tre sono di un rosso vivacissimo, altre appena rosee, qualcuna quasi incolore. La più grossa, che sembra quasi in atto di essere espulsa dal corpo del plastidio era per larga parte immersa nel citoplasma, separatane da una sottile membranella: rompendola, il liquido di secrezione fuoriesce, frammentandosi in minute gocciole sferiche.

Raramente, nelle gocciole dei clorocromoplasti di questo tipo, ho visto dei precipitati granulari rossi, e ciò suggerisce che il liquido lipidico potrebbe anche venire riassorbito e lasciare in posto un residuo carotinoide, come incluso solido o colloidale.

LA QUESTIONE DEL SUBSTRATO DEL CAROTINOIDE. – Il fatto che nel *terzo* tipo di clorocromaplasti io abbia effettivamente dimostrato che il carotinoide sopraggiunto a complicare la pigmentazione, si versi in serbatoi lipidici isolati e preformati, come è qui maggiormente documentato dalle figure 11–14, non implica che io mi trovi in contrasto con le osservazioni di coloro che vedono i carotinoidi legati a sostanze proteiche; perché bisogna ricordare che nel *primo* e nel *secondo* tipo, io stesso ed i miei allievi, fummo incapaci di comprovare che il carotinoide fosse sostenuto da un substrato lipidico.

Del fatto che in realtà nei cromoplasti e nei clorocromoplasti di un certo tipo il carotinoide vada a tingere secrezioni lipidiche dapprima incolore, si può trovare traccia negli scrittori più antichi, e per esempio nel Rothert. È poi succeduta una certa scuola, zelatrice degli allora detti « lipoidi », che voleva vederli dappertutto, e ovunque scorgesse corpuscoli carotinoidici ivi supponeva massicci substrati lipidici, adoprandosi a trarli fuori con mezzi brutali (acidi forti, ecc.) che evidentemente smistavano la compagine protoplasmatica, e si allontanavano il massimo possibile dalle condizioni del vivente. Noi ci siamo sempre opposti a questi procedimenti, e volendo per esempio dare una riprova dell'esistenza del substrato lipidico nei nostri clorocromoplasti di 3° tipo, li decoloravamo con mezzi blandi, per fotoossidazione lenta, a luce artificiale, in lenta corrente d'acqua, su ma-

teriale ucciso in soluzioni diluite di formolo neutro e zuccherato. Il carotinoide scompariva, provando intanto che il lipide in cui è disciolto non esercita su di lui una efficace azione protettiva contro l'offesa della luce; il lipide invece rimaneva e si poteva ricolorare col Sudan III o col rosso scarlatto, restituendo al clorocromoplasto il primitivo aspetto, talmente identico al naturale da ingannare chiunque. Questo otteniamo quando le parti rosse sono soltanto *secrezioni colorate*.

Ma quando il nostro attacco fotoossidativo si è ripetuto sui clorocromoplasti di *primo* e *secondo* tipo, in *Aloe*, in *Kniphofia*, in *Haworthia*, osservavamo bensì una riduzione in volume dei glomeruli, come se essi venissero consumati o per così dire limati dalla periferia; ma purché l'operazione fosse stata spinta a fondo non era più possibile ricolorare col Sudan III il residuo rimasto in posto, e ciò mostrava che esso non era di natura lipidica. A meno di supporre che il lipide non sia stato distrutto esso stesso dalla fotoossidazione, dovremmo dirlo inesistente: comunque non abbiamo potuto metterlo in evidenza.

Noi dubitiamo molto che il microscopio elettronico possa mai dirci in quali casi il carotinoide si attacca a molecole lipidiche,e in quali altri si aggancia a molecole proteiche, che sarebbe poi il maggior problema da risolvere in argomento.

Reversibilità e irreversibilità. – È un grosso errore ritenere che i clorocromoplasti, come tali, debbano necessariamente essere reversibili e che tale reversibilità possa entrare a far parte della loro definizione. Al contrario, ben prima delle mie ricerche, era stato chiaramente stabilito che bisogna tener distinti i casi in cui i clorocromoplasti rappresentano, in condizioni interne di vitalità intensa e giovanile, risposte a circostanze esterne stagionali e transitorie, da quegli altri casi in cui essi rappresentano una manifestazione senile o patologica precedente la morte del tessuto. Perciò, accanto ai clorocromoplasti « rossi per un processo eminentemente vitale, ve ne sono altri che sono tali per irreparabile necrobiosi ». Questi, come per esempio si manifestano ai margini delle ferite, sono *assolutamente irreversibili*. Per mio conto aggiungo che forse il più bel caso è offerto dalla alterazione degli apici fogliari per difettoso ricambio idrico, quale si manifesta, in ogni stagione, nelle foglie lunghe e sottili di *Kniphofia*, le quali terminano all'apice con un tratto di tessuto morto, divenuto per essiccamento grigiastro o nocciola chiaro. Questo tratto è preceduto da una zona di tessuto ancor vivo ma irreparabilmente condannato, rosso arancio sulla pagina superiore, giallo rossastro sulla inferiore, e che nelle parti prossimali trapassa con varie gradazioni al verde normale. Nei primi tratti rossastri si trovano dei clorocromoplasti che niente potrebbe redimere a cloroplasti.

Lo stesso fatto, legato all'essiccamento apicale delle foglie, si può osservare, meno evidente, in *Aloe*, *Haworthia*, e persino in *Gasteria*, Le figure, da 2 a 5 mostrano una sequenza quasi completa degli stadii evolutivi del clorocromoplasto da necrobiosi in *Gasteria*.

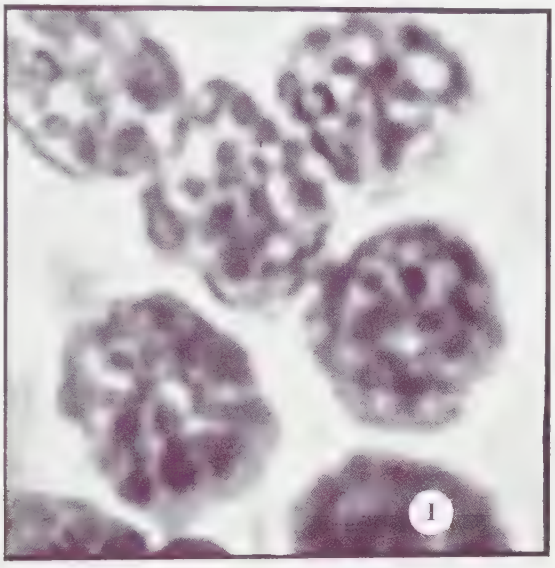
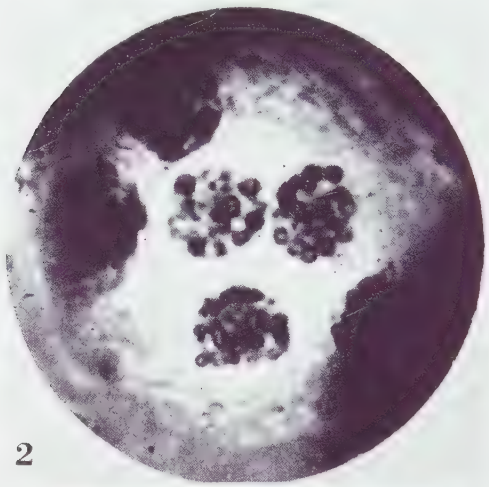
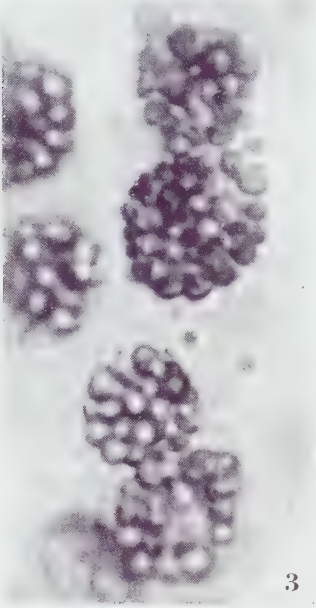


Fig. 1. - Un gruppo di clorocromoplasti entro una briglia citoplasmatica di una cellula sottoepidermica di *Gasteria*: foto Savelli, dal vivo, con ob. imm. acqua, senza interposizione di coprioggetto, 4500×; filtro di luce che valorizza il rosso e smorza od annulla il verde. Particolarità da osservare: *a*, i plastidî hanno tendenza ad appiccicarsi, e quando tornano a separarsi, restano tra loro istmi o ponti di congiunzione; *b*, istmi o ponti congiungono anche le parcelle pigmentate in rosso entro il plastidio; *c*, i plastidî essendo di forma un po' schiacciata, esiste in essi una parte marginale che spesso presenta caratteri particolari: talora è segnata da una striscia di carotinoide rosso (il plastidio in alto, a sinistra); *d*, spesso i plastidî appajono circondati da un citoplasma più chiaro che forma intorno ad essi come una grossa scorza di materia jalina che si distingue per una maggior rifrangenza (specialmente visibile attorno al grosso plastidio in basso, a destra).

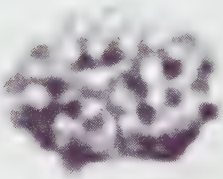


2

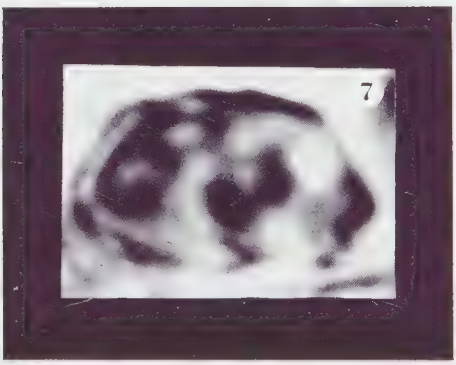


3

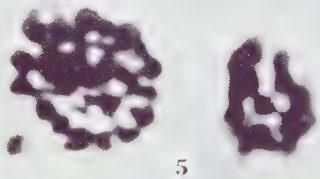
6



4

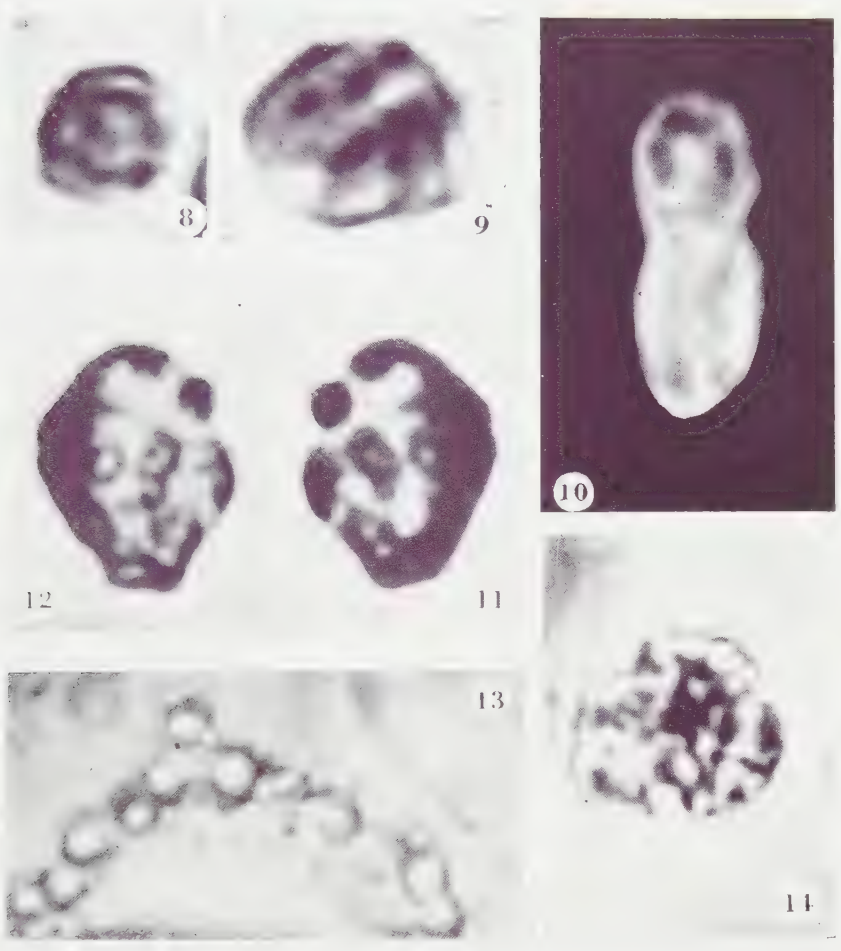


7



5

Figg. 2-5 - Stadî progressivi di degenerazione necrobiotica dei clorocromoplasti in *Gasteria*: nella fig. 2, plastidî entro una cellula, tre dei quali sono bene a fuoco e mostrano la formazione di sferule liquide lipidiche che tengono disciolto il carotinoide rosso; nella fig. 3 (3000×) tutto il corpo dei plastidî è divenuto come una morula di sferule liquide; la fig. 4 mostra un grappolo di tali sferule (di cui alcune intensamente colorate dal carotinoide), che sembra provenire dalla confluenza di tre plastidî; nella fig. 5 comincia la disgregazione con accenno alla fuoruscita delle sferule, di cui tuttavia alcune restano ancora congiunte fra loro mediante briglie od istmi colorati. Figg. 6-7 - Due clorocromoplasti in stato di perfetta vitalità in cellule del mesofillo di *Haworthia* (4500×). [*foto Savelli, dal vivo*].



Figg. 8-9 - Due clorocromoplasti di *Kniphofia* in condizioni di perfetta vitalità, entro cellule del mesofillo. Fig. 10 - Inizio della formazione di carotinoide rosso entro un plastidio verde di foglia d'*Aloe*, la cui forma a biscotto è di incerta interpretazione. Figg. 11-12 - Un giovane clorocromoplasto di *Gasteria verrucosa*, estratto da una cellula e fotografato in due posizioni diverse: il colore fondamentale è verde, ma dalla superficie emergono bolle rosee e rosse, che si direbbero gocciole trasudanti: sono in realtà vescicole in cui una sottile membranella trattiene aderente al corpo del plastidio il secreto lipidico col carotinoide disciolto vi: facilmente le vescicole si rompono ed il liquido rosso fuoriesce. Fig. 13 - Al margine di un grosso cloroplasto di *Aloe* (4500×) si formano sferule liquide lipidiche assolutamente incolori (l'orlo scuro da cui appajono contornate nella figura è un effetto d'ombra). Fig. 14 - Plastidio di *Gasteria verrucosa* con cavità interne, piene di liquido lipidico ancora incolore, mentre nella parte viva del plastidio, fondamentalmente verde, comincia la formazione del carotinoide rosso, che poi si trasferirà nel liquido lipidico. [*foto Savelli, dal vivo*].

A questo si contrappone nettamente il caso di reversibilità, ma è pure erroneo il prospettarlo come qualcosa di sporadico o di accidentale: esso è un fatto regolarissimo, ottenibile e controllabile a volontà. A Bologna le Aloinee venendo per la più gran parte dell'anno mantenute in serra tepida, poco illuminata e piuttosto umida, sono in generale tutte verdi, e si arrossano solo quando, tratte all'aperto, sono colpite dal sole estivo, e – tenute in vaso – soffrono inevitabilmente per qualche ora di un certo squilibrio nel ricambio idrico. A volontà, nell'estate, io le faccio tornare verdi in 6–15 giorni, riportandole in luogo fresco e ombreggiato. È possibile determinare condizioni in cui, viceversa, le piante sieno rosse d'inverno e verdi d'estate. Prospetto dubitativamente anche la possibilità che vi sieno clorocromoplasti stabili, cioè vitali ma non reversibili, come *corredo specifico* poco influenzabile dall'ambiente.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Analisi matematica. — *Su di un sistema di equazioni differenziali ordinarie singolari riguardante l'equilibrio di una massa stellare* (*). Nota (**) di GIORGIO FERRARESE, presentata dal Socio M. PICONE.

1. INTRODUZIONE. – Dal Direttore dell'Osservatorio Astronomico di Monte Mario è stata proposta all'INAC l'integrazione numerica, in un opportuno intorno destro dello zero, del seguente sistema di equazioni differenziali ordinarie:

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{dp}{dx} = -\dfrac{p}{t}\left(1-\beta\dfrac{t^4}{p}\right)u \\ \dfrac{du}{dx} = -2\dfrac{u}{x}+\dfrac{p}{t}\left(1-\beta\dfrac{t^4}{p}\right) \\ \dfrac{dt}{dx} = -\dfrac{\left(1-\beta\dfrac{t^4}{p}\right)\left(1+3\beta\dfrac{t^4}{p}\right)}{2{,}5+15\beta\dfrac{t^4}{p}-1{,}5\beta^2\dfrac{t^8}{p^2}}u\,, \end{cases}$$

(β essendo una costante, $0 \leq \beta < 1$) con le condizioni iniziali

$$(1)'\qquad p = t = 1 \quad , \quad u = 0 \qquad \text{per} \quad x = 0\,,$$

e insieme p, u, t *non negative*.

Poiché il secondo membro della $(1)_2$ presenta una singolarità per $x = 0$, vengono meno i classici teoremi di esistenza e unicità. Né l'aver riconosciuto che una soluzione del sistema dato ammette, per $x = 0$, derivate di ordine comunque elevato, basta ad assicurare l'esistenza di una soluzione analitica del problema, a meno che non si voglia prescindere da questioni di convergenza. Tale esistenza viene invece accertata con un procedimento di approssimazioni successive (1) dopo aver convenientemente trasformato il sistema in questione.

(*) Redatta nell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo (INAC).

(**) Pervenuta all'Accademia il 5 settembre 1960.

(1) Cfr. M. PICONE e W. GROSS, *Intervallo d'esistenza e limitazioni per la soluzione di un sistema di equazioni differenziali ordinarie*, « Rend. dell'Accademia dei Lincei », serie VIII, vol. XXV, fasc. 5 (1958).

2. TRASFORMAZIONE DEL SISTEMA (1) E CASO $\beta = 0$. – Introducendo la nuova variabile

$$v = \frac{1-\beta}{\frac{p}{t^4} - \beta}, \tag{2}$$

il sistema dato assume la forma

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dx} = -\dfrac{3}{2}\dfrac{u}{t}\dfrac{v}{2{,}5 + 5kv + k^2v^2} \\ \dfrac{du}{dx} = -2\dfrac{u}{x} + \dfrac{4}{4+k}\dfrac{t^3}{v} \\ \dfrac{dt}{dx} = -u\dfrac{1+kv}{2{,}5 + 5kv + k^2v^2}, \end{cases} \tag{3}$$

essendo

$$k = \frac{4\beta}{1-\beta} \geq 0,$$

e va integrato con le condizioni iniziali

$$v = t = 1 \quad , \quad u = 0 \qquad \text{per} \quad x = 0. \tag{3'}$$

Dalle $(3)_1$, $(3)_3$ si ricava poi

$$\frac{3}{2}\frac{dt}{dv} = t\frac{1+kv}{v}$$

e quindi integrando [cfr. (3)']

$$t^{3/2} = v\, e^{k(v-1)}, \tag{4}$$

ciò che permette di ridurre (3) ad un sistema di due sole equazioni.

Comincio col prendere in esame il caso speciale $\beta = 0$ nel quale si avrà

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dx} = -\dfrac{3}{5}\dfrac{uv}{t} \\ \dfrac{du}{dx} = -2\dfrac{u}{x} + \dfrac{t^3}{v} \\ \dfrac{dt}{dx} = -\dfrac{2}{5}u \end{cases}$$

nonché [cfr. (4)]

$$t^{3/2} = v.$$

Eliminando u e v si ottiene l'equazione differenziale

$$\frac{d^2t}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{dt}{dx} + \frac{2}{5}t^{3/2} = 0 \tag{5}$$

con le condizioni iniziali

$$t = 1 \quad , \quad \frac{dt}{dx} = 0 \qquad \text{per} \quad x = 0. \tag{5'}$$

La (5) si può scrivere [2]

$$\frac{d^2\vartheta}{d\xi^2} + \frac{2}{\xi}\frac{d\vartheta}{d\xi} + \vartheta^n = 0 \quad , \quad n = \frac{3}{2}, \tag{6}$$

(2) Basta porre $t = \vartheta(\xi)$, $\xi = \sqrt{\frac{2}{5}}x$.

ferme restando le (5)′, ovvero

$$(6)' \qquad \vartheta = 1 \quad , \quad \frac{d\vartheta}{d\xi} = 0 \qquad \text{per} \quad \xi = 0 \, ;$$

e si riduce pertanto alla cosidetta *equazione di Emden dei gas politropici* [3].

È ben noto che [4], per $0 \leq n < 5$, la soluzione della (6) che soddisfa le condizioni iniziali (6)′ è definita in un intervallo $0 \; x_0$, $0 < x_0 < +\infty$, ed è limitata e positiva per $0 \leq \xi < x_0$, nulla per $\xi = x_0$.

3. Caso generale. – Intendendo ora $k > 0$ pongo

$$u = k_1 \frac{y}{x^2} \quad , \quad k_1 = \frac{4\, e^{-2k}}{k\,(4+k)} > 0 \, ;$$

nonché

$$v = \frac{z}{k} \, ,$$

onde il sistema (3) si riduce a [cfr. (4)]

$$(7) \qquad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = x^2 f(z) \\ \dfrac{dz}{dx} = -\mathrm{A} \dfrac{y}{x^2} g(z) \, , \end{cases}$$

essendo

$$(8) \qquad f(z) = z e^{2z} \quad , \quad g(z) = \frac{z^{1/3}\, e^{-2/3\, z}}{z^2 + 5z + 2{,}5} \quad , \quad \mathrm{A} = \frac{6\, e^{-4/3\, k}}{k^{1/3}\,(4+k)} > 0 \, ,$$

e va integrato con le condizioni

$$(7)' \qquad y = 0 \quad , \quad z = z_0 = k \qquad \text{per} \quad x = 0 \, .$$

Si osservi che $f(z)$ *risulta positiva e crescente per ogni* $z > 0$. Invece $g(z)$, pur essendo positiva per i suddetti valori di z, non è monotona. Precisamente si ha

$$\frac{dg}{dz} = \frac{1}{3} \frac{z^{-2/3}\, e^{-2/3\, z}\, \mathrm{P}(z)}{(z^2 + 5z + 2{,}5)^2} \, ,$$

essendo

$$\mathrm{P}(z) = 2{,}5 - 15\, z - 15\, z^2 - 2\, z^3 \, :$$

il segno di dg/dz dipende pertanto da quello del polinomio $\mathrm{P}(z)$ il quale ammette, nell'intervallo $0 \; +\infty$, una sola radice reale $z^* > 0$, risultando positivo a sinistra di z^* e negativo a destra. *La funzione* $g(z)$ *risulta dunque positiva per ogni* $z > 0$, *con un massimo* M *per* $z = z^*$.

Ciò premesso, per dimostrare l'esistenza della soluzione del sistema (7) (7)′ in un opportuno intervallo destro di $x = 0$, procedo per approssi-

(3) Cfr. ad esempio G. Sansone, *Equazioni differenziali nel campo reale*, Parte seconda, Zanichelli (Bologna 1941), pp. 338 e sgg.

(4) Cfr. l'Opera sopra citata, p. 343.

mazioni successive, considerando il sistema [cfr. Picone e Gross, loc. cit. (1)]

$$(9)\qquad \begin{cases} \dfrac{dy_{n+1}}{dx} = x^2 f(z_n) \\ \dfrac{dz_{n+1}}{dx} = -\mathrm{A}\dfrac{y_{n+1}}{x^2} g(z_n) \end{cases} \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots),$$

con le condizioni

$$(9)' \qquad y_{n+1} = 0 \quad , \quad z_{n+1} = z_0 \qquad \text{per} \quad x = 0 .$$

Per $n = 0$ si ha immediatamente

$$y_1(x) = \frac{1}{3} f(z_0)\, x^3 ,$$

nonché

$$z_1(x) = z_0 - \frac{\mathrm{A}}{6} f(z_0)\, g(z_0)\, x^2$$

e quindi:

a) $y_1(x)$ risulta funzione crescente e positiva per ogni $x > 0$;

b) $z_1(x)$ riesce decrescente e positiva in un certo intervallo $\overline{0\ x_1}$, $0 < x_1 < +\infty$, con $z_1(x_1) = 0$.

Indico con x^* la radice positiva dell'equazione

$$z_0 - \frac{\mathrm{A}}{6} \mathrm{M} f(z_0)\, x^2 = 0$$

osservando che, essendo $g(z_0) \leq \mathrm{M}$, è anche

$$z_1(x) \geq z_0 - \frac{\mathrm{A}}{6} \mathrm{M} f(z_0)\, x^2$$

per ogni $0 \leq x \leq x^*$. Se pertanto x_0 è un prefissato valore di x scelto con l'unica condizione $0 < x_0 < x^*$, sarà

$$z_1(x) \geq z_0 - \frac{\mathrm{A}}{6} \mathrm{M} f(z_0)\, x_0^2 = \lambda > 0$$

in tutto l'intervallo $\overline{0\ x_0}$.

Sussiste il seguente teorema:

Le funzioni $y_n(x)$ *e* $z_n(x)$, $(n = 1, 2, \cdots)$, *univocamente determinate dal sistema* (9)–(9)', *risultano, nell'intervallo chiuso* I *dell'asse* x *definito da* $0 \leq x \leq x_0$, *di classe* C^1 *almeno e monotone non negative, crescenti e decrescenti rispettivamente, con* $z_n(x) \geq \lambda$.

Ammettiamo che il teorema sia vero per $n = 2, 3, \cdots, r$ e dimostriamolo per $n = r + 1$. Essendo per ipotesi $z_r(x)$ funzione continua e positiva in I, si avrà ivi [cfr. (9) e (9)']

$$\frac{dy_{r+1}}{dx} \geq 0 ,$$

col segno di uguaglianza soltanto per $x = 0$, nonché

$$(10)\qquad y_{r+1}(x) = \int_0^x f[z_r(\xi)]\, \xi^2\, d\xi .$$

Anche $y_{r+1}(x)$ verifica dunque il teorema enunciato, ma insieme, applicando il teorema della media, si deduce

$$y_{r+1}(x) = \frac{1}{3} f[z_r^*(x)]\, x^3 , \tag{10}'$$

risultando $z_r^*(x)$ una funzione della x verificante, nell'intervallo I, la duplice limitazione

$$z_r(x) \leq z_r^*(x) \leq z_0 . \tag{11}$$

La (10)' dà luogo a

$$\frac{dz_{r+1}}{dx} = -\frac{A}{3} f[z_r^*(x)]\, g[z_r(x)]\, x \leq 0 ,$$

anche qui col segno di uguaglianza solo per $x = 0$, e quindi

$$z_{r+1}(x) = z_0 - \frac{A}{3}\int_0^x f[z_r^*(\xi)]\, g[z_r(\xi)]\, \xi\, d\xi \geq z_1(x) \geq \lambda . \tag{12}$$

Ormai, per dimostrare l'esistenza della soluzione del sistema (7) (7)', basterà far vedere che, comunque si fissi una quantità positiva $a < x_0$, la funzione $z_n(x)$, al divergere di n, converge uniformemente nell'intervallo I_a luogo dei punti di I per i quali $0 \leq x < a$.

Per questo, comincio con l'osservare che, essendo in I_a

$$\lambda \leq z_n(x) \leq z_0 \qquad (n = 1, 2, \cdots),$$

si avrà ivi

$$\begin{aligned} |f[z_n(x)] - f[z_{n-1}(x)]| &\leq L_a |z_n(x) - z_{n-1}(x)| \\ |g[z_n(x)] - g[z_{n-1}(x)]| &\leq L_a |z_n(x) - z_{n-1}(x)| , \end{aligned} \tag{13}$$

con L_a costante positiva, in quanto riescono limitate, per ogni $\lambda \leq z \leq z_0$, entrambe le derivate $\frac{df}{dz}$ e $\frac{dg}{dz}$. D'altra parte per la (12) si ha

$$z_{n+1}(x) - z_n(x) = \frac{A}{3}\int_0^x \{f[z_{n-1}^*(\xi)]\, g[z_{n-1}(\xi)] - f[z_n^*(\xi)]\, g[z_n(\xi)]\}\, \xi\, d\xi ,$$

nonché

$$\begin{aligned} z_{n+1}(x) - z_n(x) = \frac{A}{3}\int_0^x \{ & g[z_{n-1}(\xi)]\,(f[z_{n-1}^*(\xi)] - f[z_n^*(\xi)]) + \\ & + f[z_n^*(\xi)]\,(g[z_{n-1}(\xi)] - g[z_n(\xi)])\}\, \xi\, d\xi \end{aligned}$$

e quindi, indicando con M_1 il più grande fra M e $f(z_0)$ [cfr. (11)]

$$\begin{aligned} |z_{n+1}(x) - z_n(x)| \leq \frac{1}{3} A M_1 \int_0^x \{ & |g[z_n(\xi)] - g[z_{n-1}(\xi)]| + \\ & + |f[z_n^*(\xi)] - f[z_{n-1}^*(\xi)]|\}\, \xi\, d\xi , \qquad (n = 1, 2, \cdots). \end{aligned} \tag{14}$$

In quest'ultima si deve intendere $z_0^*(x) = z_0$ e insieme [cfr. (10) e (10)']

$$\frac{1}{3}x^3\{f[z_n^*(x)] - f[z_{n-1}^*(x)]\} = \int_0^x \{f[z_n(\xi)] - f[z_{n-1}(\xi)]\}\,\xi^2\,d\xi,$$

per cui [cfr. (13)]

$$|f[z_n^*(x)] - f[z_{n-1}^*(x)]| \leq \frac{3L_a}{x^3}\int_0^x |z_n(\xi) - z_{n-1}(\xi)|\,\xi^2\,d\xi.$$

In definitiva la (14) si riduce a

(14)'
$$|z_{n+1}(x) - z_n(x)| \leq$$

$$\leq Q_a \int_0^x \left[|z_n(\xi) - z_{n-1}(\xi)| + \frac{3}{\xi^3}\int_0^\xi |z_n(\eta) - z_{n-1}(\eta)|\,\eta^2\,d\eta\right] d\xi \qquad (n = 1, 2, \cdots),$$

essendo

$$Q_a = \frac{a}{3}AM_1L_a,$$

con l'ulteriore condizione

$$|z_1(x) - z_0| \leq z_0;$$

ciò che basta per avere, in tutto I_a, [cfr. (14)']

$$|z_2(x) - z_1(x)| \leq z_0 Q_a \int_0^x \left(1 + \frac{3}{\xi^3}\int_0^\xi \eta^2\,d\eta\right) d\xi = z_0 Q_a\left(1 + \frac{3}{3}\right)x,$$

cioè in generale

$$|z_{n+1}(x) - z_n(x)| \leq z_0 Q_a^n \frac{x^n}{n!}\prod_{\xi=3}^{n+2}\left(1 + \frac{3}{\xi}\right) \leq z_0 \frac{(2aQ_a)^n}{n!},$$

e quindi l'uniforme convergenza c. d. d.

Analisi matematica. — *Sur un problème de Z. Zahorski concernant les points où la dérivée est infinie.* Nota (*) di SOLOMON MARCUS, presentata dal Socio M. PICONE.

Z. Zahorski a posé en 1950 le problème suivant ([7], Problème VII, p. 52): « Existe-t-il pour chaque ensemble dénombrable E du type G_δ une telle fonction discontinue $f(x)$ ayant partout une dérivée que $f'(x) = +\infty$ pour $x \in E$, $f'(x) = 0$ pour tout $x \in\!\!\!| E$? ».

Dans ce qui suit, je vais établir un résultat qui contient la réponse affirmative au problème ci-dessus, chaque fois que l'ensemble dénombrable E est fermé (théorème 1). Puis (théorème 2), je vais montrer que la condition de dénombrabilité ainsi que celle d'être du type G_δ sont nécessaires pour E, si l'on veut que le problème ait une réponse affirmative. Enfin, je vais discuter deux modes d'aborder le problème de Zahorski dans le cas où E n'est pas nécessairement fermé: l'un revient à un problème de dérivabilité presque partout d'une série de fonctions (théorème 3); l'autre présente une analogie étroite avec un certain problème de la théorie des nombres.

THÉORÈME 1. – *Soit* E *un ensemble dénombrable et du type borélien* G_δ. *Il existe une fonction croissante f, discontinue en chaque point de* E, *continue en chaque point étranger à* E *et telle que* $f'(x) = +\infty$ *si* $x \in E$ *et* $f'(x) = 0$ *si* $x \in\!\!\!| \bar{E}$ (Par $\bar{E}$ on a désigné la fermeture de E).

Démonstration. – Soit $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ une suite formée avec tous les éléments de E. Posons, pour chaque n entier positif,

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < x_n \\ 1/2 & \text{si} \quad x = x_n \\ 1 & \text{si} \quad x > x_n \end{cases}$$

et

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f_n(x) . \tag{1}$$

Du fait que, pour chaque n entier positif, x_n est le seul point de discontinuité de f_n et de ce que la série (1) est uniformément convergente on déduit que f est continue en chaque $x \in\!\!\!| E$ et discontinue en chaque $x \in E$. Soit maintenant un certain x_n. Du fait que f est monotone croissante on déduit l'existence de $f(x_n - 0)$ et $f(x_n + 0)$. Du fait que

$$f_p(x_n - 0) = f_p(x_n) = f_p(x_n + 0) \qquad \text{pour} \quad p = 1, 2, \cdots, n-1, n+1, \cdots$$

(*) Pervenuta all'Accademia l'8 settembre 1960.

et

$$f_n(x_n - 0) < f_n(x_n) < f_n(x_n + 0)$$

et de ce que la série (1) est uniformément convergente, on déduit que

$$f(x_n - 0) < f(x_n) < f(x_n + 0):$$

donc $f'(x_n) = +\infty$ pour $n = 1, 2, \cdots$, c'est-à-dire $f'(x) = +\infty$ pour $x \in E$.

Passons maintenant aux points étrangers à $\overline{E}$. Il faut montrer d'abord que tels points existent. Or, en vertu d'un théorème connu, un ensemble dénombrable du type G_δ est clairsemé (voir, par exemple, [3], p. 324) et, d'autre part, un ensemble clairsemé est partout non dense (voir, par exemple, [3], p. 46). Donc $\overline{E}$, comme fermeture d'un ensemble partout non dense, est aussi partout non dense. Soit donc $x \in \overline{E}$. Il y a un voisinage de x disjoint de E. Dans ce voisinage, la série obtenue de (1) par dérivation est uniformément convergente et, en vertu du théorème classique de dérivation terme à terme, on déduit qu'on a $f'(x) = 0$. Le théorème 1 est complètement démontré.

THÉORÈME 2. – *Si f est discontinue en chaque point de* E, $f'(x)$ *est finie pour chaque* $x \in \overline{E}$ E *et* $f'(x) = +\infty$ *si* $x \in E$, *alors* E *est dénombrable et du type* G_δ.

Démonstration. – De ce que $f'(x)$ est finie pour $x \in \overline{E}$ E on déduit que f est continue en chaque $x \in \overline{E}$ E. Comme f est discontinue en chaque $x \in E$, on peut dire que f est dérivable en chaque point de continuité. Mais alors, en vertu d'un théorème de A. S. Kronrod [2], les points de discontinuité de f' forment un ensemble du type G_δ.

D'après un théorème de A. Brudno (théorème 3 de [1]), les points de discontinuité où $f'(x)$ existe (et est, bien entendu, infinie) forment un ensemble dénombrable. Donc E est dénombrable.

Remarque. – L'hypothèse «$f'(x) = +\infty$ si $x \in E$» peut être remplacée par l'hypothèse suivante, plus large: « Pour chaque $x \in E$, au moins un nombre dérivé de f en x est infini ». En effet, le théorème 1 de [1] affirme: « Les points où un au moins des nombres dérivés est infini forment un ensemble du type G_δ ».

En ce qui concerne le comportement de la fonction f du théorème 1 aux points de $\overline{E} - E$, il est aisé de voir qu'on aurait $f'(x) = 0$ pour $x \in \overline{E} - E$ dès qu'on pourrait démontrer que la série (1) peut être dérivée terme à terme en chaque point. Donc:

Si la série (1) *peut être dérivée terme à terme en chaque point, alors la réponse au problème de Zahorski est affirmative.*

Un ensemble est dit *ambigu de classe 1* s'il est à la fois du type F_σ et du type G_δ. Un ensemble est dit développable, s'il peut être mis sous la forme

$$(F_1 - F_2) \cup (F_3 - F_4) \cup \cdots \cup (F_\xi - F_{\xi+1}) \cup \cdots$$

où chaque F_ξ est fermé et $F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset F_4 \supset \cdots \supset F_\xi \supset F_{\xi+1} \supset \cdots$

On connait le résultat suivant ([3], p. 324): « Dans les espaces complets, un ensemble est développable si et seulement si il est ambigu de classe 1 ».

Revenons maintenant à l'ensemble E qui figure dans le problème de Zahorski. Cet ensemble est, par hypothèse, du type G_δ. D'autre part, comme ensemble des points de discontinuité, E est en tout cas du type F_σ, donc E est ambigu de classe 1 et, en vertu du théorème ci–dessus, il est développable: $E = (F_1 - F_2) \cup (F_3 - F_4) \cup \cdots \cup (F_{2n-1} - F_{2n}) \cup \cdots$ (On sait que, dans un espace complet séparable, toute suite descendante d'ensembles fermés est dénombrable). *Si l'on peut s'arranger tel que chaque ensemble* F_n $(n = 1, 2, \cdots)$ *soit dénombrable* alors, en vertu du théorème 1, il existe une fonction f_n discontinue en chaque point de F_n, continue en chaque $x \in \overline{\ } F_n$ et telle que $f_n(x) = +\infty$ si $x \in F_n$ et $f_n(x) = 0$ si $x \in \overline{\ } F_n$.

Il faut considérer d'abord le cas où $F_n = 0$ pour chaque $n > 2$, c'est–à–dire: Étant donnés deux ensembles fermés F_1 et F_2, $F_1 \supset F_2$, si f_1 et f_2 sont les fonctions associées par le théorème 1 aux ensembles F_1 et F_2, peut–on trouver une combinaison des fonctions f_1 et f_2, telle que la fonction ainsi obtenue réponde affirmativement au problème de Zahorski pour $E = F_1 - F_2$? Ou, peut–on arranger les valeurs et les sauts de f_1 et f_2 de manière à pouvoir obtenir la solution affirmative du problème de Zahorski pour chaque ensemble E dénombrable qui est la différence de deux ensembles fermés F_1 et F_2 $(F_1 \supset F_2)$?

Ici, il est à remarquer que, dans le cas particulier où E est la différence de deux ensembles fermés, $\overline{E} - E$ est fermé, en vertu d'un théorème de C. Kuratowski et W. Sierpiński, [4]. Soit alors f la fonction associée à E par le théorème 1. Les propriétés différentielles de f sur E et sur le complémentaire de $\overline{E}$ ne sont pas influencées par le comportement de f sur $\overline{E} - E$, donc la fonction

$$F(x) = \begin{cases} \text{une valeur quelconque} & \text{si } x \in \overline{E} - E \\ f(x) & \text{si } x \in \overline{\ } \overline{E} - E \end{cases}$$

est discontinue en chaque $x \in E$, $F'(x) = +\infty$ si $x \in E$ et $F'(x) = 0$ si $x \in \overline{\ } \overline{E}$.

Si on réussit à résoudre le problème de Zahorski pour chaque ensemble qui est la différence de deux ensembles fermés dénombrables, alors on peut essayer de passer au cas général en résolvant un problème de dérivation terme à terme d'une certaine série de fonctions. Si

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} (F_{2n-1} - F_{2n})$$

et si φ_n est la fonction qui donne la solution du problème de Zahorski pour $F_{2n-1} - F_{2n}$, alors, en désignant par M_n une borne de φ_n, posons:

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n M_n} \varphi_n(x). \tag{2}$$

Les ensembles $F_{2n-1} - F_{2n}$ étant disjoints, pour chaque $x \in E$ il y a un seul n tel que φ_n soit discontinue en x, donc, en vertu de la convergence uniforme de la série (2), φ est discontinue en chaque point de E et continue en chaque

point étranger à E. En utilisant de nouveau la disjonction des ensembles $F_{2n-1} - F_{2n}$, on déduit que, pour chaque $x \in E$, il y a un seul n tel que $\varphi'_n(x) = +\infty$, tandis que, pour $p \neq n$, on a $\varphi'_p(x) = 0$. D'autre part, si $x \in \overline{E}$, alors $x \in F_{2n-1} - F_{2n}$ pour $n = 1, 2, \cdots$, donc $\varphi'_n(x) = 0$ pour $n = 1, 2, \cdots$ On a donc le

THÉORÈME 3. – *Si le problème de Zahorski est résolu par l'affirmatif pour chaque ensemble dénombrable, qui est une différence de deux ensembles fermés, alors la possibilité de dérivation terme à terme de la série* (2) *entraîne la solution affirmative du problème de Zahorski dans le cas général.*

Remarque. – La considération des séries (1) et (2) est, en certaine mesure, suggérée par le travail [5] de J. S. Lipinski.

Passons maintenant à un autre mode d'aborder le problème de Z. Zahorski. Désignons par $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ les éléments d'un ensemble E dénombrable, du type G_δ. Supposons qu'on a trouvé une fonction f donnant la réponse affirmative au problème par rapport à E. Posons $f(x_n) = a_n$ et soit $b_1, b_2, \cdots, b_n, \cdots$ une suite formée avec les valeurs prises par f sur les intervalles de constance, intervalles qui sont contigus à $\overline{E}$. Si $\xi \in \overline{E} - E$ et si

$$\lim_{n\to\infty} x_{p_n} = \xi \tag{3}$$

alors on a, pour $x_{p_n} \in E$ et en vertu de la continuité de f en ξ,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{p_n} - \lim a_{p_n}}{x_{p_n} - \xi} = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_{p_n}) - f(\xi)}{x_{p_n} - \xi} = 0. \tag{4}$$

D'autre part, pour $x'_{p_n} \in \overline{E}$ tel que $f(x'_n) = b_n$ pour $n = 1, 2, \cdots$ et $\lim_{n\to\infty} x'_{p_n} = \xi$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{p_n} - \lim b_{p_n}}{x'_{p_n} - \xi} = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x'_{p_n}) - f(\xi)}{x'_{p_n} - \xi} = 0, \tag{5}$$

donc $f(x_{p_n})$ et $f(x'_{p_n})$ réalisent une approximation de $f(\xi)$ plus fine que celle réalisée par x_{p_n} et x'_{p_n} pour ξ. Ceci est très naturel, du moins presque partout sur $\overline{E} - E$. En effet, on a le théorème suivant de R. M. Redheffer [6]:

« Si $\sum_{n=1}^{\infty} d_n < \infty$ $(d_n > 0)$ et si pour chaque $\xi \in A$ on a $|\xi - r_n| < d_n$ pour une infinité de valeurs de n, alors A est de mesure nulle ».

Posons $x_n = r_n$. Il s'ensuit que, à l'exception possible d'un ensemble de mesure nulle d'éléments de $\overline{E} - E$, pour chaque $\xi \in \overline{E} - E$ l'approximation de ξ par x_{p_n} satisfaisant à (3) se fait non plus vite que la convergence de la série dont d_n est le terme général. Donc la difficulté de réaliser les conditions (4) et (5) se manifeste seulement sur une partie de mesure nulle de $\overline{E} - E$.

En tout cas, les conditions (3) et (4) rappellent, par analogie, le problème de l'approximation des nombres irrationnels par des rationnels. Ici, $\overline{E} - E$ joue le rôle de l'ensemble des points irrationnels, tandis que $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ sont les « rationnels ». Mais les idées de la théorie des approximations dio-

phantiennes apportent ici peu de services, car, contrairement à l'ensemble des nombres irrationnels, qui est partout dense, l'ensemble $\bar{E} - E$ est partout non dense; contrairement à l'ensemble des nombres rationnels, qui est partout dense, l'ensemble E est partout non dense.

Ouvrages cités.

[1] A. Brudno, *Continuité et dérivabilité*, « Math. Sbornik », *13* (55), pp. 119–134 (1943).
[2] A. S. Kronrod, *Sur la structure de l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction dérivable en ses points de continuité*, « Izvestia Akad. Nayk », pp. 569–578 (1939).
[3] C. Kuratowski, *Topologie*, I, Warszawa–Wroclaw, 1948.
[4] C. Kuratowski–W. Sierpinski, *Sur les différences de deux ensembles fermés*, « Tôhoku Math. Journ. », *20*, p. 22 (1921).
[5] J. S. Lipinski, *Sur la dérivée d'une fonction de sauts*, « Colloq. Math. », *4*, fasc. 2, pp. 197–205 (1957).
[6] R. M. Redheffer, *Approximation by enumerable sets*, « Amer. Math. Monthly », *62*, pp. 573–576 (1955).
[7] Z. Zahorski, *Sur la première dérivée*, « Trans. Amer. Math. Soc. », *69*, pp. 1–54 (1950)

Analisi matematica. — *La différentiabilité des représentations quasi-conformes tridimensionnelles.* Nota (*) di PETRU CARAMAN, presentata dal Socio B. SEGRE.

Le but de cette Note est de définir deux classes de représentations quasi-conformes univalentes tridimensionnelles, de démontrer ensuite qu'une représentation quasi-conforme d'un domaine D de l'espace euclidien tridimensionnel est presque partout différentiable dans D, de trouver les systèmes d'équations aux dérivées partielles du premier ordre et du second degré qu'elles vérifient et d'établir que, localement, ces systèmes sont équivalents à des classes de systèmes d'équations linéaires du premier ordre. Dans notre travail [1], nous avons considéré une autre classe de représentations quasi-conformes, celle-ci ayant une seule paire de caractéristiques.

Rappelons la définition des représentations quasi-conformes à une seule paire de caractéristiques: une représentation quasi-conforme à une seule paire de caractéristiques

$$(C) \qquad p\,,\ p'\,,\ \varphi\,,\ \psi\,,\ \theta\,,$$

du domaine D, où (C) représente une distribution continue, est une représentation continue et univalente du domaine D, qui pour tout $t = xe_1 + ye_2 + ze_3 \in D$ transforme l'indicatrice de Tissot $E_\varepsilon[(C), t]$ dans une sphère infinitésimale.

Dans cette définition, $p = \frac{a}{c}$, $p' = \frac{b}{c}$ où a, b, c $(a \geq b \geq c)$ représentent les demi-axes de l'ellipsoïde qui constitue l'indicatrice de Tissot et φ, ψ, θ sont les angles d'Euler qui déterminent les directions des axes de l'indicatrice de Tissot relativement aux axes de coordonnées. Une distribution continue des caractéristiques veut dire que $p(t)$, $p'(t)$ sont définies et continues partout dans D, tandis que $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\theta(t)$ sont définies partout où $p > p' > 1$, et continues dans tout sous-domaine fermé $D_1 < D$, qui ne contient pas de points où $p = p'$, ou $p' = 1$. Enfin, par représentation d'une indicatrice de Tissot dans une sphère infinitésimale nous entendons une représentation continue et univalente, dans le voisinage du centre t_0 de l'ellipsoïde respectif, qui vérifie la condition

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\max\limits_{t \in E_\varepsilon} |f(t) - f(t_0)|}{\min\limits_{t \in E_\varepsilon} |f(t) - f(t_0)|} = 1\,.$$

(*) Pervenuta all'Accademia il 19 settembre 1960.

En particulier, pour $p = 1$ on obtient les représentations conformes.

Généralisons maintenant pour le case tridimensionnel la définition de Chabat [2] des représentations quasi–conformes à deux paires de caractéristiques:

Une *représentation quasi–conforme à deux paires de caractéristiques* (C), (C_1) *du domaine* D, où (C), (C_1) représentent une distribution continue, est une représentation continue et univalente dans D, qui – pour tout point $t_0 \in D$–transforme l'ellipsoïde infinitésimal E_ε dans l'ellipsoïde infinitésimal de centre T_0 et de caractéristiques $p_1(t_0)$, $p_1'(t_0)$, $\varphi_1(t_0)$, $\psi_1(t_0)$, $\theta_1(t_0)$.

On dit qu'une représentation transforme l'ellipsoïde infinitésimal E_ε dans un ellipsoïde infinitésimal de centre T_0 et de caractéristiques (C_1) si la représentation est continue et univalente au voisinage de t_0, et la surface $f(E_\varepsilon)$ peut être comprise entre deux ellipsoïdes concentriques $E_{\varepsilon_1'}[(C_1), t_0]$ et $E_{\varepsilon_1''}[(C_1), t_0]$, où $\varepsilon_1' \leq \varepsilon_1''$ et $\lim \frac{\varepsilon_1''}{\varepsilon_1'} = 1$.

Un cas particulier important de cette classe de représentations quasi–conformes est celui de la classe des représentations Q–quasi–conformes: une *représentation Q–quasi–conforme* est une représentation quasi–conforme à deux paires de caractéristiques (C), (C_1), où $p \leq Q$, $p_1 \leq Q$ ($Q = \text{const.}$).

La définition des représentations quasi–conformes à deux paires de caractéristiques présente pourtant une certaine asymétrie par rapport aux deux paires de caractéristiques, par le fait que p, p', φ, ψ, θ dépendent seulement de t; autrement dit, en tout point t, l'ellipsoïde initial est déterminé à une homothétie près, tandis que – relativement à l'ellipsoïde transformé – on connaît seulement les caractéristiques, mais pas la position (car son centre $f(t)$ est déterminé après avoir trouvé une représentation correspondant à ces caractéristiques). Cette asymétrie disparaît en introduisant les représentations quasi–conformes symétriques tridimensionnelles, qui généralisent celles définies par Chapiro [3]:

Soient D et Δ deux domaines respectivement dans les espaces des variables t et T, et soient (C), (C_1) deux paires de caractéristiques définies et continues pour toutes les paires de valeurs (t, T), $(t \in D, T \in \Delta)$ (c'est–à–dire une distribution continue dans le domaine $D \times \Delta$ de l'espace produit). La fonction $T = f(t)$ effectue une *représentation quasi–conforme symétrique* du domaine D sur le domaine Δ, avec les caractéristiques indiquées, si – pour tout $t \in D$ – l'ellipsoïde infinitésimal E_ε est transformé dans un ellipsoïde infinitésimal de centre $T = f(t)$ et de caractéristiques $p_1(t, T)$, $p_1'(t, T)$, $\varphi_1(t, T)$, $\psi_1(t, T)$, $\theta_1(t, T)$.

Les trois classes de représentations quasi–conformes univalentes coïncident dans leur ensemble.

Nous allons démontrer maintenant la différentiabilité des représentations quasi–conformes; dans ce but, nous allons établir quelques résultats préliminaires. Commençons par généraliser deux lemmes sur la dilatation.

Lemme 1. – *Une représentation Q–quasi–conforme* $T = f(t)$ *a la dilatation*

$$\Lambda_f = \overline{\lim_{h \to 0}} \frac{|f(t+h) - f(t)|}{|h|}$$

presque partout finie: $\Lambda_f(t) < \infty$, *c'est-à-dire à l'exception d'un ensemble de mesure (spatielle) nulle.*

La démonstration est analogue à celle du lemme 2 du travail de Menchoff [4].

Remarque. – Dans l'énoncé du lemme, nous considérons pour Λ_f l'expression

$$\Lambda_f(t) = \overline{\lim_{|h|\to 0}} \frac{|f(t+h)-f(t)|}{|h|},$$

au lieu de l'expression

$$\overline{\lim_{h\to 0}} \frac{f(t+h)-f(t)}{h},$$

qui n'a pas de sens tant que l'on n'a pas défini un algorithme de calcul convenable pour les nombres hypercomplexes à trois unités indépendantes. Les considérations faites dans notre ouvrage [1] justifient entièrement cet artifice, qui représente un instrument précieux pour les investigations ultérieures.

LEMME 2. – *Une représentation* Q*-quasi-conforme* $T = f(t)$ *a la dilatation à carré sommable dans l'intérieur de* D, *c'est-à-dire pour tout domaine* D_1, $\bar{D}_1 \subset D$.

La démonstration est analogue à celle du lemme 2 de l'ouvrage de Volkoviskii [5].

Le théorème de Tonelli nous sert à généraliser le théorème de Stépanoff [6, 7]:

THÉORÈME 1. – *La condition nécessaire et suffisante pour que la fonction* $u(x, y, z)$, *définie et continue dans le domaine* D, *soit différentiable presque partout sur un ensemble mesurable* E, *est que l'on ait presque partout dans* E

$$\Lambda_u(t) = \overline{\lim_{h_1, k_1, l \to 0}} \left| \frac{u(x+h, y+k, z+l) - u(x, y, z)}{\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}} \right| < \infty.$$

La démonstration est analogue à celle du cas bidimensionnel.

Comme une conséquence du théorème précédent, nous obtenons le théorème:

THÉORÈME 2. – *Si une fonction vectorielle* $f(t) = ue_1 + ve_2 + we_3$ *est continue dans* D, *et l'on a presque partout dans* D

$$\Lambda_f(t) = \overline{\lim_{|h|\to 0}} \frac{|f(t+h)-f(t)|}{|h|} < \infty,$$

alors $f(t)$ *est différentiable presque partout dans* D.

En vertu des deux lemmes sur la dilatation et du théorème précédent, nous obtenons le théorème fondamental sur la différentiabilité des représentations quasi-conformes:

THÉORÈME 3. – *Une représentation quasi-conforme* $f(t) = ue_1 + ve_2 + we_3$ *du domaine* D *est différentiable presque partout dans* D, *et les dérivées partielles*

$u_x, u_y, u_z, v_x, v_y, v_z, w_x, w_y, w_z$, *sont à carré sommable dans l'intérieur de* D, *c'est-à-dire dans tout domaine* $D_1, \bar{D}_1 \subset D$.

Dans notre ouvrage [1] nous avons trouvé le système d'équations qu'une représentation quasi-conforme à une seule paire de caractéristiques vérifie dans ses points de différentiabilité:

$$\frac{u_x^2 + v_x^2 + w_x^2}{\alpha_{11}} = \frac{u_y^2 + v_y^2 + w_y^2}{\alpha_{22}} = \frac{u_z^2 + v_z^2 + w_z^2}{\alpha_{33}} = \frac{u_x u_y + v_x v_y + w_x w_y}{\alpha_{12}} =$$

$$= \frac{u_x u_z + v_x v_z + w_x w_z}{\alpha_{13}} = \frac{u_y u_z + v_y v_z + w_y w_z}{\alpha_{23}}.$$

Les quantités α_{ij}, qui caractérisent l'indicatrice de Tissot, sont équivalentes aux caractéristiques (C) et s'expriment en fonction de celles-ci par des relations trouvées dans [1]. C'est ce qui nous autorise à les appeler les caractéristiques de la représentation quasi-conforme correspondante.

On démontre de la même manière que les représentations quasi-conformes à deux paires de caractéristiques vérifient le système:

$$\frac{\alpha''_{11} u_x^2 + \alpha''_{22} v_x^2 + \alpha''_{33} w_x^2 + 2\alpha''_{12} u_x v_x + 2\alpha''_{13} u_x w_x + 2\alpha''_{23} v_x w_x}{\alpha'_{11}} =$$

$$= \frac{\alpha''_{11} u_y^2 + \alpha''_{22} v_y^2 + \alpha''_{33} w_y^2 + 2\alpha''_{12} u_y v_y + 2\alpha''_{13} u_y w_y + 2\alpha''_{23} v_y w_y}{\alpha''_{22}} =$$

$$= \frac{\alpha''_{11} u_z^2 + \alpha''_{22} v_z^2 + \alpha''_{33} w_z^2 + 2\alpha''_{12} u_z v_z + 2\alpha''_{13} u_z w_z + 2\alpha''_{23} v_z w_z}{\alpha''_{33}} =$$

$$= \frac{\alpha''_{11} u_x u_y + \alpha''_{22} v_x v_y + \alpha''_{33} w_x w_y + \alpha''_{12}(u_x v_y + u_y v_x) + \alpha''_{13}(u_x w_y + u_y w_x) + \alpha''_{23}(v_x w_y + v_y w_x)}{\alpha'_{12}} =$$

$$= \frac{\alpha''_{11} u_x u_z + \alpha''_{22} v_x v_z + \alpha''_{33} w_x w_z + \alpha''_{12}(u_x v_z + u_z v_x) + \alpha''_{13}(u_x w_z + u_z w_x) + \alpha''_{23}(v_x w_z + v_z w_y)}{\alpha''_{13}} =$$

$$= \frac{\alpha''_{11} u_y u_z + \alpha''_{22} v_y v_z + \alpha''_{33} w_y w_z + \alpha''_{12}(u_y v_z + u_z v_y) + \alpha''_{13}(u_y w_z + u_z w_y) + \alpha''_{23}(v_y w_z + v_z w_y)}{\alpha''_{23}}.$$

où $\alpha'_{ij}(t)$ sont les caractéristiques de l'ellipsoïde infinitésimal initial, tandis que $\alpha''_{ij}(t)$ sont les caractéristiques de celui transformé.

Les représentations quasi-conformes symétriques vérifient le même système, où α'_{ij} et α''_{ij} sont des fonctions de t et T. Donc, le système est quasi-quadratique.

On démontre facilement que, localement, les deux premières classes de systèmes d'équations aux dérivées partielles du premier ordre et du second degré sont équivalentes à des classes de systèmes de huit équations linéaires de la forme indiquée dans la note [1], les coefficients vérifiant certaines conditions qu'on obtient aussi pour les deux autres classes de représentations quasi-conformes de la même manière que dans [1].

BIBLIOGRAPHIE.

[1] P. CARAMAN, *Noțiuni introductive în teoria reprezentărilor cvasiconforme tridimensionale*, «Studii și Cercetări, Iași», XI, 1, pp. 63–92 (1960).

[2] Б. В. Шабат, *Об обобщённых решениях одной системы уравнений в частных производных*, «Матем. сб.», *17* (59), с. 193–210 (1945).

[3] З. Я. Шапиро, *О существовании и квазиконформных отображений*, «ДАН СССР», *30*, с. 685–687 (1941)

[4] D. MENCHOFF, *Sur une généralisation d'un théorème de M. H. Bohr*, «Матем. сб.», *2* (44), 356 (1937).

[5] Л. И. Волковыский, *Квазиконформные отображения*, «Львов. Унив.», 1954, 135 с.

[6] V. STEPANOFF, *Ueber totale Differenzierbarkeit*, «Math. Ann.», *90*, s. 318–320 (1923).

[7] — *Sur les conditions de l'existence de la différentielle totale*, «Матем. сб.», *32*, pp. 511–527 (1925).

Fisica. — *Scambio termico per fluidi non-Newtoniani in moto laminare in condotti circolari.* – I. *Scambio termico per temperatura della parete costante* (*). Parte II. Nota (**) di MARIO DENTE, presentata dal Socio G. NATTA.

Determinazione dei più elevati autovalori ed autofunzioni.

La determinazione dei più elevati autovalori e autofunzioni, con il procedimento di integrazione per serie di potenze è alquanto laboriosa, e sempre meno precisa. Questo a meno di non ricorrere a serie più rapidamente convergenti (1). Risulta perciò più vantaggioso ricorrere per tali autovalori ed autofunzioni al seguente procedimento, che è una estensione di quello già presentato nel sopracitato lavoro di L. R. Sellars, M. Tribus, J. S. Klein [5]. Quando $\varphi \to 0$ l'equazione (5) tende a diventare

$$\varphi F'' + F' + \beta^2 \varphi F = 0 . \tag{33}$$

La soluzione della equazione (33) risulta

$$F = J_0(\beta\varphi) . \tag{34}$$

Questa soluzione approssima il profilo effettivo fino a valori di φ tanto più grandi, quanto più elevato è m. Al limite, per $m = \infty$ la soluzione vale esattamente per tutta la sezione del condotto. Quando $\beta\varphi$ è elevato, anche per piccoli valori di φ, si può assumere per J_0 la sua espressione asintotica:

$$F = J_0(\beta\varphi) \cong \sqrt{\frac{2}{\pi\beta\varphi}} \cos\left(\beta\varphi - \frac{\pi}{4}\right). \tag{35}$$

Per $0 < \varphi < 1$, purché β sia elevato, si può dimostrare (2) che la equazione (5)

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Industriale del Politecnico di Milano con il contributo della Soc. Montecatini.

(**) Pervenuta all'Accademia il 30 giugno 1960.

(1) Per $m = 2$ M. ABRAMOWITZ, « Journal of Mathematics and Physics », *32*, p. 184 (1953). Per $m \neq 2$, lavoro in preparazione.

(2) Se nell'equazione (5) si fa la seguente sostituzione di variabili:

$$z = \varphi^{1/2} (1 - \varphi^m)^{1/4} F$$

$$t = \int_0^{\varphi} (1 - \varphi^m)^{1/2} \, d\varphi$$

si ricava la seguente equazione

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + (f(t) + \beta^2) z = 0 . \tag{57}$$

Nella (48)

$$f(t(\varphi)) = \frac{4 + 4(m^2 - m - 2)\varphi^m + (m^2 + 4m + 4)\varphi^{2m}}{16(1 - \varphi^m)^3 \varphi^2} . \tag{58}$$

ha la seguente soluzione asintotica

$$F \cong A \frac{\cos\left[\beta \int_0^{\varphi} \sqrt{1-\varphi^m}\, d\varphi - \alpha\right]}{\sqrt{\varphi}\,(1-\varphi^m)^{1/4}} \tag{36}$$

Nella (36) A, α, sono costanti da determinarsi imponendo che per $\varphi \to 0$ le soluzioni (35) (36) tendano ad essere identiche. Si vede immediatamente che

$$A = \sqrt{\frac{2}{\pi\beta}} \quad , \quad \alpha = \frac{\pi}{4} ,$$

perciò la (36) diventa

$$F \cong \sqrt{\frac{2}{\pi\beta\varphi}} \frac{\cos\left[\beta \int_0^{\varphi} \sqrt{1-\varphi^m}\, d\varphi - \pi/4\right]}{(1-\varphi^m)^{1/4}} . \tag{37}$$

La (37) non costituisce buona approssimazione [4] quando $\varphi \to 1$. Posto $y = 1 - \varphi$ la (5) per $\varphi \to 1$ si può scrivere, arrestando lo sviluppo in serie di $(1-\varphi^m)$ al 1° termine [4]

$$F'' + \beta^2 m y F \cong 0 . \tag{38}$$

La soluzione della (38) è

$$F \cong D \sqrt{y}\, J_{1/3}\left(\frac{2\sqrt{m}}{3} \beta y^{3/2}\right) + E \sqrt{y}\, J_{-1/3}\left(\frac{2\sqrt{m}}{3} \beta y^{3/2}\right) \tag{39}$$

dove D ed E sono costanti da determinarsi, imponendo che per β elevati, le (37) e (39) diventino identiche.

Purché m non sia molto elevato [4] la (37) diventa, per y piccolo:

$$F \cong \sqrt{\frac{2}{\pi\beta}} \frac{\cos\left[\frac{2\sqrt{m}}{3} \beta y^{3/2} - \left(\frac{2\beta\tau}{\pi} - 1\right)\frac{\pi}{4}\right]}{m^{1/4} y^{1/4}} . \tag{40}$$

Mentre per βy elevato, anche quando y è piccolo (quindi per valori di β tanto più grandi quanto più grande è m [4]) la (39) si può scrivere

$$F \cong D \sqrt{\frac{3}{\pi\beta}} \frac{\cos\left(\frac{2\sqrt{m}}{3} \beta y^{3/2} - \frac{5\pi}{12}\right)}{m^{1/4} y^{1/4}} + E \sqrt{\frac{3}{\pi\beta}} \frac{\cos\left(\frac{2\sqrt{m}}{3} \beta y^{3/2} - \frac{\pi}{12}\right)}{m^{1/4} y^{1/4}} . \tag{41}$$

Se

$$f(t) \ll \beta^2 \tag{59}$$

si può scrivere la (57) così

$$z'' + \beta^2 z \cong 0 \tag{60}$$

e l'integrale è la (36).

Occorre notare che la (59) richiede che β^2 sia sufficientemente grande e che φ sia abbastanza lontano da 0 e da 1. Il campo di attendibilità della soluzione (36) si avvicina tanto più a $\varphi = 1$ quanto più m è elevato (vedi (58)). Contemporaneamente si restringe il campo di applicabilità della successiva espressione asintotica (38), che è molto precisa invece per $m = 1$. Quindi per valori di m crescenti le formule (43), (45), (46), (47) cominciano ad essere soddisfacenti per indici n sempre più elevati. Però, ancora per il valore $m = 10$, le Tabelle II (vedi Parte I) e IV mostrano buon accordo già per $n = 1 \div 2$.

TABELLA IV.

m	β_0	β_1	β_2	β_0^2	β_1^2	β_2^2	C_0	$-C_1$	C_2	$-F_0'(1)$	$-F_1'(1)$	$-F_2'(1)$	$-C_0F_0'(1)$	$-C_1F_1'(1)$	$-C_2F_2'(1)$	Nu_∞
2	2,6667	6,6667	10,6667	7,111	44,44	113,78	1,4799	0,80345	0,58732	0,9869	1,3395	1,5668	1,4606	1,0762	0,9202	3,566
4	2,3977	5,9943	9,5909	5,75	35,93	91,99	1,6024	0,8700	0,6359	1,0726	1,4557	1,7026	1,7187	1,2665	1,0827	3,833
6	2,3003	5,7506	9,2011	5,2914	33,07	84,66	1,6907	0,9179	0,6709	1,1317	1,5359	1,7965	1,9134	1,4098	1,2053	3,969
10	2,2198	5,5495	8,8792	4,93	30,80	78,84	1,8194	0,9877	0,7220	1,2179	1,6529	1,9332	2,2158	1,6326	1,3958	4,108

TABELLA V.

m	β_0	β_1	β_3	β_3	C_0	$-C_1$	C_2	$-C_3$	$-F_0'(1)$	$F_1'(1)$	$-F_2'(1)$	$F_3'(1)$	$-C_0F_0'(1)$	$-C_1F_1'(1)$	$-C_2F_2'(1)$	$-C_3F_3'(1)$	Nu_∞
2	2,679	—	—	—	1,2305	—	—	—	1,1103	—	—	—	1,3662	—	—	—	3,59
4	2,502	—	—	—	1,4540	—	—	—	1,1093	—	—	—	1,6129	—	—	—	4,173
6	2,449	—	—	—	1,5125	—	—	—	1,1614	—	—	—	1,7566	—	—	—	4,500
10	2,4187	5,670	—	—	1,5568	0,9651	—	—	1,2037	1,6085	—	—	1,8739	1,5524	—	—	4,875
20	2,4074	5,548	8,756	—	1,5845	1,0099	0,7462	—	1,2354	1,7771	2,0820	—	1,9575	1,7947	1,5536	—	5,269
100	2,405	5,5203	8,6552	11,795	1,6011	1,0614	0,8449	0,7197	1,2477	1,8728	2,3319	2,7030	1,9977	1,9378	1,9702	1,9453	5,671
∞	2,405	5,520	8,654	11,792	1,6021	1,0647	0,8512	0,7295	1,2497	1,8785	2,3496	2,7416	2,0000	2,0000	2,0000	2,0000	5,784

Le (40) (41) devono essere identiche; dalla condizione di identità si ricavano D , E e la (39) diventa

$$F \cong \frac{2\sqrt{2}}{3} \sqrt{y} \left\{ \operatorname{sen}\left(\frac{\beta\tau}{2} - \frac{\pi}{3}\right) J_{1/3}\left(\frac{2\sqrt{m}\,\beta y^{3/2}}{3}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\beta\tau}{2} - \frac{2\pi}{3}\right) J_{-1/3}\left(\frac{2\sqrt{m}\,\beta y^{3/2}}{3}\right) \right\}. \tag{42}$$

Dalla (42) imponendo la condizione al contorno $F_{y=0} = 0$ si ricava

$$\beta_n = \frac{4\pi}{3\tau} + \frac{2n\pi}{\tau} \tag{43}$$

e la (42) diventa

$$F_n = (-1)^n \sqrt{\frac{2y}{3}}\, J_{1/3}\left(\frac{2\sqrt{m}\,\beta y^{3/2}}{3}\right). \tag{44}$$

Si ricavano inoltre dalle (42), (43) le seguenti

$$C_n = -2/\beta_n \left(\frac{\partial F}{\partial \beta}\right)_{\beta=\beta_n;\, y=0} = (-1)^n\, 3{,}98\, \frac{m^{1/6}}{\tau}\, \beta_n^{-2/3} \tag{45}$$

$$F'_n(1) = (-1)^{n+1}\, 0{,}636\, m^{1/6}\, \beta_n^{1/3} \tag{46}$$

$$-C_n F'_n(1) = 2{,}534\, \frac{m^{1/3}}{\tau}\, \beta_n^{-1/3}. \tag{47}$$

Nella Tabella IV sono riportati i primi 3 valori di β_n , C_n , $F'_n(1)$, $-C_n F'_n(1)$ calcolati con le formule (43), (45), (46), (47).

Dal confronto con i dati riportati in Tabella II (vedi Parte I) si nota che l'accordo comincia ad essere soddisfacente, per $m \leq 10$, già per $n = 1 \div 2$. Tenendo conto che con il crescere di n l'altro procedimento di calcolo diventa sempre più laborioso, si sono adottati per $n \geq 3$ le formule (43), (45), (46), (47); questo anche per il calcolo di nuove condizioni al contorno, che sono oggetto di una nota successiva.

Soluzione approssimata per fluidi di elevata pseudoplasticità (m elevato).

Per i fluidi con indice m molto elevato (ad esempio $m > 10$); il profilo di velocità si avvicina a quello corrispondente a $m = \infty$ (velocità costante). In corrispondenza il profilo di temperatura tenderà al limite rappresentato dalla equazione (34) scostandosene nei pressi della parete.

Quando m è abbastanza grande perciò la soluzione della equazione (5) si può rappresentare nel modo seguente:

$$F(\beta, m, \varphi) \cong J_0(\beta\varphi) + \Delta(\beta, m, \varphi) \tag{48}$$

dove $\Delta(\beta, m, \varphi)$ è una quantità piccola rispetto a $J_0(\beta\varphi)$, almeno per β non molto grande. Per $\varphi \to 1$ sostituendo la (48) nella (5) si ricava, trascurando le quantità più piccole:

$$\Delta'' + \Delta'/\varphi \cong \beta^2 \varphi^m J_0(\beta\varphi). \tag{49}$$

Poiché $\varphi \to 1$ si può scrivere, sviluppando in serie

$$J_0(\beta\varphi) \cong J_0(\beta) + \beta J_1(\beta) - \beta\varphi J_1(\beta). \tag{50}$$

Sostituendo la (50) nella (49), integrando, e tenendo conto che lontano dalla parete $\Delta \simeq \dot{\Delta} \simeq 0$ si ricava:

$$\Delta \cong \beta^2 \frac{\varphi^{m+2}}{(m+2)^2} J_0(\beta) + \beta^3 J_1(\beta) \left[\frac{\varphi^{m+2}}{(m+2)^2} - \frac{\varphi^{m+3}}{(m+3)^2} \right]. \tag{51}$$

Sostituendo la (51) nella (48) e ricordando la condizione al contorno, si ricava la seguente equazione con cui si determina β:

$$J_0(\beta) \left[1 + \frac{\beta^2}{(m+2)^2} \right] + \frac{2m+5}{(m+2)^2 (m+3)^2} \beta^3 J(\beta)_1 \cong 0 . \tag{52}$$

Inoltre, essendo $C_n = -2/\beta_n \left(\frac{\partial F}{\partial \beta} \right)_{\beta = \beta_n \, ; \, \varphi = 1}$

si può calcolare C_n dalla:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \beta} \right)_{\varphi = 1} \cong - J_1(\beta) \left[1 + \frac{m^2 + 2m - 1}{(m+2)^2 (m+3)^2} \beta^2 \right] + \tag{53}$$

$$+ \beta J_0(\beta) \left[\frac{2}{(m+2)^2} + \frac{2m+5}{(m+2)^2 (m+3)^2} \beta^2 \right]$$

mentre

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \varphi} \right)_{\varphi = 1} \cong - \beta J_1(\beta) \left[1 - \frac{\beta^2}{(m+2)(m+3)} \right] + \frac{\beta^2}{m+2} J_0(\beta) . \tag{54}$$

Le formule (52), (53), (54) si prestano per il calcolo dei primi C_n , $F'_n(1)$ per valori di m sufficientemente elevati.

In particolare si determina con elevata precisione il valore di $\mathrm{Nu}_\infty = \frac{m}{m+2} \beta_0^2$ per tali fluidi.

Nella Tabella V si riportano i valori di β_n , C_n , $F'_n(1)$, Nu_∞ per diversi valori di m. Si confrontino con quelli calcolati in precedenza. Per valori medi di m (ad esempio $4 \leq m \leq 20$) si possono calcolare con le formule precedenti i primi autovalori mentre i successivi si possono ottenere con le (43), (45), (46).

Numero di Nusselt medio.

Per il calcolo del coefficiente di scambio medio è di particolare utilità l'introduzione di un numero di Nusselt medio. Tra i diversi possibili coefficienti di scambio medi che si possono considerare, si è qui preso in considerazione quello basato sulla differenza di temperatura media logaritmica.

Da un bilancio termico effttuato su una lunghezza x di condotto si ricava immediatamente la seguente relazione.

$$\overline{\mathrm{Nu}}_m = \frac{\bar{h}_{\ln} d}{k} = \frac{\mathrm{Gz}}{\pi} \ln 1/\theta_b . \tag{55}$$

TABELLA VI.

Valore della temperatura media locale.

$$\frac{\int_0^R u\theta r\,dr}{\int_0^R ur\,dr} = \theta_b = -2\,\frac{m+2}{m}\sum_n \frac{C_n F'_n(1)}{\beta_n^2}\,e^{-\beta_n^2\eta}$$

m \ Gz	0	5	10	20	50	100	200	500	10^3	$5\cdot10^3$	10^4	∞
2	0	0,0883	0,2694	0,4724	0,6816	0,7910	0,8635	0,9233	0,9504	0,9822	0,9886	1,0000
4	0	0,0592	0,2204	0,4269	0,6529	0,7665	0,8465	0,9130	0,9440	0,9798	0,9870	1,0000
6	0	0,0468	0,19 6	0,3930	0,6211	0,7435	0,8310	0,9057	0,9389	0,9778	0,9857	1,0000
10	0	0,0361	0,1668	0,3610	0,5875	0,7170	0,8030	0,8950	0,9322	0,9750	0,9839	1,0000
20	0	0,0274	0,1420	0,3266	0,5556	0,6930	0,7940	0,8821	0,9222	0,9705	0,9808	1,0000
∞	0	0,0183	0,1120	0,2804	0,5008	0,6328	0,7240	0,8225	0,8742	0,9434	0,9600	1,0000

TABELLA VII.

Valori del numero di Nusselt medio logaritmico.

$$\frac{q_x d}{k\Delta t_{\ln}} = \mathrm{Nu}_m = \frac{\mathrm{Gz}}{\pi}\ln 1/\theta_b$$

m \ Gz	0	5	10	20	50	100	200	500	10^3	$5\cdot10^3$	10^4
2	3,565	3,87	4,18	4,78	6,11	7,47	9,35	12,7	16,2	28,6	36,5
4	4,173	4,51	4,81	5,42	6,79	8,46	10,6	14,5	18,34	32,6	41,6
6	4,500	4,87	5,24	5,95	7,59	9,45	11,8	15,8	20,1	35,7	45,8
10	4,875	5,29	5,70	6,50	8,48	10,6	13,2	17,7	22,4	40,3	51,7
20	5,269	5,74	6,21	7,11	9,37	11,7	14,7	20,0	25,8	47,7	61,6
∞	5,784	6,36	6,97	8,09	11,02	15,3	20,55	31,1	42,8	92,7	129,9

Calcolata la θ_b mediante la (20) si determina $\overline{\mathrm{Nu}}_m$ mediante la (55). Nella Tabella VI sono riportati i valori di θ_b. Nella Tabella VII e nella figura 2 sono riportati i valori di Nu_m.

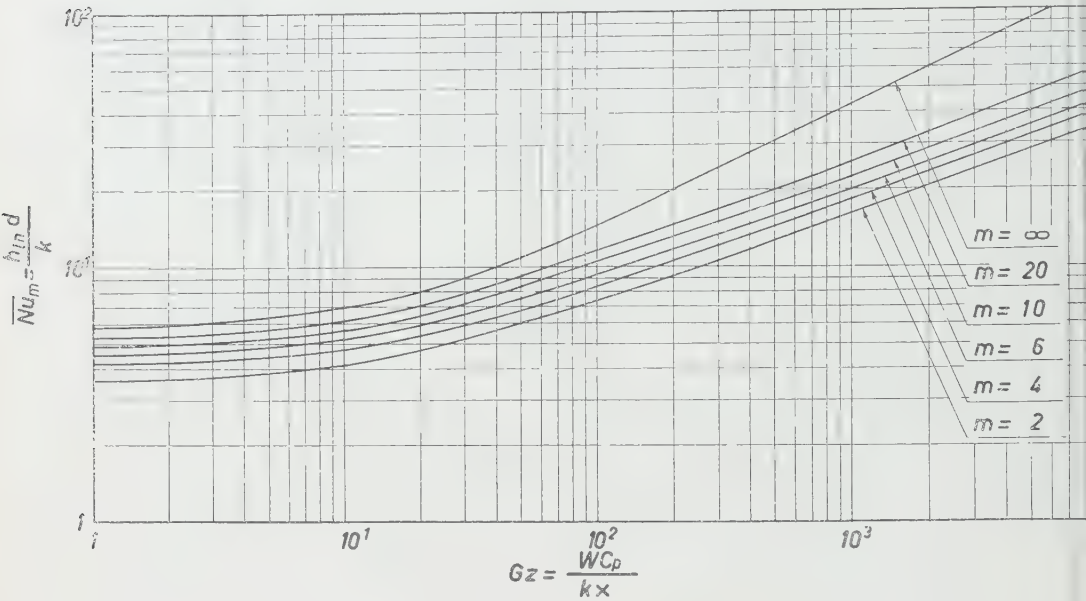


Fig. 2.

Interessa far notare che lo stesso $\overline{\mathrm{Nu}}_m$ della (52) è quello definito dalla seguente relazione:

$$\overline{\mathrm{Nu}}_m = \frac{1}{\eta_1} \int_0^{\eta_1} \mathrm{Nu}\,(\eta)\, d\eta \,. \tag{56}$$

Per la nomenclatura usata vedi la Parte I di questo lavoro.

Chimico fisica. — *Struttura di alcuni polivinilalchileteri isotattici cristallini* (*). Nota (**) di IVANO WALTER BASSI, presentata dal Socio G. NATTA.

Nel corso delle ricerche roentgenografiche eseguite su molti polimeri cristallini, sintetizzati per la prima volta nell'Istituto di Chimica Industriale del Politecnico di Milano, sono state descritte le strutture cristalline e le mutue relazioni strutturali di alcuni fra i più significativi di essi.

Descriveremo in questa Nota i risultati delle indagini eseguite allo scopo di determinare la struttura cristallina di alcuni polimeri dei vinilalchileteri preparati nel nostro Istituto [1].

Oltre al polivinilisobutiletere la cui struttura è stata già da noi descritta [2], anche il polivinilmetiletere, il polivinilisopropiletere ed il polivinilneopentiletere sono isotattici e sussistono, come vedremo nel corso di questo lavoro, grandi analogie conformazionali fra le catene polimeriche dei polivinilalchileteri e quelle dei corrispondenti polimeri vinilici idrocarburici.

STRUTTURA DEL POLIVINILMETILETERE.

Da una frazione insolubile in eptano di polivinilmetiletere si sono ottenute, per estrusione del fuso e successivo stiro a caldo, fibre ben orientate del polimero. Lo spettro ai raggi X da esse fornito è ricco di riflessioni ed è stato possibile dar loro indici sulla base di una cella elementare romboedrica le cui costanti, riferite ad una terna assiale esagonale, sono: $a = 16{,}20 \pm 0{,}10$ Å, $c = 6{,}50 \pm 0{,}05$ Å. La densità calcolata si accorda con il dato sperimentale se si ammette che nella cella siano contenute 18 unità monomeriche. A risultati analoghi eravamo pervenuti per il poli–α–butene (modificazione I) [3] e per il polibutadiene 1–2 isotattico [4] le cui unità monomeriche sono da attendersi conformazionalmente molto simili a quella del polivinilmetiletere. Anche le celle elementari del poli–α–butene e del polibutadiene 1–2 isotattico contengono 18 unità monomeriche e sono romboedriche con costanti $a = 17{,}70 \pm 0{,}10$ Å, $c = 6{,}50 \pm 0{,}05$ Å e $a = 17{,}30 \pm 0{,}10$ Å, $c = 6{,}50 \pm 0{,}05$ Å rispettivamente. L'analogia fra le celle elementari e fra le unità monomeriche dei tre polimeri appare condizione sufficiente per concludere per una stretta analogia conformazionale delle loro catene polime-

(*) Lavoro eseguito all'Istituto di Chimica Industriale del Politecnico di Milano con il contributo della Società Montecatini.

(**) Pervenuta all'Accademia il 4 ottobre 1960.

riche e possiamo affermare che anche la catena del polivinilmetiletere cristallino assume la conformazione di un'elica ternaria e che il polimero è pertanto isotattico. D'altra parte spettri ottenuti portando sull'equatore del film le riflessioni con $\xi \cong 0$ e le considerazioni che seguono sul gruppo spaziale cui il polivinilmetiletere appartiene confermano appieno questa affermazione.

TABELLA I.

Confronto fra le distanze reticolari calcolate ed osservate per il polivinilmetiletere.

h k l	*d* oss. Å	*d* calc. Å	*h k l*	*d* oss. Å	*d* calc. Å
1 1 0	8,12	8,13	7 0 1		1,92
3 0 0	4,70	4,69	5 3 $\bar{1}$	1,83	1,92
2 2 0	4,07	4,07	6 2 1		1,87
4 1 0	3,06	3,07	5 4 1	—	1,74
3 3 0	—	2,71	1 0 $\bar{2}$	3,17	3,17
6 0 0	2,34	2,35	2 0 2	—	2,96
5 2 0	2,24	2,26	2 1 $\bar{2}$	2,77	2,77
4 4 0	—	2,03	3 1 2	2,49	2,50
7 1 0	1,87	1,87	4 0 $\bar{2}$	—	2,39
6 3 0	1,77	1,78	3 2 $\bar{2}$	—	2,29
5 5 0	—	1,63	5 0 2	2,13	2,13
1 0 1	—	5,90	4 2 2	diff.	2,06
2 0 $\bar{1}$	4,76	4,77	5 1 $\bar{2}$	2,00	2,00
2 1 1	4,12	4,12	4 3 $\bar{2}$	—	1,89
3 1 $\bar{1}$	3,36	3,35	6 1 2	—	1,79
4 0 1	3,10	3,09	7 0 $\bar{2}$	1,71	1,71
3 2 1	2,88	2,90	5 3 2		
5 0 $\bar{1}$	—	2,58	1 1 3	2,10	2,09
4 2 $\bar{1}$	—	2,47	3 0 3	—	1,98
5 1 1	2,34	2,36	2 2 3	1,91	1,91
4 3 1	—	2,18	4 1 3	1,76	1,77
6 1 $\bar{1}$	—	2,04	1 0 4	1,62	1,62

Come risulta dalla Tabella I, non vi sono nello spettro del polivinilmetiletere altre assenze sistematiche oltre a quelle riguardanti le riflessioni $(h\,k\,l)$ che sono estinte quando $-h + k + l \neq 3\,n$, ed i gruppi spaziali romboedrici che, oltre a soddisfare a questa condizione, permettono la presenza nella cella di 18 unità equivalenti sono i gruppi R $\bar{3}$, R 3 *m* e R 32 [5].

Le 18 unità monomeriche del poli–α–butene e del polibutadiene 1–2 isotattico invece, si sistemano confortevolmente nel gruppo spaziale, R 3 *c*, oppure nel suo centrossimmetrico R $\bar{3}$ *c*, qualora si preveda la vicarianza statistica attorno ad ogni asse ternario elicogiro di macromolecole isomorfe anticline [3].

La scelta del gruppo spaziale peculiare del polivinilmetiletere può essere fatta e in base a considerazioni sull'impacchettamento delle macromolecole nella cella elementare, e ricorrendo alla analogia che è logico attendersi fra la disposizione spaziale delle molecole del polivinil metiletere da una parte e quelle del poli–α–butene e del polibutadiene 1–2 isotattico dall'altra.

Le riflessioni $(h\,o\,l)$ con $l \neq 2\,n$ che compaiono nello spettro del polivinilmetiletere e che sono invece sistematicamente estinte nel gruppo spaziale R 3 *c* (R $\bar{3}$ *c*), sono molto deboli e le altre riflessioni comuni ai due gruppi spaziali hanno intensità confrontabile per tutti e tre i polimeri.

I gruppi spaziali R 32 e R 3*m* appaiono da scartare, in quanto, mentre il gruppo spaziale R 32 consentirebbe la presenza nella cella elementare di tre sole catene in posizione equivalente ed isomorfe, il gruppo spaziale R 3 *m* impone che i gruppi metossilici di macromolecole enantiomorfe isocline collegate dai piani di simmetria, abbiano la stessa quota e ciò si potrebbe realizzare solo a prezzo di accostamenti proibitivi fra i gruppi metossilici stessi. Il gruppo spaziale R $\bar{3}$ appare il più adatto a consentire un soddisfacente impacchettamento fra le molecole e d'altra parte è quello che, dei tre, più si avvicina al gruppo spaziale R 3 *c*. In entrambi i reticoli sono presenti 6 tronconi di eliche ternarie enantiomorfe ma, essendo l'operatore di simmetria una volta (R $\bar{3}$) il centro di simmetria e l'altra (R 3 *c*) un piano di simmetria con traslazione lungo *c*, mentre ogni macromolecola di polivinilmetiletere è circondata da tre macromolecole enantiomorfe anticline, ogni molecola di poli–α–butene o di polibutadiene 1–2 isotattico è circondata da tre molecole enantiomorfe isocline.

La differenziazione fra le condizioni di impacchettamento dei tre polimeri diviene ancor meno marcata quando si supponga che, per il gruppo spaziale R $\bar{3}$ *c*, sulle macromolecole di poli–α–butene e di polibutadiene 1–2 isotattico possano agire indifferentemente e in maniera del tutto statistica o il piano di simmetria con traslazione lungo *c* o il centro di simmetria [3].

STRUTTURA DEL POLIVINILISOPROPILETERE.

Il monomero idrocarburico contenente nella catena lo stesso numero di atomi del vinilisopropiletere è il 4–metilpentene 1 il cui polimero isotattico è stato preparato per la prima volta in questo Istituto. Le ricerche roent-

genografiche eseguite su quest'ultimo polimero hanno permesso di definirne la conformazione dell'elica, che presenta una simmetria 7_2 ed un periodo di ripetizione di 13,80 Å [6].

Lo spettro di fibra del polivinilisopropiletere è molto differente da quello fornito dal poli–4–metilpentene 1 e lascia prevedere una conformazione dell'elica più complicata di quella del poli 4–metilpentene 1. In Tabella II sono riportate le coordinate ξ e ζ e le intensità relative delle riflessioni presenti nello spettro di fibra del polivinilisopropiletere.

TABELLA II.

Riflessioni presenti nello spettro di fibra del polivinil isopropiletere

$\left(\zeta = \frac{\lambda l}{c}\,\text{Å}^{-1}\ ;\ \xi = \frac{\lambda}{d}\,\text{Å}^{-1}\ ;\ \text{Cu}\,,\,\text{K}\alpha\right)$

ξ \ ζ	0	0,087	0,217	0,304	0,521
	ff 0,18	*m* 0,32	*mf* 0,20	*md* 0,13	*mf* 0,18
	md 0,25	*d* 0,37	*dd* 0,37	*m* 0,19	
	md 0,40			*dd* 0,28	

Dato l'esiguo numero di riflessioni presenti, non è possibile l'analisi strutturale secondo gli schemi normali ed è necessario ricorrere, come è già stato fatto in casi analoghi [7], allo studio della trasformata di Fourier della macromolecola. La conformazione di un'elica può essere ricavata dagli spettri di fibra di un polimero in quanto l'andamento dell'intensità diffratta in corrispondenza ai vari strati può essere messa in relazione diretta con la trasformata di Fourier di una catena isolata.

La trasformata di Fourier di una catena formata da j eliche discontinue di raggio r_j ed origine in $\varphi_j\,,\,z_j$, nel punto $(\mathrm{R}\,,\,\psi\,,\,\zeta)$ del reticolo reciproco, è data secondo W. Cochran, F. C. H. Crick, V. Vand [8] dalla relazione:

$$(1)\qquad \mathrm{F}_c(\mathrm{R}\,,\,\psi\,,\,\zeta) = \sum_n \sum_j f_j\,\mathrm{J}_n(2\,\pi\,\mathrm{R}r_j)\exp\left[i\left\{n\left(\psi - \varphi_j + \frac{1}{2}\,\pi\right) + 2\,\pi\zeta z_j\right\}\right]$$

in cui f_j è il fattore atomico dell'atomo appartenente all'elica j ed n l'indice della funzione di Bessel J. Gli indici n delle funzioni di Bessel debbono inoltre soddisfare la relazione:

$$(2)\qquad l/c = \frac{n}{\mathrm{P}} + \frac{m}{p}$$

in cui c è l'asse della fibra, l l'indice dello strato, p il periodo di ripetizione per unità monomerica, m un intero qualunque, P il passo dell'elica. Ricordando che $\mathrm{J}_n(0)$ è non nulla solo per $n = 0$, è possibile determinare univoca-

mente il periodo di ripetizione per unità monomerica p, considerando che per $n = 0$, la (2) è soddisfatta (ponendo $m = 1$) solo quando l'indice dello strato l è uguale ad un multiplo intero del numero di unità monomeriche contenute nel tratto di catena corrispondente a c.

Sarà sufficiente pertanto, per misurare p, portare opportunamente in condizione di essere raccolti sul film i raggi diffratti corrispondenti ai piani reticolari (0 0 l) (l'indice l si riferisce all'asse della fibra). Nel caso del polivinilisopropiletere il valore di p che si misura sul film è di 2,085 Å mentre per il poli-4-metil pentene 1 si era trovato $p = 1{,}97$ Å.

La correlazione fra i dati fin qui ricavati, p e c/l, permette di determinare che il numero di monomeri necessari per la ripetizione lungo l'elica del polivinilisopropiletere è 17 e che il periodo di identità c corrisponde a 35,5 Å. Ai vari strati osservati competono pertanto gli indici 0, 2, 5, 7, 12 e 17.

TABELLA III.

Indici n delle funzioni di Bessel per un'elica 17/5.

l	n	l	n
0	0	9	5
1	7	10	2
2	3	11	8
3	4	12	1
4	6	13	6
5	1	14	4
6	8	15	3
7	2	16	7
8	5	17	0

L'altro parametro indispensabile per la definizione completa dell'elica è P e la sua determinazione può essere fatta tenendo presente che il numero di monomeri contenuti nel periodo di identità ed il numero di passi dell'elica N debbono essere primi tra loro e che l'intensità distribuita sui vari strati è tanto più grande (nelle regioni del reticolo reciproco con $\xi \cong 0$) quanto più piccolo è l'indice n della funzione di Bessel permesso nella (1) dalla (2). Nel caso del polivinilisopropiletere il migliore accordo con i dati sperimentali si ha per P = 7,10 Å (N = c/P = 5). I valori di n che soddisfano la (2) per ciascun strato l, in base a $c = 35{,}50$ Å, $p = 2{,}085$ Å e P = 7,10 Å, sono riportati in Tabella III. Ricordando l'andamento delle funzioni di Bessel e

tenendo presente l'effetto sulla distribuzione dell'intensità diffratta dei normali fattori angolari (Lorentz e polarizzazione) e del fattore termico, che per i polimeri assume in genere un valore molto elevato, è logico attendersi che gli strati l cui compete per la (2) un indice n superiore a 4 non compaiano, come è stato visto in altri casi [7], sullo spettro. Il confronto fra i dati calcolati di Tabella III con quelli sperimentali di Tabella II mostra un accordo completo per tutti gli strati ad eccezione dello strato 10 che, pur dipendendo da una funzione di Bessel di ordine 2, non compare sullo spettro. La ragione di questa assenza è da ricercarsi nelle particolari coordinate degli atomi che rendono nulla la (1) nonostante la funzione di Bessel J_2 abbia un valore elevato. Infatti un indice basso della funzione di Bessel è condizione necessaria ma non sufficiente per dare alla (1) un valore elevato.

Dal completo disaccordo di tutti gli altri modelli 17/N (N ≠ 5) provati, si può concludere che la catena del polivinilisopropiletere è un'elica che contiene 17 monomeri in 5 passi della spirale e che il polimero è isotattico. Si constata in pratica che, nonostante l'aspetto estremamente differente dello spettro ed il diverso periodo di identità, vi è una notevole somiglianza fra le eliche del polivinilisopropiletere e del poli–4–metilpentene 1. Gli angoli di rotazione interna delle due eliche isodistorte, facilmente ricavabili mediante considerazioni geometriche [9], hanno valori volto simili ed inoltre il numero di unità monomeriche contenute in un passo dell'elica risulta 3,40 per il polivinilisopropiletere ($\sigma_1 = 70°$, $\sigma_2 = 190°$) e 3,50 per il poli–4–metilpentene 1 ($\sigma_1 = 73°$, $\sigma_2 = 193°$).

L'analogia di conformazione della catena dei due polimeri si ripercuote anche sulla loro cella elementare. Al poli–4–metilpentene 1 è stata attribuita una cella elementare tetragonale [10] la cui costante a misura 18,66 Å, anche le riflessioni equatoriali del polivinilisopropiletere sono interpretabili in base ad una cella elementare analoga la cui costante a risulta ridotta a 17,2 Å.

Struttura del polivinilisobutiletere e del polineopentilviniletere.

Le strutture del polivinilisobutiletere e del corrispondente polimero idrocarburico il poli–5–metilesene 1, sono state già descritte (2). La loro catena assume la conformazione di un'elica ternaria con un periodo di identità di 6,50 Å. Mentre la cella elementare del poli–5–metilesene 1, almeno per le riflessioni equatoriali, è esagonale con una costante $a = 10{,}2$ Å (per la cella ortoesagonale si ha $a = \sqrt{3}\ b = 17{,}67$ Å); quella del polivinilisobutiletere è ortorombica e le sue costanti risultano $a = \sqrt{3}\ b = 16{,}8$ Å.

Anche il polimero cristallino del vinilneopentiletere da noi esaminato è isotattico. Il periodo di identità lungo l'asse della fibra è di 6,50 Å e la cella elementare ortorombica che interpreta tutte le riflessioni dello spettro (1) è analoga a quella dei due polimeri succitati a meno del prevedibile allungamento degli assi a e b ($a = \sqrt{3}\ b = 18{,}24$ Å).

DISCUSSIONE DEI RISULTATI.

Dallo studio sistematico di una serie di polivinilalchileteri cristallini isotattici possiamo concludere che la conformazione della catena più stabile per un polivinilalchiletere isotattico è quella di un'elica ternaria e, almeno fino a che l'alchile è lineare, oppure se ramificato, fino a che la ramificazione metilica è situata in 2, tale conformazione viene in pratica conservata. Quando la ramificazione si effettua in 1, l'ingombro sterico del metile della ramificazione stessa, induce sulla catena polimerica delle modifiche conformazionali tali che l'elica al posto di contenere 3 monomeri in un passo ne contiene 3,40. Il fenomeno trova riscontro nelle poli–α–olefine isotattiche. Così, mentre la conformazione energeticamente favorita dalle poli–α–olefine lineari, almeno fino a che si considerano i termini con meno di sei atomi di carbonio, è quella di un'elica ternaria, quando la poli–α–olefina è ramificata, l'ingombro sterico del gruppo laterale induce sull'elica ternaria delle modificazioni energetiche e conformazionali che sono tanto più marcate quanto più la ramificazione è prossima agli atomi della catena. Si è infatti trovato che l'elica del poli–3–metilbutene 1 è quaternaria [6], che la conformazione della catena del poli–4–metilpentene 1 e del poli-4–metilesene 1 è quella di un'elica contenente 7 unità monomeriche in 2 passi della spirale e che quando la ramificazione avviene in 5 l'elica diviene ancora ternaria (poli–5–metilesene 1 [2]).

La sostituzione del primo atomo di carbonio del gruppo laterale di una poli–α–olefina isotattica cristallina con un atomo di ossigeno, almeno nei vari casi esaminati, non ha effetti conformazionali rilevanti e la conformazione della catena polimerica dei polivinilalchileteri rimane molto simile a quella delle corrispondenti poli–α–olefine.

L'analogia di conformazione della catena polimerica si ripercuote sull'impacchettamento delle macromolecole e le celle elementari dei polivinilalchileteri e quella delle corrispondenti poli–α–olefine isotattiche sono quasi uguali tra loro a meno di una leggera contrazione degli assi *a* e *b* per la prima classe di polimeri.

Desidero ringraziare il prof. G. Natta ed il prof. P. Corradini che mi hanno costantemente seguito e consigliato in questo lavoro.

BIBLIOGRAFIA.

[1] G. NATTA, G. DALL'ASTA, G. MAZZANTI, U. GIANNINI, S. CESCA, « Angew. Chemie », *71*, 205 (1959); G. DALL'ASTA e N. ODDO, lavoro in corso di pubblicazione su « La Chimica e l'Industria ».

[2] G. NATTA, I. W. BASSI, e P. CORRADINI, « Makromol. Chemie », *18/19*, 455 (1955).

[3] G. NATTA, P. CORRADINI, I. W. BASSI, « Makromol. Chemie », *21*, 240 (1956); G. NATTA, P. CORRADINI, I. W. BASSI, « Nuovo Cimento », Suppl. *15*, 52 (1960).

[4] G. NATTA, P. CORRADINI, I. W. BASSI, « Rend. Acc. Naz. Lincei », *23* (8), 363 (1957).
[5] « Int. Tables for X–Ray Crystallography », *1*, 253, 260, 266, The Kynoch Press, Birmingham (1952).
[6] G. NATTA, P. CORRADINI, I. W. BASSI, « Rend. Acc. Naz. Lincei », *19* (8), 404 (1955).
[7] A. M. LIQUORI, « Acta Cryst. », *8*, 345 (1955), vedi anche [2]; G. NATTA, P. CORRADINI, I. W. BASSI, « Gazz. Chim. Ital. », *89*, 784 (1959); P. CORRADINI, P. GANIS, « J. Polymer Sci. », *43*, 311 (1960).
[8] W. COCHRAN, F. H. C. CRICK e V. VAND, « Acta Cryst. », *5*, 581 (1952).
[9] P. CORRADINI, I. PASQUON, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (8), *19*, 453 (1955).
[10] F. C. FRANK, A. KELLER e A. O'CONNOR, « Philosophical Mag. », *4*, 200 (1959).

Petrografia. — *Notizie geologiche e petrografiche sui terreni eruttivi e metamorfici rilevati nel foglio Dorgali (Sardegna Orientale)*(*) . Nota (**) di Claudio D'Amico, Paolo Gazzi, Renato Pellizzer e Gianfranco Simboli, presentata dal Socio M. Gortani.

La presente Nota si propone di illustrare sinteticamente i più importanti problemi relativi alla geologia e petrografia delle aree eruttive e metamorfiche da noi rilevate nel foglio Dorgali, in seguito all'incarico affidatoci per conto della Regione Autonoma della Sardegna, Assessorato all'Industria, Commercio e Rinascita, dal nostro compianto Maestro, prof. Ciro Andreatta, cui va il nostro pensiero devoto e la nostra gratitudine.

Il rilevamento, su base topografica al 25.000, iniziato nel giugno 1958 si è continuato successivamente a varie riprese, anche per poter provvedere ad un esame dei materiali via via raccolti, sempre in collegamento con i rilevatori dei terreni sedimentari che hanno svolto la loro opera sotto la guida del prof. Raimondo Selli.

Nel foglio Dorgali affiora ampiamente il substrato cristallino antico, qui costituito da scisti cristallini, rocce granitiche e porfidi, con ricco sistema filoniano; notevole sviluppo hanno pure le coperture basaltiche.

1. – Complesso scistoso–cristallino.

Gli affioramenti più ampi di terreni scistoso–cristallini entro il foglio Dorgali compaiono nelle parti sud–occidentali e sud–orientali di questo. Affioramenti più limitati si hanno nella zona di cantoniera Bidicolai, di Genna Silana, di M. Nieddu, di R. Gottidai; piccoli lembi infine sono sparsi entro le masse granitiche e porfiriche.

Petrograficamente si passa da filladi sericitico–quarzifere, con scarsa cristallinità e scistosità pressocché piana, a scisti cristallini feldispatici, con scistosità spesso ondulata, fino a giungere a tipi di gneis dall'aspetto di ortogneis granitici o addirittura di gneis venati; frequenti sono i passaggi a quarziti sia entro le rocce filladiche, sia entro gli scisti feldispatici. Le sfumature sono molte e i confini sia cartografici che di classificazione non sempre sono rigorosamente precisabili.

Le rocce chiaramente filladiche sono discretamente estese a NW di Urzulei e nella R. Gottidai, altrove compaiono solo in lembi assai limitati, mentre predominano di gran lunga gli scisti feldispatici; questi nella zona di

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia e Petrografia dell'Università di Bologna.
(**) Pervenuta all'Accademia l'8 settembre 1960.

Bidicolai e Genna Silana, passano in parte a tipi gneissici a cristallinità elevata. In qualche punto, al contatto con i graniti, sono da notare cornubianiti (Urzulei e Talana) con evidenti neoformazioni di biotite, andalusite, tormalina, feldispati. A R. Gottidai compaiono infine limitate lenti di calcescisti carboniosi entro le filladi.

Fra i motivi osservati nel complesso metamorfico del foglio Dorgali, particolarmente interessanti ci paiono i seguenti: *a*) la presenza diffusa di feldispati entro scisti cristallini minuti che tuttavia non escono da una « facies » filladica e presentano frequenti passaggi a filladi vere e proprie; *b*) il comparire localmente di rocce gneissiche a cristallinità nettamente più alta; *c*) la fitta impregnazione con microgranitì (in vene, lenti, ghiandole) e talora lo sfumare graduale delle rocce gneissiche verso i microgranitì stessi.

Le prime osservazioni (che peraltro dovranno essere confermate da ricerche più complete) sembrano indicare una feldispatizzazione generale, variabile da punto a punto, di originari scisti filladici; tale feldispatizzazione, sviluppatasi senza mutare fondamentalmente l'originario carattere filladico delle rocce, ci sembra inquadrabile tra i processi di granitizzazione in ambiente epizonale. Non ci è possibile al momento precisare le relazioni tra feldispatizzazione e fasi tettoniche, e se alla blastesi feldispatica corrisponda o meno un apporto chimico.

Lo sviluppo locale di vere rocce gneissiche corrisponde presumibilmente a condizioni di massima mobilizzazione di materia e di più alta temperatura nella formazione epizonale in senso lato. I frequenti e rapidi passaggi a rocce di facies filladica ci fanno escludere infatti che si tratti di masse mesozonali sottostanti alla formazione più diffusa.

Di grande interesse ci paiono alcune sfumature verso microgranitì attraverso i seguenti passaggi (zona di Bidicolai–S. Anna): *a*) aumento dei componenti feldispatici, col che la roccia prende l'aspetto di ortogneis; *b*) parziale perdita della scistosità e conseguente carattere nebulitico; *c*) comparsa di microgranitì inomogenei per composizione e struttura. Tutto ciò sembra indicare che parte dei microgranitì sono derivati per un processo di granitizzazione degli scisti.

La giacitura delle formazioni metamorfiche è quasi sempre di copertura alle sottostanti masse granitiche. Nella zona studiata non si sono trovati dati validi a precisare la vera età degli originari sedimenti e dei processi metamorfici che li hanno interessati.

2. – Masse granitiche.

Molto diffuse in tutto il basamento cristallino sono le rocce granitiche corrispondenti ai tre tipi già distinti altrove [1], e precisamente:

(1) C. Andreatta e altri, *Notizie preliminari sul rilevamento al 25.000 dei quadranti orientali dei fogli 181 (Tempio Pausania) e 194 (Ozieri) nella Sardegna nord-orientale.*

graniti normali, a grana media ed uniforme, con i singoli cristalli di dimensioni un po' inferiori al centimetro; i loro componenti sono: quarzo, feldispato potassico, plagioclasi oligoclasico-andesinici, biotite, talora muscovite e vari accessori;

graniti pegmatitici, di composizione analoga ai precedenti, distinti da questi per una grana maggiore e per la presenza di vistosi cristalli (qualche cm di lunghezza massima) di feldispato potassico con carattere di porfiroblasti. Talora contengono secrezioni pegmatitiche e aplitiche in lenticelle o chiazze;

microgranitì, per lo più aplitici, affiorano in masse meno estese rispetto agli altri graniti, oppure costituiscono chiazze o grovigli di filoni in mescolanza coi tipi di graniti precedenti. Si distinguono per una grana fine, per un colore rosato o giallastro e per la notevole scarsezza di minerali scuri; la loro struttura varia da granulare ad accentuatamente porfirica.

Mescolanze tra i tre tipi di granito sono molto comuni e possono aversi in qualsiasi proporzione.

Limitate *differenziazioni quarzodioritiche* a chiazze compaiono all'estremo nord-occidentale del foglio.

I problemi petrogenetici dei graniti rilevati nel foglio Dorgali sono comuni a quelli di tutto il plutone sardo e richiedono, per la loro risoluzione, una abbondante messe di dati petrografici e petrochimici che completino le osservazioni di campagna e le ricerche sino ad ora condotte.

I graniti normali e quelli pegmatitici sono strettamente associati e mostrano numerose mescolanze reciproche sfumando l'uno nell'altro. Ci sembra probabile, qui come altrove, che la loro diversità dipenda sostanzialmente da una blastesi di feldispato potassico sviluppatasi nella fase tardiva della petrogenesi granitica. Per entrambi i graniti è sempre piuttosto evidente il carattere intrusivo entro gli scisti cristallini, al cui contatto solo raramente vi è presenza di rocce cornubianitiche.

3. – Porfidi.

I porfidi affiorano in masse ed in filoni, nella zona compresa fra Ursulei, Talana, Bruncu e Surguru, Baunei, Punta Selole. Il maggiore di tali affioramenti è situato a NW di Baunei, attraversato dalla strada statale «Orientale Sarda» fra Genna Ramminu e Genna Scalas, ove sono particolarmente evidenti i tipici sistemi di fratture per raffreddamento. Notevole è anche l'affioramento di Bruncu e Surguru a SE di Talana.

Il loro colore è vario: rosa grigio, verde, nerastro, spesso in rapida successione; la struttura è porfirica con scarsi fenocristalli di quarzo e feldispati, talora fortemente riassorbiti, la pasta di fondo varia da microcristallina a felsitica. Talvolta la roccia per la struttura microfelsitica e per la estrema scarsezza di fenocristalli ha aspetto selcioso e colore per lo più nerastro.

Le analisi chimiche in corso mostrano un elevato contenuto in alcali e un leggero eccesso di allumina.

Le masse di porfidi sono sempre sottostanti agli scisti, come è possibile osservare nella zona di Genna Ramminu e Genna Scalas; entro le stesse masse rimangono di frequente piccoli lembi degli scisti di copertura che dànno luogo talora ad una vera « breccia magmatica », con frammenti micro- e macroscopici di scisti cementati dal profido.

In genere si ha dall'alto verso il basso un graduale passaggio attraverso i tipi seguenti:

1° brecce di scisti cementate da porfido;

2° porfido nerastro fortemente inomogeneo che allo studio microscopico risulta contenere numerosi frammenti di scisti;

3° porfido abbastanza omogeneo corrispondente al tipo fondamentale prima descritto.

Meno chiare sono le relazioni dei porfidi con i graniti; in alcuni casi sembra evidente che i porfidi siano espansi sopra i graniti a costituire forme « laccolitiche » comprese fra graniti e scisti; altrove le superfici di contatto fra graniti e porfidi appaiono verticali e le masse di porfido presentano potenze notevoli. Anche in questi casi rimane costante il motivo della copertura scistosa con brecce al tetto, come ad esempio a Bruncu e Surguru.

Nei pressi di Genna Cugina si osservano entro il porfido due masserelle lamprofiriche ed un breve filone pure lamprofirico; tranne che in questo caso le masse di porfido non ci risultano interessate da filoni di nessun tipo.

Dalle masse di porfido si dipartono filoni di porfido rosa che attraversano sia gli scisti cristallini, sia i graniti dei tre tipi descritti; per quanto si è potuto osservare questi non intersecano filoni di alcun tipo e neppure ne vengono intersecati, salvo il caso di un filone di porfido, presso Badu Nuraghi, tagliato da due lamprofiri.

Va segnalato inoltre che alcune scarse mineralizzazioni a solfuri di Cu—Pb—Zn sono legate a tali porfidi, come ad esempio a Genna Ramminu, Genna Scalas e Genna Olidoni.

4. – Sistema filoniano.

Il sistema filoniano è molto sviluppato ma con diffusione alquanto irregolare; infatti a zone fittamente lardellate di intercalazioni filoniane si susseguono zone in cui i filoni sono scarsi o quasi totalmente assenti; ciò vale in particolare per gli affioramenti di microgranito.

I tipi petrografici riconosciuti sono molti e sono stati riuniti, ad una prima valutazione, nei seguenti gruppi:

quarzo e *quarziti* un po' feldispatiche; costituiscono alcuni filoni, peraltro potenti, e varie piccole vene sparse con notevole irregolarità;

apliti e *microgranitì*; sono molto frequenti, particolarmente i secondi, sia in vene minute che in filoni notevoli per spessore e sviluppo. Petrograficamente le apliti si distinguono dai microgranitì, già descritti nella sezione precedente, per la mancanza quasi completa di biotite; passaggi e sfumature rendono però anche qui arduo stabilire una esatta distinzione;

porfidi granitici; più scuri e meno acidi dei precedenti, di aspetto e composizione un po' variabile, sono pure alquanto diffusi in modo irregolare. Quarzo e feldispato potassico in quantità varie, plagioclasi più abbondanti e minerali femici, non scarsi, sono i costituenti normali. La struttura è porfirica con fenocristalli di quarzo, feldispati e biotite;

lamprofiri; relativamente scarsi ed in filoni per lo più non molto sviluppati. Sono rocce di colore verde scuro o grigio scuro, la cui classificazione dettagliata attende di essere eseguita;

porfidi; nella parte meridionale del foglio assumono notevole importanza, per numero, potenza e lunghezza, i filoni di porfido rosa. Tali filoni costituiscono un complesso sistema con prevalente orientamento NNW–SSE che interessa sia i graniti che le rocce metamorfiche; frequentemente si riallacciano alle masse di porfidi come accennato nel paragrafo precedente, e talora si riuniscono e si diramano variamente.

Hanno struttura porfirica con fenocristalli di plagioclasi, ortoclasio, quarzo, rarissima biotite, e con pasta di fondo finemente microcristallina. Si distinguono chiaramente dai porfidi granitici prima citati per la scarsità di fenocristalli, per la grana minutissima della pasta di fondo, e per il caratteristico colore rosa. Talora verso le salbande il porfido presenta colore scuro e pasta di fondo microfelsitica.

La successione cronologica dei vari gruppi di filoni non è sempre chiara e univoca: ciò, sia a causa del limitato numero di intersezioni fra filoni, sia a causa della difficoltà di riconoscere sul terreno le modalità di intersezione fra filoni di vario tipo, là dove lo sfatticcio e le coperture vegetali impediscono la visione diretta, sia infine a causa dell'aspetto macroscopico spesso molto simile delle apliti e microgranitì filoniani che non ha consentito, in fase di rilevamento, la distinzione cartografica. Il complesso dei filoni aplitici sembra il più antico, mentre i filoni di microgranitì sono posteriori a quelli lamprofirici.

Precedenti ai filoni lamprofirici risultano essere quelli aplitici, quelli di porfido granitico ed ancora quelli di porfido rosa.

In questo gruppo precedente ai lamprofiri i filoni di porfido granitico risultano posteriori a quelli aplitici; sulle relazioni dei porfidi con apliti e porfidi granitici non si sono potuti rilevare dati.

Ai filoni lamprofirici seguono prima quelli di microgranito, ultimi quelli di quarzo. Per quanto riguarda l'andamento dei filoni, questo non è costante ma segue piuttosto regole locali non sempre valide su scala regionale. Solo i filoni di porfido rosa presentano, come si è già detto, un andamento prevalente NNW–SSE.

5. – Le colate basaltiche.

I basalti che affiorano su vasta area nel settore di Dorgali sono stati oggetto di ricerche geologiche e petrografiche da parte di diversi studiosi. In particolare uno studio completo geologico-petrografico è stato condotto da Lauro [2], che riferisce ampiamente sui risultati delle sue ricerche e discute i problemi mettendo in evidenza anche il pensiero di precedenti ricercatori.

Le effusioni laviche di Dorgali e di Orosei sono di età molto giovane e si sono manifestate in un periodo che va « dal finire della fase marina del Pliocene al Quaternario inoltrato ». Tali effusioni hanno dato origine nell'insieme a basalti olivinici a pirosseno, con leggere variazioni di composizione chimica e mineralogica « inevitabili in un complesso vulcanico di tale entità e per di più complicato dall'esistenza di diversi centri effusivi e da successive riprese dell'attività parossistica con fuoriuscita di una massa fusa leggermente più acida prima e, poi, dopo più sensibili intervalli di tempo, differenziata in senso marcatamente più basico ».

Le colate basaltiche, sempre secondo le ricerche del prof. Lauro, sono numerose e « distinguibili l'una dall'altra anche se talora convergono in una stessa zona e concorrono a formare un unico espandimento ». Vengono distinte in base al rilevamento di probabili centri effusivi (ad esempio quelli di M.te Argiadores, Cuccuru Pirische, Cuccuru Zuppedie ecc.) allineati parallelamente a possibili fratture; centri che hanno concorso alla formazione di questa vasta isola lavica che circonda Dorgali e che poggia quasi interamente sulle rocce granitiche. Placche minori poggiano su terreni mesozoici in diverse località come a S. Pietro, Cala Luna ecc.

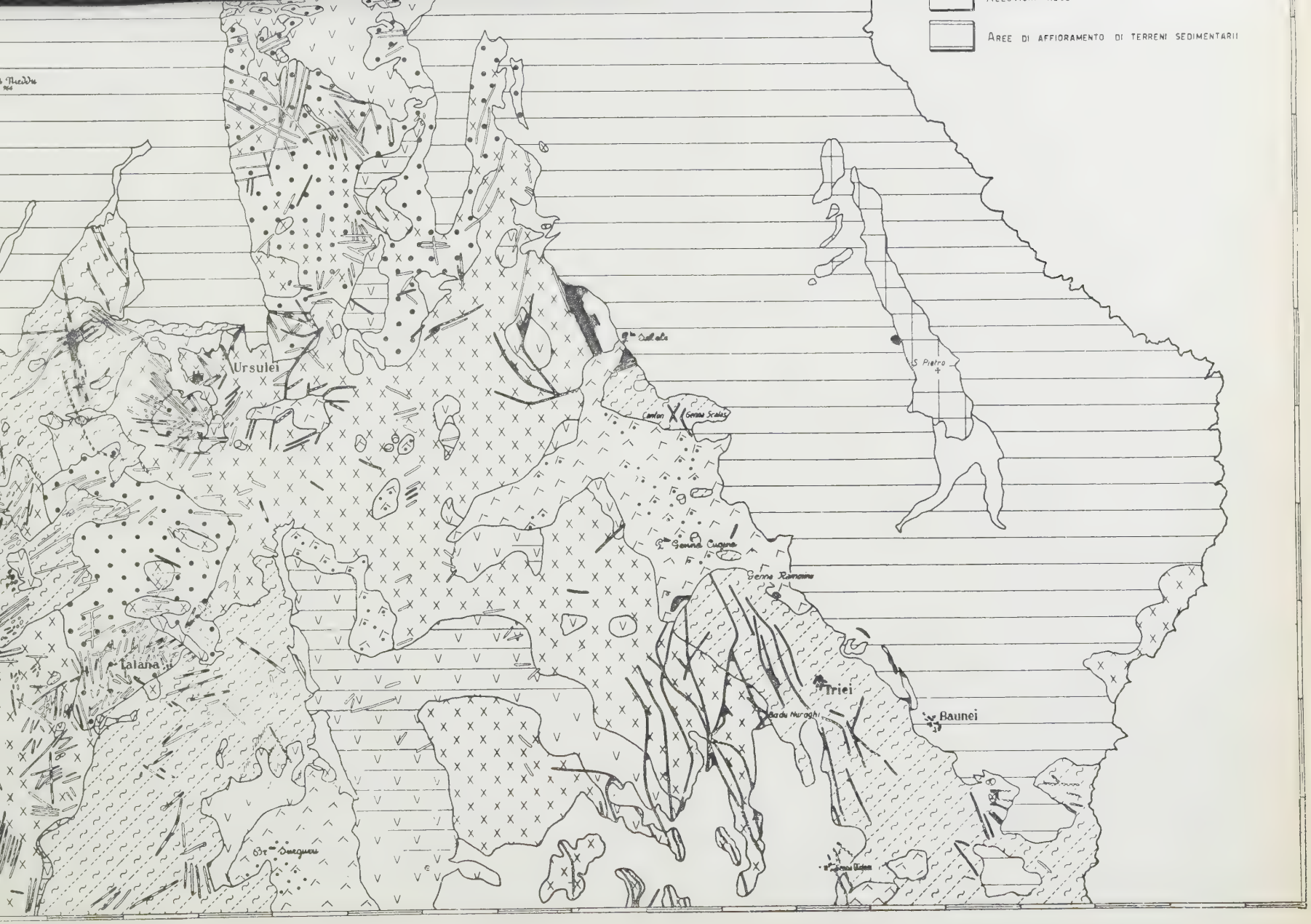
Le risultanze delle nostre ricerche non contrastano con l'ipotesi sopra esposta della esistenza di numerosi centri di effusione allineati lungo le fratture che nel settore risultano arcuate parallelamente alla costa, ma non hanno precisato in modo chiaro ed inequivocabile se ai numerosi centri di effusione corrispondano altrettante « fasi » dell'attività effusiva.

Un solo interessante dato è stato acquisito per una precisazione al riguardo: *la presenza di un livello detritico alluvionale* (con detriti prevalentemente calcareo-dolomitici, subordinatamente granitici e basaltici) *compreso entro le lave basaltiche*. Tale livello è visibile a Cala Gonone e nella zona tra Nuraghe Neule e Noriolo in corrispondenza del profondo solco con pareti quasi verticali entro cui scorre il fiume Cedrino.

Tale livello detritico sta indubbiamente ad indicare distintamente l'esistenza di almeno due fasi dell'attività vulcanica nella zona di Dorgali.

(2) C. Lauro, *Studio geologico e petrografico delle rocce vulcaniche post-mioceniche della Sardegna.* – Nota III. *I basalti di Orosei e Dorgali*, « Periodico di Mineralogia », 1939.

R. Portale
N.S.ª Rimedio
F. Cedrino
Cuc.ma Trupperia
Cuc.ma Ruiesta
DORGALI
Cala di Gonone
R. Gollidai
M. Odden
1054
Cala di Luna
Luna
de
Cant Bidricolai
Caduta
Rio
Scala : 0 1 2 3 Km.
LEGGENDA
FILLADI SERICITICHE E QUARZIFERE CON TENDENZA LOCALE A QUARZITI
LENTI DI CALCESCISTI GRAFITOSI
PARAGNEIS A CRISTALLINITÀ ABBASTANZA VARIA PER LO PIU' MINUTI CON SFUMATURE A FILLADI E A GNEIS MISTI
SCISTI CRISTALLINI CON CARATTERE CORNUBIANITICO
GRANITI NORMALI A GRANA MEDIA
GRANITI A GRANA GROSSA GENERALMENTE CON VISTOSI CRISTALLI DI FELDISPATO POTASSICO ROSEI O BIANCHI
MESCOLANZE DI GRANITI NORMALI E PEGMATITICI
MICROGRANITI SPESSO APLITICI A STRUTTURA DA GRANULARE A PORFIRICA
MESCOLANZE CONFUSE E FITTE DI GRANITI E MICROGRANITI
DIFFERENZIAZIONI QUARZODIORITICHE A CHIAZZE NEI GRANITI
FILONI DI APLITI E MICROGRANITI
FILONI DI PORFIDO GRANITICO
FILONI DI LAMPROFIRI E PORFIRITI BASICHE
FILONI DI QUARZO
FILONI DI PORFIDO ROSEO, TALORA NERASTRO E FELSITICO ALLE SALBANDE
PORFIDI IN MASSE MOLTO VARI PER COLORE E STRUTTURA, SPESSO A PASTA MICROFELSITICA
PORFIDI FORTEMENTE INOMOGENEI CONTENENTE NUMEROSI FRAMMENTI DI SCISTI DA MICRO- A MACROSCOPICI SINO A BRECCE MAGMATICHE
BASALTI.



Carta geologica per i terreni eruttivi e metamorfici del Foglio Dorgali (Sardegna Orientale).

Biochimica. — *Ulteriori ricerche sugli enzimi respiratori di gasteropodi marini e terrestri. Proprietà del citocromo h*[*]. Nota[**] di Luisa Tosi e Francesco Ghiretti, presentata dal Socio L. Califano.

Sorby[1] nel 1876 osservò che l'intestino di alcuni Gasteropodi terrestri contiene un pigmento estracellulare che ha lo spettro di un emocromogeno ed è capace di passare alternativamente dalla forma ossidata a quella ridotta. Alcuni anni dopo Krukenberg[2] chiamò questo pigmento Elicorubina. Recentemente Joan Keilin[3] ha dimostrato che in *Helix* anche l'epatopancreas contiene un emocromogeno solubile e che tale emocromogeno ha le proprietà di un vero e proprio citocromo al quale è stato dato il nome di citocromo *h*. Secondo Keilin l'Elicorubina dell'intestino sarebbe un pigmento molto simile al citocromo *h* del quale rappresenterebbe la forma estracellulare parzialmente modificata.

Nel corso di alcune ricerche sul sistema dei citocromi di *Aplysia*[4] avevamo visto che, mentre i particolati isolati dai muscoli contengono un sistema di citocromi formato dai classici componenti *a*, a_3, *b*, *c* e c_1, l'epatopancreas contiene un pigmento che per le sue proprietà ci sembrò fin da allora assai simile al citocromo *h* della ghiandola digestiva di *Helix*. Vedemmo inoltre che, come quest'ultimo, anche il pigmento di *Aplysia* ha diverse proprietà in comune coi citocromi *b* e *c*. Era necessario pertanto studiare sistematicamente le proprietà fisiche e chimiche dell'emocromogeno dell'epatopancreas di *Aplysia* e metterle in confronto con quelle del citocromo *h* di un gasteropode terrestre per stabilire esattamente l'entità delle analogie e delle differenze fra i due pigmenti. Le proprietà di entrambi infine dovevano essere confrontate con quelle dei citocromi *b* e *c* di mammifero onde avere qualche indicazione sulla posizione del citocromo *h* nella catena respiratoria.

I risultati delle ricerche che riferiamo in questa Nota indicano che il citocromo *h* può essere introdotto nel gruppo dei citocromi *c*.

(*) Lavoro eseguito nel Reparto di Fisiologia della Stazione Zoologica di Napoli, con un contributo (RG-4845 C_4) del National Institutes of Health, U.S. Public Health Service.

(**) Pervenuta all'Accademia il 9 luglio 1960.

(1) H. C. Sorby, « Quart. J. Micr. Sc. », *16*, p. 76 (1876).

(2) C. F. W. Krukenberg, « Vergleichende Physiologische Studien », *2*, p. 63 (1882).

(3) J. Keilin, « Biochem. J. », *64*, p. 663 (1956); « Nature », *180*, p. 427 (1957).

(4) L. Tosi, A. Ghiretti-Magaldi e F. Ghiretti, « Rend. Acc. Naz. Lincei, », *23*, p. 447 (1957); F. Ghiretti, A. Ghiretti-Magaldi e L. Tosi, « J. gen. Physiol. », *42*, p. 1185 (1959).

Materiale e metodi.

Il citocromo *h* è stato estratto e purificato dall'epatopancreas di *Aplysia depilans* e di un gasteropode terrestre *Cryptomphalus aspersus*, secondo il metodo descritto precedentemente [4]. Nel caso di Aplysia questo metodo, a causa della presenza di uno o più pigmenti rossi e fluorescenti negli estratti grezzi, richiede un maggior numero di passaggi e di purificazioni. La preparazione di polveri acetoniche dal materiale originario è assai utile perché gran parte dei pigmenti suddetti viene allontanata durante il trattamento con acetone. Tracce di essi però accompagnano sempre i preparati e possono venire rimossi completamente dalla soluzione finale di citocromo *h* mediante adsorbimento su gel di fosfato di calcio o su allumina Cγ a pH 6,5–6,1 e successive precipitazioni frazionate con ammonio solfato dal 35 al 65 % di saturazione e a pH crescenti da 5,1 a 8,2.

La purificazione del citocromo *h* è stata seguita spettrofotometricamente mediante i seguenti rapporti calcolati in base alle densità ottiche (D) del massimo di assorbimento della banda γ nelle due forme ridotta e ossidata (rispettivamente a 423 e 409 mμ) e del massimo di assorbimento a 276 mμ della banda delle proteine.

$$(D^{423}_{rid} - D^{423}_{oss})/D^{423}_{oss} \qquad (R_1)$$

$$(D^{423}_{rid} - D^{423}_{oss})/D^{276}_{oss} \qquad (R_2)$$

$$D^{276}_{oss}/D^{409}_{oss} \qquad (R_3).$$

Ammettendo che a 423 mμ le impurezze presenti nel preparato abbiano lo stesso assorbimento, R_1 sarà proporzionale alla concentrazione del citocromo *h* e indicherà il grado di purificazione di questo rispetto a quei composti che assorbono intorno alla stessa lunghezza d'onda. R_2 indica il grado di purificazione del citocromo rispetto alle proteine totali presenti nel preparato. R_3 è stato calcolato per poter confrontare i nostri dati con quelli di *Helix* [3].

Nella Tabella I sono riportati i valori di R_1, R_2 e R_3 per due preparati di citocromo *h* dall'epatopancreas di *Cryptomphalus* e di *Aplysia* (65 e 650 gr. rispettivamente) nel corso della purificazione.

La concentrazione delle proteine è stata determinata spettrofotometricamente secondo Kalckar [5] o colorimetricamente secondo il metodo di Lowry e al. [6]. La concentrazione del citocromo *h* nei preparati finali è stata calcolata secondo l'espressione seguente:

$$C = (D^{423}_{rid} - D^{423}_{oss})/(\varepsilon^{423}_{M\,rid} - \varepsilon^{423}_{M\,oss})$$

(5) H. Kalckar, « J. Biol. Chem. », *167*, p. 461 (1947).

(6) O. H. Lowry, N. J. Rosebrough, A. L. Farr e R. J. Randall, « J. Biol. Chem. », *193*, p. 265 (1951).

dove ε_M rid e oss sono i coefficienti molari di estinzione a 423 mμ delle forme ridotta e ossidata del citocromo *h*. Essi sono eguali rispettivamente a 13×10^4 e $3{,}4 \times 10^4$ [3].

Tabella I.

Purificazione del citocromo h dall'epatopancreas di Cryptomphalus aspersus (1) *e di* Aplysia depilans (2).

Frazione	R_1	R_2	R_3	mg di proteine per ml	mg di proteine totali	ml totali	Concentrazione di cit.
(1) Omogenato	—	—	—	37	18.500	500	
Dopo precipit. con Pb acetato	0,7	—	—	2,4	1.800	750	
2° precip. con Am. solfato 65 % sat.	1,27	0,22	3,62	7,33	325	45	
Dopo riscaldamento a 67°	2,29	0,56	2,30	2,16	97	45	
Dopo dialisi	2,42	0,81	1,46	2,77	69,3	25	
Dopo adsorb. su calcio fosfato gel	2,50	1,04	1,20	0,70	37	52,5	
Dopo liofilizzazione	2,61	1,26	0,97	11,2	35,8	3,2	$1{,}58 \times 10^{-4}$ mol/lt
(2) Preparato finale	1,54	0,10	8,78	13,44	67,7	5,0	$1{,}55 \times 10^{-5}$ mol/lt

Tutte le determinazioni sono state eseguite mediante lo spettrofotometro Beckman modello DK-2 o mediante uno spettrofotometro Beckman DU previamente tarato con lampada a idrogeno.

Risultati.

Spettro del citocromo h. – Nella Tabella II sono riportati i massimi delle bande di assorbimento del citocromo *h* nelle forme ossidata e ridotta. Il pigmento preparato da *Cryptomphalus* dopo riduzione con ditionite mostra, oltre le bande α, β e γ, una piccola banda con massimo intorno a 600 mμ. Tale banda non è visibile nello spettro del pigmento di *Aplysia* probabilmente a causa della bassa concentrazione delle soluzioni adoperate.

Il massimo della banda γ del citocromo *h* di *Aplysia* e *Cryptomphalus*, sia nella forma ossidata che in quella ridotta, è leggermente spostato verso

più alte lunghezze d'onda rispetto a quello del citocromo di *Helix*. La differenza è maggiore per il pigmento di *Aplysia*.

TABELLA II.

Proprietà spettrofotometriche del citocromo h.

	Forma	Bande mμ			
			α	β	γ
Cryptomphalus aspersus	Ossidata	600	562–4	536	409
	Ridotta		556	526,5	423
Aplysia depilans	Ossidata		560–5	536–8	410–12
	Ridotta		556	526–8	423–4
Helix pomatia (*)	Ossidata		562	536	408
	Ridotta		556	526,5	422

(*) Dai dati di J. Keilin (1).

TABELLA III.

Posizione dei massimi di assorbimento del Citocromo h di Cryptomphalus aspersus *a diversi pH.*

pH	Forma	mμ					
1,10	Ossidata	620	(530)	495	394	276	
1,5–3,5	Ossidata	562	536	409	350	276	
	Ridotta	600	556	526	423		
5,0–9,5	Ossidata	562	536	409	350	276,5	
	Ridotta	600	556	526	423		
10,2	Ossidata	562	535	409	350	276,5	
	Ridotta	600	556	526	423		
11,2	Ossidata	(556)	535	409	350	278,5	
	Ridotta	600	556	526	423		
11,8	Ossidata	(556)	535	408	350	283	
	Ridotta	600	556	526	422		
12,8–13,2	Ossidata	(600)	558	525	397	(350)?	289,5
	Ridotta	600	555	525	419		

Azione del pH. – Nella Tabella III sono riportati i massimi delle bande di assorbimento del citocromo *h* di *Cryptomphalus* a diversi pH. Lo spettro a pH 1,10 è quello dell'emina acida ed è molto simile allo spettro dell'emina del citocromo *c* in soluzione acida. Fra pH 3,6 e 4,9 non è possibile prendere lo spettro del citocromo *h* perché il pigmento ha un punto isoelettrico intorno a 4,3.

A pH alcalino il citocromo *h*, in presenza o no di versene, mostra sempre una parziale riduzione che aumenta entro i primi 30–40 minuti. Gli spettri da pH 10,2 a 13 sono stati sempre presi perciò in presenza di perclorato sodico 2–3 % come ossidante. In ambiente fortemente alcalino si ha un cambiamento irreversibile della forma e della posizione dei massimi dello spettro dovuto probabilmente ad una alterazione della parte proteica del pigmento. Tale cambiamento comincia già a manifestarsi a pH 10 come è indicato dallo spostamento della banda a 270 mμ verso valori più alti. L'eme del citocromo *h* non è modificato a pH alcalino. Infatti, dopo trattamento a pH 13,5 a temperatura ambiente e successiva neutralizzazione, esso non viene estratto dall'acetone acido.

Ossidazione spontanea del citocromo h. – I preparati di citocromo *h* da noi ottenuti sono autossidabili. La reazione di ossidazione è del primo ordine rispetto al citocromo e la costante di velocità, determinata graficamente per interpolazione della frazione del citrocromo ridotto in funzione del tempo, è di 5×10^{-3} sec^{-1}. Essa varia di poco da pH 3,0 a 9,5. La reazione è stata studiata spettrofotometricamente nel modo seguente. Una soluzione acquosa concentrata di citocromo *h* di *Cryptomphalus* viene ridotta mediante idrogeno puro in presenza di nero di palladio, filtrata sotto pressione di idrogeno e aggiunta ad una soluzione tampone a pH noto. La velocità di ossidazione del ferrocitocromo è seguita a 423 mμ e la frazione di citocromo ridotto ai vari tempi è calcolata in base al rapporto:

$$(D_t^{423} - D_{oss}^{423})/(D_{rid}^{423} - D_{oss}^{423})$$

ove *t* è il tempo in secondi e D_{oss} e D_{rid} sono le densità ottiche a 423 mμ quando il citocromo è rispettivamente tutto nella forma ossidata e tutto nella forma ridotta.

Estrazione dell'eme. – L'eme è stato staccato dal citocromo *h* mediante idrolisi della proteina acidificata in presenza di sali di argento a 70°C e per 80 minuti [7]. Per aggiunta di acetone acido la proteina viene allontanata e il supernatante, contenente l'eme, concentrato in corrente di azoto. Le proprietà dell'eme ottenuto sono state confrontate con quelle dell'eme estratto dal citocromo *c* di mammifero (Tabella IV).

Composti del citocromo h. – Il citocromo *h* non si combina con sodio fluoruro fra pH 2,0 e 6,0. Solo in presenza di 0,1 N HCl, per aggiunta del fluoruro, si osserva lo spostamento da 620 a 605 mμ della banda dell'ema-

(7) K. G. Paul, «Acta Chem. Scand.», 5, p. 384 (1951).

tina acida. Contemporaneamente compare una piccola banda appiattita intorno a 525 mμ.

TABELLA IV.

Proprietà spettrofotometriche dell'esame estratto dal cit. h di Cryptomphalus *e dal cit. c di mammifero.*

Solvente	Cit.	Posizione dei massimi di ass. mμ			
Acetone–H_2SO_4	*h*	618	(560)	497	394,2
	c	618	560	493,5	391
Metanolo	*h*	610		490,5	392
	c	620	(560)	495	392
Piridina–Na_2SO_4	*h*	549		519	412,5
	c	548		519	412

La formazione del composto col cianuro è stata seguita spettrofotometricamente in presenza di 0,1 N NaOH prima e dopo aggiunta di KCN. Dopo 15 minuti si osserva la scomparsa delle bande a 558 e 525 mμ e l'insorgere di una unica banda nella regione verde dello spettro. Ancora più rapida è la trasformazione della banda γ da piatta e asimmetrica in quella tipica del composto (Tabella V).

TABELLA V.

Composti del citocromo h di Cryptomphalus aspersus.

Forma	Legante	pH	Posizione dei massimi di ass. mμ		
Ossidata	NaF	1,05	605	(525)	397
Ridotta	Piridina	12,80	551	521	414
Ossidata	KCN	13,00	555	542	422
Ridotta	KCN	13,00	563	537	432

A pH 7,0 il ferrocitocromo *h* non forma alcun composto con l'ossido di carbonio.

Ossidazione e riduzione del citocromo h. – Il citocromo *h* è ridotto da idrosolfito di sodio, idruro di litio, idruro di bromo e potassio, ossalato fer-

roso, acido ascorbico, cisteina, glutatione ridotto. È riossidato da ossalato ferrico, ferricianuro di potassio, perclorato di sodio, perossido di idrogeno, citocromo *c*.

Un preparato di citocromossidasi privo di citocromo *c*, ottenuto dal muscolo cardiaco di mammifero secondo Tsou [8] è capace di riossidare il citocromo *h* ridotto da acido ascorbico. La velocità di ossidazione è molto più lenta di quella del citocromo *c* di mammifero; la reazione non è completa e, a parità di altre condizioni, l'equilibrio viene raggiunto quando l'ossidasi è presente in concentrazione tre volte maggiore di quella richiesta dal citocromo *c*.

Il citocromo *h* è ridotto da DPNH in presenza di ossidasi di mammifero e di cianuro. La velocità media della reazione, misurata fra 0 e 180 secondi, è 1,58 volte minore di quella del citocromo *c* di mammifero. Il citocromo *h* è ridotto anche dal succinato in presenza di KCN, ma molto lentamente. La velocità media di riduzione è per il citocromo *h* di *Aplysia* dieci volte minore di quella del citocromo *c*, pur essendo la concentrazione di succinato quattro volte maggiore.

Potenziale di ossido-riduzione. – Il potenziale di ossido-riduzione del citocromo *h* di *Cryptomphalus aspersus* è stato determinato spettrofotometricamente secondo il metodo descritto altrove [9]. A pH 6,5 esso è eguale a + 0,126 Volt.

Considerazioni e conclusioni.

Le proprietà del citocromo *h* di *Aplysia* e di *Cryptomphalus* possono essere riassunte come segue:

Analogie con i citocromi del gruppo b: posizione dei massimi delle bande di assorbimento dello spettro; autossidabilità; spettro del composto col cianuro.

Analogie col citocromo c del cuore di bue: spettro dell'emina acida a pH 1,0; metodo di estrazione dell'eme; inefficienza degli inibitori della respirazione cellulare a pH fisiologico; posizione dei massimi di assorbimento del composto con piridina; solubilità in acqua; resistenza al calore; stabilità a valori bassi di pH.

Differenze col citocromo c di mammifero: Assenza di ampie modificazioni dello spettro a vari pH; modificazione irreversibile della proteina a pH 13; autossidabilità a pH fisiologico; punto isoelettrico (assai più vicino a quello del cit. *f*. dei cloroplasti); potenziale di ossido-riduzione.

Differenze col citocromo h di Helix: formazione del composto col cianuro dopo incubazione con alcali, senza previo trattamento con HCl; posizione della banda *a* del composto del ferrocitocromo con piridina; impossibilità

(8) C. L. Tsou, « Biochem. J. », *49*, p. 362 (1951).
(9) L. Tosi e F. Ghiretti, « Rend. Acc. Naz. Lincei ».

di staccare l'eme dopo trattamento con HCl a temperatura ambiente; potenziale di ossido-riduzione; autossidabilità e invariabilità della costante della velocità da pH 3,5 a 9,5; necessità del cianuro perché avvenga la riduzione in presenza di DPNH o di succinato; riossidazione enzimatica anche in assenza di citocromo *c*.

I dati su riferiti permettono di concludere che il gruppo prostetico del citocromo *h* di *Aplysia* e di *Cryptomphalus* è una protoporfirina che potrebbe avere nelle posizioni 2 e 4 gruppi vinilici non saturi. Questi gruppi devono essere legati alla proteina mediante legami assai stabili che possono essere rotti soltanto in condizioni analoghe a quelle richieste per rompere i legami tioesteri che nel citocromo *c* uniscono la proteina alla porfirina. Non sappiamo se questi gruppi sono legati alla proteina per mezzo di residui di cisteina come nel citocromo *c* oppure mediante residui di altri aminoacidi.

Biologia. — *Aspetti biochimici della metamorfosi degli Insetti. L'acido ribonucleico durante lo sviluppo larvale e la metamorfosi di* Musca domestica *L.* (*). Nota (**) di SALVATORE RUSSO-CAIA, presentata dal Socio G. COTRONEI.

Le trasformazioni delle sostanze proteiche che si verificano durante la vita pupale degli Insetti olometaboli hanno grande importanza nei fenomeni di istolisi ed istogenesi, che costituiscono l'aspetto più caratteristico della metamorfosi; in precedenti lavori sono state riferite alcune osservazioni riguardanti direttamente o indirettamente il metabolismo delle sostanze azotate durante lo sviluppo larvale e la metamorfosi di *Musca domestica* L.

Si è così visto, per quanto riguarda gli enzimi proteolitici (Russo-Caia, 1960) (1), che ciascuna delle attività enzimatiche studiate mostra un comportamento particolare; le attività dipeptidasica e proteinasica acida possono essere messe in rapporto, oltreché con i fenomeni di idrolisi, anche con la sintesi di nuove molecole proteiche, sia durante il periodo di intenso accrescimento larvale che nella istogenesi pupale. Il comportamento della attività proteinasica alcalina che, presente per tutto il periodo di accrescimento, scompare poi completamente durante la metamorfosi, sembra invece collegato ai fenomeni della nutrizione larvale.

Le modificazioni qualitative e quantitative dei cataboliti azotati (Russo-Caia, 1960) (2) possono essere considerate sopratutto una conseguenza dell'adattamento alle diverse condizioni, interne e di ambiente, in cui si svolge la vita larvale e la pupale; dalla eliminazione di ammoniaca della larva, che vive in un ambiente ricco di acqua, si passa infatti all'accumulo di acido urico nella pupa che, essendo un « sistema chiuso » con una limitata quantità di acqua a disposizione, non può eliminare le scorie del suo metabolismo azotato.

Le complesse trasformazioni che conducono alla scomparsa dei tessuti larvali ed alla loro sostituzione con gli organi dell'immagine avvengono comunque con grande economia di materiali azotati; le « spese energetiche » della metamorfosi vengono sostenute sopratutto mediante la combustione di lipidi e glucidi, mentte la maggior parte (92-93 %) dei materiali azotati

(*) Ricerche eseguite nell'Istituto di Zoologia ed Anatomia Comparata della Università di Camerino, con il contributo del C.N.R. e della Rockefeller Foundation.

(**) Pervenuta all'Accademia il 24 settembre 1960.

(1) S. RUSSO-CAIA, « Acta Embryol. Morphol. Exper. », *3*, 131 (1960).

(2) S. RUSSO-CAIA, « Rend. Ist. Sci. Camerino », *1*, 67 (1960).

della larva resta invece a costituire il corpo della immagine (Russo-Caia, 1960 [3]; Russo-Caia e Cecere, 1960 [4]).

Anche nella metamorfosi degli Anfibi anuri e nello sviluppo embrionale di Vertebrati ed Invertebrati (Urbani, 1955, 1957, 1959 [5]; Urbani e De Cesaris Coromaldi, 1957 [6]; Urbani e Bellini, 1959 [7]) si osserva un fenomeno simile, cioè una accentuata utilizzazione di glucidi e lipidi alla quale si accompagna una modesta diminuzione del tenore in azoto totale dell'organismo.

Strettamente collegate con i fenomeni di sintesi proteica sono le modificazioni degli acidi nucleici; sopratutto per quanto riguarda l'acido ribonucleico, le assai numerose ricerche che hanno confermato ed esteso i fondamentali lavori di Brachet (1941) [8] e Caspersson (1941) [9] consentono ormai di stabilire con certezza che esiste un rapporto fra il tenore in RNA di una cellula e la sua attitudine a sintetizzare proteine. Manca invece la dimostrazione di un intervento dell'acido desossiribonucleico nelle sintesi proteiche; i sempre più numerosi esempi di sintesi di proteine specifiche sotto controllo genico fanno però ammettere che anche il DNA ha un ruolo, sia pure indiretto, nel fenomeno.

L'attuale indirizzo delle indagini sugli acidi nucleici, essendo ormai per la maggior parte degli Autori indiscussi il ruolo genetico del DNA e l'intervento dell'RNA nella sintesi delle proteine, è infatti orientato verso lo studio delle relazioni che intercorrono fra i due composti, cioè in definitiva « fra il gene e la proteina di cui esso controlla la sintesi » (Brachet, 1960) [10].

Nel quadro delle ricerche sugli eventi biochimici della metamorfosi che sto attualmente conducendo, collegate al complesso di studi in corso da vari anni nel nostro Istituto sulla biochimica dello sviluppo di Vertebrati ed Invertebrati, ho ritenuto interessante compiere una serie di osservazioni sugli acidi nucleici nello sviluppo larvale e nella metamorfosi di *Musca domestica* L.; in questa Nota espongo i risultati riguardanti il comportamento dell'acido ribonucleico.

Il materiale su cui sono state compiute le osservazioni è costituito da un ceppo di *Musca domestica* L. che viene mantenuto nel nostro laboratorio con modalità di allevamento già esposte nei precedenti lavori; i criteri con i

(3) S. Russo-Caia, « Riv. Biologia », in corso di stampa (1960)

(4) S. Russo-Caia, F. Cecere, « Ric. Scient. », in corso di stampa (1960).

(5) E. Urbani, « Pubbl. Staz. Zool. Napoli », *26*, 63 (1955); « Rend. Sci. Ist. Lomb. », B *92*, 69 (1957); « Acta Embryol. Morphol. Exper. », *2*, 171 (1959).

(6) E. Urbani, L. De Cesaris Coromaldi, « Acta Embryol. Morphol. Exper. », *1*, 1 (1957).

(7) E. Urbani, L. Bellini, « Ric. Scient. », *29*, 1725 (1959).

(8) J. Brachet, « Arch. Biol. », *53*, 207 (1941).

(9) T. Caspersson, « Naturwiss. », *28*, 33 (1941).

(10) J. Brachet, « Rend. Ist. Sci. Camerino », *1*, 3 (1960); Id., in *Fundamenta. Aspects of Normal & Malignant Growth*. Elsevier (1960).

quali è fatta la seriazione degli stadi di sviluppo, anch'essi già illustrati, sono i consueti, cioè il peso per le larve ed il tempo trascorso dalla formazione del pupario per le pupe.

Il contenuto in RNA è stato determinato su estratti in acido perclorico (secondo la tecnica di Ogur e Rosen, 1950 [11]) mediante la spettrofotometria nell'U.V., compiuta al Beckman a 260 mμ di lunghezza d'onda.

I risultati, riportati nel grafico, sono espressi in Estinzioni ottiche e si riferiscono ad unità di peso fresco; tanto nelle larve che nelle pupe si è infatti estratto l'RNA con quantità di acido perclorico corrispondenti ad una concentrazione di 20 mg di tessuto/ml.

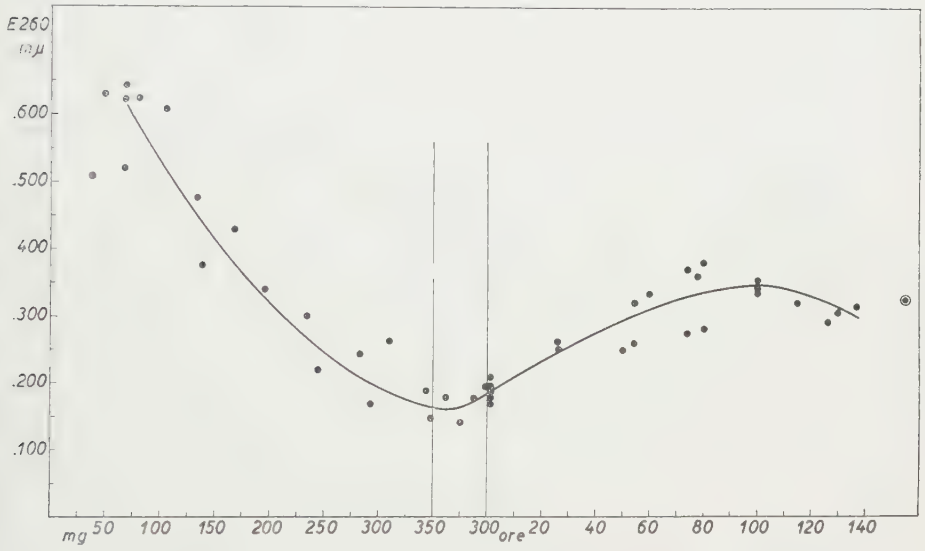


Fig. 1. – Comportamento dell'acido ribonucleico durante lo sviluppo larvale e la metamorfosi di *Musca domestica* L.

In ordinate il contenuto di RNA per unità di peso fresco, espresso in Estinzioni ottiche a 260 mμ. In ascisse gli stadi di sviluppo, ordinati in base al peso (di 10 individui) per le larve, in base alle ore trascorse dall'impupamento per le pupe. La prima linea verticale indica la fine dell'accrescimento larvale, la seconda la formazione del pupario; il simbolo all'estrema destra indica il valore medio nelle immagini.

Poiché come si è detto la pupa costituisce un sistema chiuso, ed il suo rivestimento esterno è permeabile solo ai gas ed al vapore acqueo, la *quantità assoluta* di una sostanza presente nei tessuti pupali può aumentare solo a spese di altri materiali, o diminuire per combustione; la sua *concentrazione* invece (quantità per unità di peso fresco) può variare in rapporto alla diversa idratazione dei tessuti.

In precedenti ricerche (Russo-Caia e Cecere, 1960) [12] sulle variazioni del peso e del contenuto di acqua durante il ciclo vitale di *Musca domestica*

(11) M. OGUR, G. ROSEN, « Arch. Biochem. », *25*, 262 (1950).
(12) S. RUSSO-CAIA, F. CECERE, « Rend. Ist. Sci. Camerino », *1*, 126 (1960).

si è visto infatti che nella metamorfosi si verifica una disidratazione, evidente sopratutto nelle prime 24 ore dalla formazione del pupario; il peso medio delle pupe alla 24ª ora è circa il 70 % di quello delle pupe appena formate, e questa diminuzione è dovuta in gran parte a perdita di acqua.

Volendo tener conto di questo fatto, i valori del grafico che si riferiscono alla vita pupale, relativamente più elevati di quelli della vita larvale perché ottenuti estraendo l'RNA da tessuti contenenti meno acqua, andrebbero corretti, e precisamente diminuiti del 30 % circa.

Pur ritenendo necessario fare questa precisazione, si è tuttavia ugualmente preferito riportare i dati originali, in quanto si è visto che una correzione che tenga conto del fenomeno disidratazione non sposta in questo caso l'andamento della curva, influendo sopratutto sul rapporto fra l'insieme dei valori assoluti osservati durante la vita larvale e l'insieme di quelli della vita pupale. Ben diverso è naturalmente il valore di questa correzione nei casi in cui occorre valutare il consumo, durante la metamorfosi, di sostanze – come i glucidi e i lipidi – destinate ad una prevalente utilizzazione a scopi energetici (Russo-Caia e Cecere, 1960) [4].

Le variazioni del contenuto di acido ribonucleico, riportate nel grafico, mostrano un andamento ben definito e caratteristico; durante l'accrescimento larvale il contenuto di RNA per unità di peso è in continua diminuzione, ed appare inversamente proporzionale al grado di sviluppo raggiunto dall'individuo: tanto più la larva è grande, tanto minore è la concentrazione dell'RNA nei suoi tessuti. Nella pre-metamorfosi, cioè nel periodo (indicato nel grafico tra due linee verticali) in cui cessa la crescita e la larva, pressoché immobile, non si alimenta più, viene raggiunto un livello minimo che si mantiene anche al momento della formazione del pupario e nelle prime ore di vita pupale; in seguito il contenuto di RNA tende ad aumentare (senza però mai raggiungere gli assai elevati livelli delle piccole larve) fino alla 100ª ora circa, e quindi si mantiene pressoché invariato, mostrando anzi una tendenza alla diminuzione, fino alla fine della metamorfosi ed anche nella immagine non alimentata.

I risultati delle presenti osservazioni mostrano che anche nello sviluppo larvale e nella metamorfosi il contenuto di RNA può essere considerato un indice della attitudine dei tessuti alle sintesi proteiche; ammettendo che queste siano assai notevoli durante l'accrescimento larvale (caratterizzato dalla intensa assunzione di alimenti e dall'accumulo di materiali plastici ed energetici), minime nella pre-metamorfosi (in cui cessa la alimentazione) e nelle prime 24 ore di vita pupale (per il prevalere dei fenomeni di istolisi), in aumento dalla 24ª alla 100ª ora (istogenesi), stazionarie nel periodo finale (differenziamento), si osserva che un più o meno elevato tenore in RNA precederebbe in ogni caso le fasi di accentuata sintesi proteica.

Il rapporto fra contenuto di RNA e andamento delle sintesi proteiche appare con evidenza sopratutto durante il forte accrescimento larvale, e la diminuzione che si osserva durante lo sviluppo rappresenta con ogni pro-

babilità solo una conseguenza dell'accumulo progressivo di grassi e carboidrati, che fa diminuire la concentrazione relativa del composto nei tessuti. Le variazioni che si osservano durante la metamorfosi, benché vi sia indubbiamente una tendenza all'aumento dalla 24ª alla 100ª ora, ed alla diminuzione nel periodo terminale, appaiono invece di ampiezza modesta, se si considera la completa riorganizzazione dell'organismo che ha luogo in questa fase del ciclo vitale.

In realtà anche in questo caso trova conferma la opinione di quegli Autori che ritengono impossibile la netta distinzione, nella vita pupale, di un periodo di istolisi e di uno di istogenesi; il comportamento dell'RNA, se si ammette che esso rappresenti un indice dei fenomeni di sintesi (ed il suo elevato tenore durante l'accrescimento ne dà, sullo stesso materiale, immediata conferma) mostra che durante la metamorfosi scissione e sintesi delle proteine avvengono pressoché contemporaneamente. Anche lo studio delle modificazioni qualitative delle proteine indica del resto che non è possibile in genere dimostrare un forte accumulo di composti azotati a peso molecolare relativamente basso (aminoacidi, peptidi) in coincidenza con il periodo di prevalente istolisi.

Tra i risultati ottenuti dallo studio degli acidi nucleici negli Insetti (recentemente esaminati da Wyatt, 1959 [13] in rapporto al problema generale del metabolismo dei composti fosforati) occorre qui ricordare le modificazioni osservate durante lo sviluppo. I risultati delle presenti osservazioni su *Musca domestica* concordano in linea generale con ciò che è stato visto su altri materiali; durante la metamorfosi di *Calliphora erythrocephala*, Agrell (1952, 1953) [14] ha osservato un aumento dell'RNA nel periodo di prevalente istogenesi, seguito da una diminuzione terminale, mentre nello stesso materiale Levenbook (1953) [15] ha trovato che le modificazioni del P ribonucleico sono di ampiezza trascurabile durante tutta la vita pupale, con la eccezione di una iniziale tendenza all'aumento che però l'Autore giustamente considera dovuta alla perdita di acqua dai tessuti.

Più complete sono le osservazioni compiute durante lo sviluppo dle *Bombyx mori*, nel quale è stato descritto (Chino, 1956) [16] un forte aumento del P degli acidi nucleici durante lo sviluppo embrionale, una diminuzione di questi composti durante l'accrescimento larvale (Niemierko e coll., 1956) [17] ed oscillazioni di ampiezza minore nella vita pupale (Niemierko e coll., 1956 [17], 1959 [18]; Sissakian e coll., 1959 [19]). Va infine ricordato che dagli

(13) G. R. WYATT, in *Biochemistry of Insects*. (Proc. IV Int. Congr. Biochem.) Pergamon (1959).

(14) I. AGRELL, « Nature », *170*, 543 (1952); « Acta Physiol. Scand. », *28*, 306 (1953).

(15) L. LEVENBOOK, « J. Cell. Comp. Physiol. », *41*, 313 (1953).

(16) H. CHINO, « Embryologia », *3*, 167 (1956).

(17) S. NIEMIERKO, P. WLODAWER, A. F. WOJCZAK, «Acta Biol. Exp., Vasovic», *17*, 255 (1956).

(18) S. NIEMIERKO, in *Biochemistry of Insects*. (Proc. IV Int. Congr. Biochem.) Pergamon (1959).

(19) N. M. SISSAKIAN, in *Biochemistry of Insects*. (Proc. IV Int. Congr. Biochem.) Pergamon (1959).

studi di Agrell (1952) [14] in *Calliphora erythrocephala* risulta che il contenuto di RNA varia durante la metamorfosi inversamente a quello di DNA, il che indica secondo l'autore la possibilità di una reciproca interconversione; ricerche sono attualmente in corso nel nostro Istituto sul comportamento di DNA nello sviluppo e nella metamorfosi di *Musca domestica*, e la comparazione fra i dati riguardanti i due acidi nucleici potrà fornire notizie interessanti, oltre che sulla biochimica della metamorfosi, anche sulle relazioni fra questi due composti nel metabolismo cellulare.

In conclusione, durante l'accrescimento larvale di *Musca domestica* L. il contenuto di RNA per unità di peso è in continua diminuzione; nella pre–metamorfosi viene raggiunto un livello minimo, che si mantiene anche al momento della formazione del pupario e nelle prime ore di vita pupale; in seguito si ha una tendenza all'aumento fino alla 100ª ora circa. L'elevato tenore in RNA precederebbe in ogni caso le fasi di accentuata sintesi proteica; il fenomeno è evidente sopratutto durante il forte accrescimento della larva, mentre durante la metamorfosi le modificazioni sono di entità minore, per lo svolgersi contemporaneo dei fenomeni di istolisi ed istogenesi.

Biologia (Microbiologia). — *Sulla attività emolitica della O–streptolisina* (*). Nota (**) di Paolo Merucci, Luciano Vella e Alfredo Zampieri, presentata dal Corrisp. D. Marotta.

Nella presente Nota vengono riassunte alcune considerazioni su risultati sperimentali che possono contribuire ad una migliore comprensione del meccanismo dell'azione emolitica della O–streptolisina.

Tali considerazioni riguardano un duplice ordine di fatti: 1° l'inibizione della azione emolitica della O–streptolisina; 2° variazione di alcune condizioni intrinseche ed estrinseche al globulo rosso (invecchiamento, resistenze osmotiche) che coincidono con una modificazione del comportamento di esso di fronte all'azione emolitica della tossina.

L'inibizione dell'azione emolitica della tossina è stata studiata dopo contatto con colesterolo e dopo contatto con cardiolipina.

La prima (inibizione da colesterolo) costituisce un fenomeno da tempo noto (Berliner e Schonheimer (1); Orsi (2). Nelle nostre ricerche sperimentali (Merucci e Vella (3)), questa inibizione è stata studiata mediante il confronto tra le concentrazioni molecolari del colesterolo aggiunto come inibitore e quelle del colesterolo legato alle strutture superficiali delle emazie. Sospensioni acquose di colesterolo (in soluzione fisiologica) a concentrazioni molecolari comprese tra 10^{-7} e 10^{-6} M risultano inibire l'attività emolitica di pari volumi di O–streptolisina standard.

Entro dette concentrazioni di colesterolo è compresa una inibizione del 50 % dell'azione emolitica, e ciò permette di definire il numero di molecole di colesterolo necessarie per produrre questo effetto su di un volume noto di O–streptolisina.

Dalle nostre osservazioni sperimentali risulta che sospensioni acquose di colesterolo alle concentrazioni comprese tra 0,21 e 0,36 $\times$ 10^{-6} M, risultano inibire al 50 % l'effetto emolitico di pari volumi di O–streptolisina standard.

Si può presumere che, fissi restando i volumi della sospensione inibente e dell'emolisina, il numero delle molecole di colesterolo in sospensione acquosa che permette il 50 % di inibizione della tossina, sarà approssimato al numero

(*) Lavoro eseguito nei Laboratori di Microbiologia dell'Istituto Superiore di Sanità di Roma.

(**) Pervenuta all'Accademia l'8 ottobre 1960.

(1) F. Berliner, R. Schonheimer, « J. Biol. Chem. », *124*, 525 (1938).

(2) N. Orsi, « Riv. Ist. Sier. Ital. », *30*, 237 (1955).

(3) P. Merucci, L. Vella, « Rend. Ist. Sup. San. », *22*, 830 (1959).

di molecole di colesterolo presente sui globuli che permetterà la fissazione della tossina necessaria e sufficiente per dare un'emolisi del 50 % di una popolazione nota di globuli rossi.

Poiché si conosce il numero di molecole di colesterolo presenti sulla superficie di un globulo rosso, il numero di molecole di colesterolo, per una data popolazione di emazie, che debbono bloccare tanta tossina da ottenere un effetto 50 % emolitico sarà facilmente misurabile; esso risulterà una frazione (più o meno rilevante) del numero totale di molecole di colesterolo presenti sulla superficie dei globuli cimentati.

Allora il quoziente ottenuto dalla divisione del numero delle molecole di colesterolo presente sulla superficie totale dei globuli rossi presenti nel volume cimentato per l'emolisi, diviso per il numero di molecole di colesterolo aggiunto nella sospensione inibente al 50 %, fornirà un elemento di misura approssimato della aliquota del colesterolo interessata su ogni singolo globulo rosso in una popolazione nota, nella quale si ottiene il 50 % di lisi.

Tale quoziente risulta essere compreso tra 1,34 e 3,61 $\times$ 10^2; ciò significa che perché si abbia il 50 % di emolisi in una popolazione nota di globuli rossi, deve essere interessata dalla tossina una aliquota di colesterolo esistente sulla superficie delle emazie cimentate compresa tra 1,34 e 3,61 $\times 10^{-2}$ del numero totale delle molecole disponibili.

Se si tiene conto che parte della tossina va dispersa (su emazie già lisate, o su altre che non raggiungeranno la lisi) risulta evidente che la lesione provocata dalla tossina interessa una parte della superficie del globulo rosso, e non la totalità di essa.

Si può affermare, in una prima approssimazione che perché l'emolisi avvenga, è sufficiente che la lesione provocata dalla tossina interessi una zona pari a 1/100, e a piccoli multipli (1 a 10) di 1/100 della superficie occupata dal colesterolo presente sulla superficie esterna del globulo rosso.

Successivamente, sulla base di risultati sperimentali di altri Autori [4,5] si è cercato di indagare sulle sostanze inibenti la O–streptolisina che possono venire liberate dal muscolo cardiaco.

Si ritiene infatti che queste sostanze siano dei lipidi legati, più o meno labilmente, a proteine.

Tale inibizione, che riguarda sia l'azione emolitica, sia quella cardiotossica e quella letale della tossina, non è di natura anticorpale.

È stato da noi sperimentato [6] l'eventuale potere inibente l'emolisi da O–streptolisina da parte di un fosfatide, precisamente la cardiolipina, che viene estratto dal muscolo cardiaco.

La cardiolipina è un fosfolipide, o meglio un complesso di fosfolipidi le cui proprietà sono ben note ed utilizzate nella sierodiagnosi della sifilide;

(4) A. W. Bernheimer, G. L. Cantoni, « J. Exptl. Med. », *81*, 295 (1945).
(5) G. L. Cantoni, A. W. Bernheimer, « J. Exptl. Med. », *81*, 307 (1945.
(6) F. Merucci, L. Vella, A. Zampieri, in corso di stampa.

questo fosfatide non contiene azoto (meno del 0,01 %), si comporta come un acido monobasico; in esso il numero delle valenze acide coincide con il numero degli atomi di fosforo che nelle buone preparazioni di cardiolipina rappresenta il 4,15–4,25 % del peso.

Si è osservato che la cardiolipina inibisce l'azione emolitica della O–streptolisina; tale capacità è entro determinati limiti proporzionale alla concentrazione della cardiolipina.

Nelle nostre esperienze è stata impiegata una cardiolipina di purezza nota, priva cioè di colesterolo e di lecitina.

Nello studio delle variazioni della resistenza dei globuli rossi alla azione emolitica della tossina è stata dapprima considerata quella dipendente dall'invecchiamento delle emazie conservate a 4° C nel siero dell'animale salassato. Da questo ambiente le emazie venivano prelevate al momento dell'uso e sottoposte a lavaggi standard. In tale maniera si ottiene la eliminazione mediante il lavaggio e la centrifugazione delle emazie rese più fragili dall'invecchiamento.

È risultato che nell'invecchiamento, parallelamente alla selezione di emazie più resistenti ai traumi, vengono a sopravvivere emazie più resistenti alla lisi da O–streptolisina. Nello spazio di 4 settimane la resistenza delle emazie alla O–streptolisina aumenta in maniera tale che il volume di essa, necessario per ottenere la lisi del 50 % delle emazie al 28° giorno di conservazione, è circa 7 volte il volume di emolisina necessario per ottenere lo stesso grado di lisi al 2° giorno di conservazione.

Di questo fatto si possono prospettare due spiegazioni: la prima è che l'invecchiamento produce alterazioni sulla superficie dei globuli rossi tali da rendere più difficile la fissazione della lisina; la seconda ipotesi si rifà alla difasicità di alcune reazioni di emolisi, prospettata da alcuni Autori. In questo caso, la lisi da O–streptolisina, o da altre emolisine, in un primo momento necessiterebbe della fissazione dell'agente litico sulla emazia, mentre solo in un secondo momento si avrebbe lo scoppio osmotico della emazia stessa: questa ipotesi presuppone che la popolazione delle emazie invecchiate abbia una resistenza osmotica media maggiore. Ne consegue la necessità di disporre di una maggiore quantità di O–streptolisina per determinare la lisi.

È stato allora da noi studiato il comportamento di emazie, sospese in soluzioni saline di varia concentrazione (comprese tra 0,6 e 1,8 %), nei riguardi della resistenza alla O–streptolisina.

Le emazie sospese in concentrazioni saline comprese tra 0,6 ed 1 % manifestano la maggiore resistenza all'azione litica dlla O–streptolisina: entro questo margine si può apprezzare il volume di soluzione standard di O–streptolisina capace di dare l'emolisi del 50 % della popolazione di emazie con essa cimentate: tale valore oscilla tra ml 0,08 e ml 0,1 di soluzione standard di O–streptolisina per una sospensione contenente 100.000 emazie per mmc.

A concentrazioni saline superiori le emazie si dimostrano molto più fragili, in rapporto ai controlli, e si ottiene immediatamente, anche con volumi

inferiori a 0,08 ml di O–streptolisina la lisi pressoché completa delle emazie cimentate.

Dalle esperienze riferite risulta:

1° che la O–streptolisina per provocare la lisi deve fissarsi su di una aliquota molto piccola della superficie dei globuli rossi (lesione puntiforme);

2° che la cardiolipina inibisce l'azione litica della O–streptolisina;

3° che l'invecchiamento nel siero produce un aumento della resistenza delle emazie all'azione litica della O–streptolisina; la resistenza aumenta nelle prime 4 settimane per poi rapidamente cadere ed annullarsi entro il 60° giorno;

4° che le emazie sospese in soluzioni saline di abnorme tonicità sono più facilmente soggette alla lisi operata dalla tossina.

A. Signorini e G. Cotronei.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 19 novembre 1960

Presiede il Socio anziano GINO CASSINIS

NOTE DI SOCI

Matematica. — *Intorno al numero degli zeri di un polinomio nel campo reale.* Nota II (*) del Socio BENIAMINO SEGRE.

Per dimostrare il teorema fondamentale enunciato nel § 1 della Nota I (1), premettiamo alcuni sviluppi formali – in sé non privi di interesse – i quali potrebbero venire estesi a coppie di serie di potenze di gradi arbitrari.

5. – Relazioni fra serie di potenze formali.

Una serie di potenze formali sopra un dato campo K è un'espressione del tipo

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^{n-i} \qquad (a_0 \neq 0) \tag{16}$$

(sulla quale non viene fatta alcuna ipotesi di convergenza), dove le a sono elementi di K, x è un'indeterminata ed n denota un intero ($\geqq 0$), detto il grado della serie; la (16) riducesi ad un polinomio di grado n se $n \geq 0$ ed

$$a_i = 0 \qquad \text{per} \quad i > n. \tag{17}$$

(*) Presentata nella seduta del 19 novembre 1960.

(1) Apparsa a p. 155 di questo volume dei « Rendiconti »; di essa vengono qui proseguite le numerazioni dei paragrafi e delle formule.

La totalità delle serie di potenze formali su K e lo zero di K costituiscono notoriamente un nuovo campo, estensione di K.

Date la (16), di grado n, ed un'altra serie di potenze formali

$$f_1(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i\, x^{n-i-1} \qquad (c_0 \neq 0), \tag{18}$$

di grado $n-1$, definiremo intanto le a_i, c_i anche per valori negativi dell'indice i, assumendo

$$a_i = 0 \quad , \quad c_i = 0 \qquad \text{per} \quad i < 0; \tag{19}$$

porremo inoltre (per tutti i $k \geq 1$ ed $i \geq 0$):

$$q_{k+1,i} = \begin{vmatrix} a_0 & a_{-1} & \cdots & a_{-k+1} & c_{-k} & c_{-k+1} & \cdots & c_0 \\ a_1 & a_0 & \cdots & a_{-k+2} & c_{-k+1} & c_{-k+2} & \cdots & c_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{2k-1} & a_{2k-2} & \cdots & a_k & c_{k-1} & c_k & \cdots & c_{2k-1} \\ a_{2k+i} & a_{2k+i-1} & \cdots & a_{k+i+1} & c_{k+i} & c_{k+i+1} & \cdots & c_{2k+i} \end{vmatrix}. \tag{20}$$

Se (per un dato $k \geq 1$) supponiamo

$$q_{k+1,0} \neq 0, \tag{21}$$

la

$$g_{k+1}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} q_{k+1,i}\, x^{n-k-i-1} \tag{22}$$

risulta una serie di potenze formali, di g r a d o $n-k-1$, relativamente alla quale stabiliremo il

LEMMA 1. – *Tutte e sole le serie di potenze formali*

$$f_{k+1}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} p_{k+1,i}\, x^{n-k-i-1}, \tag{23}$$

di grado non superiore ad $n-k-1$, *per le quali esistano due polinomi su* K:

$$A_{k-1}(x) = \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i\, x^{k-i-1} \quad , \quad B_k(x) = \sum_{i=0}^{k} \beta_i\, x^{k-i}, \tag{24}$$

di gradi rispettivamente non superiori a $k-1$, k, *tali che risulti*

$$f_{k+1}(x) = A_{k-1}(x) f(x) + B_k(x) f_1(x), \tag{25}$$

sono quelle espresse da

$$f_{k+1}(x) = \lambda_{k+1}\, g_{k+1}(x), \tag{26}$$

ove $g_{k+1}(x)$ *viene definito dalle* (22), (20) *e* λ_{k+1} *denoti un qualunque elemento di* K (*talché ogni siffatta* f_{k+1}, *che non sia lo zero, ha in virtù della* (21) *esattamente il grado* $n-k-1$).

Per dimostrarlo osserviamo che, in forza delle (16), (18), (24), il secondo membro della (25) è della forma

$$\sum_i \bar{p}_{k+1,i}\, x^{n-k-i-1},$$

avendo posto:

$$\bar{p}_{k+1,i} = a_{2k+i}\alpha_0 + a_{2k+i-1}\alpha_1 + \cdots + a_{k+i+1}\alpha_{k-1} + c_{k+i}\beta_k + \\ + c_{k+i+1}\beta_{k-1} + \cdots + c_{2k+i}\beta_0; \tag{27}$$

pertanto, affinché sussistano le (25), (23), debbono valere le

$$\bar{p}_{k+1,-2k} = 0 \quad , \quad \bar{p}_{k+1,-2k+1} = 0 \quad , \quad \cdots \quad , \quad \bar{p}_{k+1,-1} = 0 \tag{28}$$

e le

$$p_{k+1,i} = \bar{p}_{k+1,i} \qquad (i \geq 0). \tag{29}$$

Ora, in base alla (27), le (28) costituiscono un sistema di $2k$ equazioni lineari omogenee nelle $k + (k+1) = 2k+1$ quantità α, β; la relativa matrice dei coefficienti è quella formata dalle prime $2k$ righe del determinante (20), ed ha quindi rango $2k$ in forza della (21). Ne discende che le (28) equivalgono a ciò che $\alpha_0, \cdots, \alpha_{k-1}, \beta_k, \cdots, \beta_0$ ordinatamente differiscano al più per un fattore λ_{k+1}, elemento di K, dai minori d'ordine massimo estratti dalla suddetta matrice presi con segni alterni. Sostituendo tali espressioni delle α, β nella (27), e ricordando la (20), si vede così che (per ogni $i \geq 0$) risulta $p_{k+1,i} = \lambda_{k+1} q_{k+1,i}$, sicché le (29) diventano

$$p_{k+1,i} = \lambda_{k+1} q_{k+1,i} \qquad (i \geq 0). \tag{30}$$

Avuto riguardo alle (22), (23), le (30) equivalgono di fatto alla (26).

6. – L'ALGORITMO DELLE DIVISIONI SUCCESSIVE.

Riferiamoci ancora alle due serie di potenze formali (16), (18), e supponiamo che *valga relativamente ad esse la* (21), *per* $k = 1, 2, \cdots, s+1$. Potremo quindi definire anzitutto le quantità positive λ_{k+1}, per $k = 1, 2, \cdots, s+1$, assumendo:

$$\begin{cases} \lambda_2 = \dfrac{1}{c_0^2}, \\ \lambda_{2h+2} = \left(\dfrac{q_{2,0} q_{4,0} \cdots q_{2h,0}}{c_0 q_{3,0} q_{5,0} \cdots q_{2h+1,0}} \right)^2 \\ \lambda_{2h+1} = \left(\dfrac{q_{1,0} q_{3,0} \cdots q_{2h-1,0}}{q_{2,0} q_{4,0} \cdots q_{2h,0}} \right)^2 \end{cases} \qquad \left(1 \leq h \leq \left\lfloor \frac{s+1}{2} \right\rfloor\right), \tag{31}$$

e poi (per gli stessi valori di k) le $f_{k+1}(x)$ mediante le (26), (31), dove le $g(x)$ vengono fornite dalle (22), (20). Per uniformità di notazione, introduciamo anche le $f_0(x)$, $g_0(x)$, $g_1(x)$ ponendo

$$f_0(x) = g_0(x) = f(x) \quad , \quad g_1(x) = f_1(x) , \tag{32}$$

con che le (21), (22), (26) vengono a sussistere anche per $k = -1, 0$, ove si ponga

$$q_{0,i} = a_i \quad , \quad q_{1,i} = c_i \quad , \quad \lambda_0 = \lambda_1 = 1. \tag{33}$$

Ciò premesso, ci proponiamo di dimostrare che *le suddette* $f_{k+1}(x)$ *soddisfanno alle identità*

$$f_k(x) = (\sigma_k x + \tau_k) f_{k+1}(x) - f_{k+2}(x) \qquad (k = 0, 1, \cdots, s), \tag{34}$$

dove le σ, τ sono elementi di K che verranno determinati in seguito.

La (34) si stabilisce anzitutto per $k = 0$, avuto riguardo alle (32), (16), (18), (26), (31), (22), (20), in base alla

$$\left(\frac{a_0}{c_0} x + \frac{a_1 c_0 - a_0 c_1}{c_0^2} \right) \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^{n-i-1} - \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^{n-i} = \frac{1}{c_0^2} \sum_{i=0}^{\infty} q_{2,i} x^{n-i-2} ,$$

di verifica immediata; e ciò fornisce senz'altro i valori di σ_0, τ_0. Possiamo quindi supporre $1 \leq k \leq s$, e procedere per induzione rispetto a k, ammettendo di avere già dimostrate le

$$f_i(x) = (\sigma_i x + \tau_i) f_{i+1}(x) - f_{i+2}(x) \qquad (i = 0, 1, \cdots, k-1); \tag{35}$$

qui $f_0(x), f_1(x), \cdots, f_{k+1}(x)$ denotano le serie di potenze formali dei gradi $n, n-1, \cdots, n-k-1$ inizialmente considerate, l'ultima delle quali, ad esempio, è definita dalla (23), dove i coefficienti p si calcolano mediante le (30), le q, λ a queste relative essendo fornite dalle (20), (31).

D e f i n i a m o ora $f_{k+2}(x)$ mediante la (34), nella quale – com'è lecito in virtù delle (30), (31), (21) – assumiamo:

$$\sigma_k = \frac{p_{k,0}}{p_{k+1,0}} \quad , \quad \tau_k = \frac{p_{k,1} p_{k+1,0} - p_{k,0} p_{k+1,1}}{p_{k+1,0}^2} ; \tag{36}$$

basterà così provare che l a s t e s s a $f_{k+2}(x)$ può anche venire calcolata nel modo specificato al principio del presente numero.

A tal fine incominciano con l'osservare che, in forza delle (34), (36), la suddetta $f_{k+2}(x)$ risulta una serie di potenze formali di g r a d o n o n s u p e r i o r e a d $n-k-2$:

$$f_{k+2}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} p_{k+2,i} x^{n-k-i-2} , \tag{37}$$

dove

$$p_{k+2,i} = \frac{1}{p_{k+1,0}^2} \begin{vmatrix} p_{k,0} & 0 & p_{k+1,0} \\ p_{k,1} & p_{k+1,0} & p_{k+1,1} \\ p_{k,i+2} & p_{k+1,i+1} & p_{k+1,i+2} \end{vmatrix} . \tag{38}$$

D'altro canto, basta eliminare $f_2(x), f_3(x), \cdots, f_{k+1}(x)$ fra le (34), (35) e ricordare le (32), per vedere che esistono dei polinomi $A_k(x), B_{k+1}(x)$, di gradi rispettivamente non superiori a $k, k+1$, tali che:

$$f_{k+2}(x) = A_k(x) f(x) + B_{k+1}(x) f_1(x).$$

Poiché per ipotesi risulta $q_{k+2,0} \neq 0$, possiamo applicare il lemma 1 (§ 5), e dedurne l'esistenza di un elemento, λ_{k+2}, di K tale che:

$$p_{k+2,i} = \lambda_{k+2} q_{k+2,i} \qquad (i \geq 0), \tag{39}$$

dove le $q_{k+2,i}$ denotano le quantità che si hanno dalla (20) ponendovi $k+1$ in luogo di k. Per stabilire l'asserto, basterà dunque provare che il suddetto λ_{k+2} può venire calcolato mediante le (31); e poiché attualmente $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{k+1}$ sono già noti, e forniti dalle (33), (31), tutto sta così nel dimostrare che è:

$$\lambda_{k+2} = \lambda_k (q_{k,0}/q_{k+1,0})^2. \tag{40}$$

Esprimiamo all'uopo nella (38) le singole p, in funzione delle λ, q, mediante la (30) (la quale vale anche ove vi si scriva k in luogo di $k+1$) e la (39). Otteniamo in tal guisa che, per ogni $i \geq 0$, risulta

$$\lambda_{k+2} q_{k+2,i} = \frac{\lambda_k}{q_{k+1,0}^2} \begin{vmatrix} q_{k,0} & 0 & q_{k+1,0} \\ q_{k,1} & q_{k+1,0} & q_{k+1,1} \\ q_{k,i+2} & q_{k+1,i+1} & q_{k+1,i+2} \end{vmatrix},$$

in particolare dunque:

$$\lambda_{k+2} q_{k+2,0} = \frac{\lambda_k}{q_{k+1,0}^2} \begin{vmatrix} q_{k,0} & 0 & q_{k+1,0} \\ q_{k,1} & q_{k+1,0} & q_{k+1,1} \\ q_{k,2} & q_{k+1,1} & q_{k+1,2} \end{vmatrix}, \tag{41}$$

$$\lambda_{k+2} q_{k+2,k+1} = -\frac{\lambda_k}{q_{k+1,0}^2} \begin{vmatrix} q_{k,0} & 0 & q_{k+1,0} \\ q_{k,1} & q_{k+1,0} & q_{k+1,1} \\ q_{k,k+3} & q_{k+1,k+2} & q_{k+1,k+3} \end{vmatrix}. \tag{42}$$

Serviamoci ora del fatto che le q, λ_k si calcolano rispettivamente mediante le (20), (31); vediamo così che λ_k *non dipende dalle* a_i *di indice* $i \geq 2k-1$, e che nessuna delle q che appaiono nella (41) – e quindi neppure λ_{k+2} – viene a dipendere da a_{3k+3}. Si può perciò utilizzare la (42) per ricavarne λ_{k+2}, dopo di avere eventualmente modificato a_{3k+3}, se necessario, in guisa che risulti $q_{k+2,k+1} \neq 0$ (il che non altera λ_{k+2}): ciò è certamente possibile, in quanto

– in forza della (20) – a_{3k+3} entra linearmente in $q_{k+2,k+1}$, con coefficiente $-c_0 q_{k+1,0} \neq 0$. La (42) mostra allora che λ_{k+2} *non dipende da* a_{2k+2}.

Ne consegue che *ciascuno dei due membri della* (41) *è una funzione lineare di* a_{2k+2}; basta allora uguagliare i coefficienti di a_{2k+2} in tali funzioni lineari, per dedurne che vale la

$$\lambda_{k+2}(-c_0 q_{k+1,0}) = \frac{\lambda_k}{q_{k+1,0}^2} \begin{vmatrix} q_{k,0} & 0 \\ q_{k,1} & q_{k+1,0} \end{vmatrix} (-c_0 q_{k,0}),$$

e quindi appunto l'uguaglianza (40) che ci restava da stabilire.

7. – Dimostrazione del teorema fondamentale.

Denotando ora con n un qualsiasi intero ≥ 2, un polinomio $f(x)$ di grado n a coefficienti reali, dato dalla (1), può anche venire scritto sotto la forma (16) ove si facciano le convenzioni espresse dalla (17). Introduciamo allora $f_1(x)$ con la (3), ossia mediante la (18) ove le c_i siano fornite dalle (2) per tutti i valori di i (≥ 0). Definite quindi le a_i, c_i anche per $i < 0$ con le (19) e le b con le (2), si constata subito che fra le D, q, date dalle (5), (20), intercedono le relazioni

$$q_{k+1,0} = \frac{c_0}{n^k} D_k \qquad (k = 1, 2, \cdots, n-1), \tag{43}$$

talché la $D_1 D_2 \cdots D_{n-1} \neq 0$ equivale alla validità della (21) per $k = 1, 2, \cdots \cdots, n-1$.

Facciamo dunque quest'ipotesi, e definiamo $g_{k+1}(x)$, $f_{k+1}(x)$ come nei §§ 5, 6 (ove $s = n-2$), sicché questi risultano dei polinomi di grado $n-k-1$ nella x a coefficienti reali ($k = 1, 2, \cdots, n-1$). Più precisamente, in virtù delle (3), (34), i polinomi

$$f(x) \quad , \quad f_1(x) \quad , \quad f_2(x) \quad , \quad \cdots \quad , \quad f_n(x) \tag{44}$$

vengono ora a costituire la successione di Sturm relativa ad $f(x)$; inoltre, in forza delle (1), (2), (3), (30), (39), (31), (43) e tenuto conto della positività delle λ, i coefficienti direttivi dei polinomi (44) hanno ordinatamente gli stessi segni delle quantità

$$c_0 \quad , \quad c_0 \quad , \quad c_0 D_1 \quad , \quad \cdots \quad , \quad c_0 D_{n-1}. \tag{45}$$

Pertanto i segni di queste ultime coincidono ordinatamente con quelli assunti dai polinomi (44) per x reale positivo e sufficientemente grande; mentre invece, per x reale negativo e sufficientemente grande in valore assoluto, i segni dei suddetti polinomi sono rispettivamente quelli di

$$(-1)^n c_0 \quad , \quad (-1)^{n-1} c_0 \quad , \quad (-1)^{n-2} c_0 D_1 \quad , \quad \cdots \quad , \quad c_0 D_{n-1}. \tag{46}$$

Osserviamo ora che, detto v il numero delle variazioni di segno nella successione (6), le (45), (46) vengono a presentare rispettivamente v ed $n - v$ variazioni di segno. A norma di un classico criterio di J. Ch. F. Sturm, la differenza $n - 2v$ fra il secondo ed il primo dei due ultimi interi viene ad esprimere quante sono le radici (reali) distinte di $f(x)$ che cadono nell'intervallo fra i due suddetti valori di x; tale differenza uguaglia il numero n, complessivo delle radici reali distinte di $f(x)$ in tutto l'intervallo da $-\infty$ a $+\infty$, come si vede assumendo quegli x convenientemente grandi in valore assoluto; e ciò dimostra il teorema 1 (enunciato nella Nota I, § 1).

Meccanica. — *Teoria lineare della parete sottile e applicazioni.* Nota [*] del Corrisp. PLACIDO CICALA.

1. In una Nota precedente [1] si è impostata la teoria elastica della parete sottile su basi generali, senza postulare proprietà, come quella della conservazione delle normali, che possono farsi discendere, in definitiva, dalla trattazione medesima. Della teoria si dà qui una formulazione più completa e generale, e l'applicazione a problemi nuovi.

Dal sistema differenziale scritto in forma implicita si desumono i caratteri fondamentali delle varie classi di soluzioni e, per ciascuna, la graduatoria delle incognite secondo il loro *ordine di grandezza*, essendo questo definito in base al comportamento per $s \to O$, se s è lo spessore di parete. Determinati questi elementi, dalle espressioni generali si esplicitano tante equazioni con tanti termini quanti occorrono e bastano in un determinato ordine di precisione. Si trae così dal livellamento coerente delle approssimazioni il massimo vantaggio di semplificazioni.

Il procedimento è qui applicato alla ricerca di certe soluzioni che rappresentano perturbazioni smorzantisi ad una distanza dalla loro origine che, per $s \to O$, si annulla come $\sqrt{s}$. Di queste soluzioni, già in parte note, si dà una deduzione generale che permette di spingere la loro determinazione al grado di precisione che si desideri. Vengono quindi considerati casi eccezionali, per i quali quelle soluzioni cadono in difetto: per certe superfici rigate, di uso frequente nelle costruzioni in cemento armato, si giunge ad alcuni risultati nuovi; si trova che la fascia influenzata da queste perturbazioni è qui più ampia, decrescendo la sua larghezza per $s \to O$, come $\sqrt[4]{s}$ o come $\sqrt[3]{s}$, a seconda che sia o meno nulla la curvatura di Gauss.

2. *Notazioni.* – Sia $\bar{\boldsymbol{x}}_M$ la coordinata vettoriale del punto M della superficie media, sulla quale si stabiliscono a piacere le coordinate ξ_a, ξ_b. Sia $\boldsymbol{n}$ il versore della normale in M alla superficie; il vettore $\boldsymbol{x}_P = \bar{\boldsymbol{x}} + \zeta \boldsymbol{n}$ rappresenta il punto P, interno alla parete se $-s/2 < \zeta < s/2$. Il corpo è così riferito alle coordinate ξ_a, ξ_b, ζ. Si indicano con $f^\bullet$, f', f° le derivate $\partial f/\partial \xi_a$, $\partial f/\partial \xi_b$, $\partial f/\partial \zeta$ e si pone

$$(1) \qquad \boldsymbol{h}_a = \bar{\boldsymbol{x}}^\bullet , \quad \boldsymbol{h}_b = \bar{\boldsymbol{x}}' , \quad \boldsymbol{k}_a = \boldsymbol{h}_a + \zeta \boldsymbol{n}^\bullet , \quad \boldsymbol{k}_b = \boldsymbol{h}_b + \zeta \boldsymbol{n}' .$$

(*) Presentata nella seduta del 19 novembre 1960.

(1) P. CICALA, *Sulla teoria elastica della parete sottile*, «Giornale del Genio Civile», pp. 238–256, pp. 429–449, pp. 714–723 (1959); altre parti sono in pubblicazione. Si rinvia a questo lavoro per indicazioni bibliografiche.

Si indicano con h_a , h_b , k_a , k_b i moduli dei vettori omonimi, con h_{ab} , k_{ab} i prodotti scalari $\boldsymbol{h}_a \times \boldsymbol{h}_b$, $\boldsymbol{k}_a \times \boldsymbol{k}_b$ e con m_{ab} , n_{ab} i moduli dei prodotti vettoriali $\boldsymbol{h}_a \wedge \boldsymbol{h}_b$, $\boldsymbol{k}_a \wedge \boldsymbol{k}_b$. Lo spostamento del punto P viene indicato con

$$\boldsymbol{u} = u_a \boldsymbol{k}_a + u_b \boldsymbol{k}_b + u_c \boldsymbol{n} = \boldsymbol{v} + u_c \boldsymbol{n}. \tag{2}$$

Sezionato il corpo con la superficie di equazione $\xi_a = \xi_{a\mathrm{P}}$, sulla faccia che delimita la regione $\xi_a < \xi_{a\mathrm{P}}$ si indica con $(s_a \boldsymbol{k}_a + s_{ab} \boldsymbol{k}_b + s_{ac} \boldsymbol{n})\, d\xi_b\, d\zeta$ la forza sull'area che corrisponde agli incrementi $d\xi_b$, $d\zeta$ delle coordinate; analogamente si definiscono le forze interne $(s_{ab} \boldsymbol{k}_a + s_b \boldsymbol{k}_b + s_{bc} \boldsymbol{n})\, d\xi_a\, d\zeta$ e $(s_{ac} \boldsymbol{k}_a + s_{bc} \boldsymbol{k}_b + s_c \boldsymbol{n})\, d\xi_a\, d\xi_b$ sulle aree elementari delle sezioni $\xi_b = \xi_{b\mathrm{P}}$ e $\zeta = \zeta_{\mathrm{P}}$. Si indica con $\boldsymbol{f}\, d\xi_a\, d\xi_b\, d\zeta$ la forza esterna agente sull'elemento di volume corrispondente agli incrementi $d\xi_a$, $d\xi_b$, $d\zeta$, delle coordinate.

3. *Equazioni generali.* – Ammesso che il corpo sia costituito da materiale elastico isotropo, con modulo normale E, tangenziale G e coefficiente di Poisson ν, fra tensioni e deformazioni sussistono le relazioni:

$$k_a^4 s_a + (k_{ab}^2 - \nu n_{ab}^2)\, s_b + 2 k_a^2 k_{ab} s_{ab} - \nu k_a^2 s_c = \mathrm{E} n_{ab} \boldsymbol{k}_a \times (\boldsymbol{v}^{\bullet} + u_c \boldsymbol{n}^{\bullet}) \tag{3}$$

$$k_b^4 s_b + (k_{ab}^2 - \nu n_{ab}^2)\, s_a + 2 k_b^2 k_{ab} s_{ab} - \nu k_b^2 s_c = \mathrm{E} n_{ab} \boldsymbol{k}_b \times (\boldsymbol{v}' + u_c \boldsymbol{n}') \tag{4}$$

$$\begin{aligned} 2\,[2 k_a^2 k_b^2 - (1 - \nu)\, n_{ab}^2]\, s_{ab} + 2\,(k_a^2 s_a + k_b^2 s_b - \nu s_c)\, k_{ab} = \\ = \mathrm{E} n_{ab}\, [\boldsymbol{k}_b \times (\boldsymbol{v}^{\bullet} + u_c \boldsymbol{n}^{\bullet}) + \boldsymbol{k}_a \times (\boldsymbol{v}' + u_c \boldsymbol{n}')] \end{aligned} \tag{5}$$

$$s_c - \nu\,(k_a^2 s_a + k_b^2 s_b + 2 k_{ab} s_{ab}) = \mathrm{E} n_{ab} u_c^{\circ} \tag{6}$$

$$k_a^2 s_{ac} + k_{ab} s_{bc} = \mathrm{G} n_{ab}\, (\boldsymbol{k}_a \times \boldsymbol{v}^{\circ} - \boldsymbol{n}^{\bullet} \times \boldsymbol{v} + u_c^{\bullet}) \tag{7}$$

$$k_{ab} s_{ac} + k_b^2 s_{bc} = \mathrm{G} n_{ab}\, (\boldsymbol{k}_b \times \boldsymbol{v}^{\circ} - \boldsymbol{n}' \times \boldsymbol{v} + u_c')\,. \tag{8}$$

A rappresentare le variabili v, siano esse componenti di spostamento o componenti di tensione, si adottano gli sviluppi

$$v = \Sigma\, v_j\, \zeta_j \qquad (j = 0\,,\, 1\,,\, \cdots) \tag{9}$$

essendo ζ_j i polinomi di Legendre di argomento $2\zeta/s$ (ad esenpio: $\zeta_1 = 2\zeta/s$). Analogamente si scrive

$$\boldsymbol{f} = \Sigma\, \boldsymbol{f}_j\, \zeta_j\,. \tag{10}$$

Si moltiplichi ciascuna delle equazioni (3)–(8) per $\zeta_j\, d\zeta$ e la si integri da $-s/2$ a $s/2$ dopo di avervi sostituito gli sviluppi (9). Il termine generico delle equazioni originarie è del tipo $\mathrm{A}\zeta^n v$, essendo n intero (≤ 4) ed essendo A un fattore che non contiene ζ. Il suo trasformato, che si indica con $(\mathrm{A}\zeta^n v)_j$ è fornito dalle sostituzioni seguenti:

$$(\mathrm{A}\zeta^n v)_j = \frac{sj}{4j-2}\,(\mathrm{A}\zeta^{n-1} v)_{j-1} + \frac{s\,(j+1)}{4j+6}\,(\mathrm{A}\zeta^{n-1} v)_{j+1} \tag{11}$$

$$(\mathrm{A}v)_j = \mathrm{A} s v_j \tag{12}$$

$$(\mathrm{A}v^{\bullet})_j = \mathrm{A}\,(s v_j^{\bullet} - j s^{\bullet} v_j) - \frac{s^{\bullet}}{2}\,(\mathrm{A}v^{\circ})_{j+1} \tag{13}$$

$$(\mathrm{A}v^{\circ})_j = \mathrm{A}\,(4j+2)\,(v_{j+1} + v_{j+3} + \cdots)\,. \tag{14}$$

La formula ricorrente (11) vale per le variabili v come per derivate $v^{\bullet}$, v' e v°; quando n si riduce a zero, subentrano le (12)–(14); la (13) sussiste per v' come per $v^{\bullet}$. Così dalle (3)–(8) si ottengono sei equazioni per ciascun valore di j. Inoltre vigono le equazioni di equilibrio, tre per ciascun indice j, conglobate nella relazione simbolica vettoriale:

$$(15) \qquad (s_a \boldsymbol{k}_a + s_{ab} \boldsymbol{k}_b + s_{ac} \boldsymbol{n})_j^{\bullet} + (s_{ab} \boldsymbol{k}_a + s_b \boldsymbol{k}_b + s_{bc} \boldsymbol{n})_j' + \\ + \boldsymbol{f}_j = \frac{4j+2}{s} \Sigma (s_{ac} \boldsymbol{k}_a + s_{bc} \boldsymbol{k}_b + s_c \boldsymbol{n})_i$$

essendo $i = j-1, j-3, \cdots$, fino a 1 se j è pari o fino a zero se dispari; per $j = 0$ manca il termine a secondo membro. Le formule di trasformazione sono qua

$$(16) \qquad (Av)_j^{\bullet} = A^{\bullet} s v_j + A s v_j^{\bullet} + A s^{\bullet} [(j+1) v_j + (2j+1)(v_{j-2} + v_{j-4} + \cdots)]$$

e una analoga per le derivate rispetto a ξ_b; l'ultimo addendo nell'ultima parentesi è v_0 o v_1 a seconda che j sia pari o dispari. Per i termini $(A\zeta^n v)_j^{\bullet}$, $(A\zeta^n v)_j'$ vale una formula ricorrente analoga alla (11).

4. *Classificazione delle soluzioni omogenee.* – Si consideri il sistema differenziale omogeneo nelle incognite v che, mediante le (11)–(14) e (16), si ricava dalle (3)–(8) e (15) ponendo $\boldsymbol{f} = 0$. Si supporrà costante lo spessore s. Mediante eliminazione, il sistema si riduce ad un'equazione in una variabile, per precisare $u_{c0} = w$, che si può scrivere

$$(17) \qquad \Sigma s^h C_{hkl} (\partial/\partial\xi_a)^k (\partial/\partial\xi_b)^l w = 0$$

essendo h gli interi pari e C funzioni date di ξ_a e ξ_b. Si indica con $[ws^n]$ una quantità i cui valori assoluti massimi sono dell'ordine di quelli del prodotto $w\,(s/L)^n$ quando s tenda a zero, ferme restando le altre dimensioni della struttura, fra cui la lunghezza L. Per la parete di spessore evanescente si considerino le soluzioni pe le quali è $w' = [w]$; fra queste, si diranno soluzioni di classe m quelle per le quali è $w^{\bullet} = [ws^{-m}]$. Segnato nel piano della fig. 1 per ogni termine della (17) un punto si ascissa k e ordinata h, si tracci la spezzata convessa che contorna la regione (aperta) dove cadono i punti rappresentativi. Nel caso generale tale spezzata è la OABC. Il lato OA, che va dall'ascissa $k = 0$ a $k = 4$, indica le soluzioni di classe O, definite da un'equazione differenziale del IV ordine in ξ_a che, scindendosi, dà luogo alle note teorie membranale e inestensionale. Il lato AB, di pendenza 1/2 e proiezione orizzontale 4, indica l'esistenza di soluzioni di classe 1/2, rette da un'equazione del IV ordine. Il lato successivo indefinito rivela l'esistenza delle soluzioni di classe 1.

In base alle proprietà constatate, per ciascuna classe di soluzioni omogenee, prima ancora di procedere al calcolo esplicito dei fattori C, si deducono dall'esame delle equazioni generali gli esponenti n occorrenti per le relazioni

$$(18) \qquad v = [ws^n]$$

che definiscono gli ordini di grandezza delle variabili. Per le soluzioni di classe < 1 l'esponente n aumenta al crescere dell'indice j degli sviluppi (9) oltre un certo valore. Quindi, in base alla graduatoria (18) delle v, si può desumere, per un prefissato errore relativo $[s^{\epsilon}]$ nei risultati, quali equazioni siano da ricavare dalle relazioni generali e quali termini siano da includervi. Invece per le soluzioni di classe 1 fa difetto la proprietà di asintotica conver-

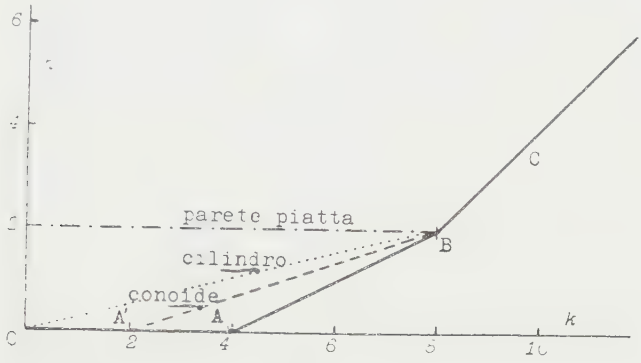


Fig. 1.

genza. Queste soluzioni sfuggono all'esame dell'ordinaria teoria fondata sull'ipotesi di conservazione delle normali. Per le applicazioni tecniche per le quali quella teoria si ritiene sufficientemente precisa, si potrà prescindere dalle soluzioni di classe 1 ed accettare quell'ordine di errore che tale omissione implica.

5. *Le condizioni al contorno.* – Per ottenere la soluzione generale del sistema differenziale combinando le soluzioni omogenee con una particolare che fa equilibrio ai carichi $\boldsymbol{f}$, i coefficienti della combinazione possono dedursi dalle equazioni

$$(19) \qquad \sum_r A_r \int \boldsymbol{u}_r \times \boldsymbol{s}_s \, d\mathrm{S} = \int \boldsymbol{u}_s \times (\boldsymbol{s}_e - \boldsymbol{s}_0) \, d\mathrm{S} = \int (\boldsymbol{u}_e - \boldsymbol{u}_0) \times \boldsymbol{s}_s \, d\mathrm{S}$$

indicandosi con $\boldsymbol{s}d\mathrm{S}$ la forza sull'elemento $d\mathrm{S}$ della superficie marginale alla quale si estendono gli integrali; questa si suppone che appartenga alla rigata delle normali alla superficie media lungo una data linea. Inoltre, $\boldsymbol{s}_0$, $\boldsymbol{u}_0$ sono gli sforzi e gli spostamenti relativi alla soluzione particolare, $\boldsymbol{s}_r$, $\boldsymbol{u}_r$, come $\boldsymbol{s}_s$, $\boldsymbol{u}_s$ sono relativi ad una soluzione omogenea, $\boldsymbol{s}_e$, $\boldsymbol{u}_e$ sono gli sforzi e gli spostamenti eventualmente imposti al contorno. Si scriverà la (19) assumendo per $\boldsymbol{s}_s$, $\boldsymbol{u}_s$ ciascuna delle soluzioni $\boldsymbol{s}_r$, $\boldsymbol{u}_r$ che compongono la sommatoria a primo membro; i termini noti saranno le espressioni del II o del III membro se sono date le tensioni o gli spostamenti al contorno; nel caso più generale saranno da combinare le tre eguaglianze con le condizioni imposte.

La forma (19) delle condizioni al contorno presenta il sostanziale vantaggio di mettere in relazione le possibilità relative alla prescrizione dei valori al

contorno con le approssimazioni adottate nella determinazione delle soluzioni. Si supponga, ad esempio, che il contorno sia definito da una linea $\xi_a =$ costante, chiusa, che nell'area interna le linee $\xi_b =$ costante concorrano in un polo e che, stabilita ξ_b in modo che la coordinata vada da zero a 2π quando si percorre il contorno, il sistema differenziale sia soddisfatto da soluzioni

$$v = v^* (\xi_a)^{\sin}_{\cos} m\xi_b \tag{20}$$

con m intero. Questo caso si verifica per la calotta ricavata da una qualsiasi parete di rotazione. Qui, nella classe O, si ha una soluzione membranale e una inestensionale (una essendo esclusa dalla condizione singolare per il polo), i cui coefficienti si indicano con A_1, A_2. Inoltre si hanno due soluzioni di classe 1/2, di coefficienti A_3, A_4 e le soluzioni di classe 1, con indici $r > 4$. Le soluzioni omogenee siano normalizzate in modo che le tensioni massime siano per tutte dello stesso ordine. Ordinati gli indici s come r, sia K_{11} il generico coefficiente di A_1, A_2 e K_{12} quello di A_3, A_4 nelle prime due equazioni; sia K_{21} il coefficiente di A_1, A_2 e K_{22} quello di A_3, A_4 nelle due successive. Si trova che, rispetto a K_{11}, i coefficienti K_{12}, K_{21}, K_{22} sono di ordine $[s^{1/2}]$, mentre i rimanenti sono di ordine $[s]$. Ne segue che, qualora si trascurino, come sempre si fa, le soluzioni di classe 1, errori relativi $[s]$ sono inevitabili nei risultati finali, qualunque sia la precisione con cui si sono determinate le prime 4 soluzioni. Tale constatazione è importante, se si vogliono adottare criteri coerenti di approssimazione.

6. *Le soluzioni omogenee di classe 1/2.* – Le equazioni generali saranno applicate alla ricerca di prima approssimazione delle soluzioni omogenee per le quali è $w^\bullet = [ws^{-1/2}]$, $w' = [w]$. Per gli esponenti n della (18) si ottengono i valori riportati nella Tabella I, per $j = 0 \div 4$; per rendere più evidente la legge che governa la successione dei valori n, i pochi che ne scartano sono segnati come somma di due addendi, il primo conforme alla norma.

Si adotta il riferimento cartesiano, con versori $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ ortogonali:

$$\bar{\boldsymbol{x}} = \xi_a \boldsymbol{i} + \xi_b \boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}. \tag{21}$$

Si esamineranno quindi le perturbazioni che si propagano dalla sezione piana $\xi_a = 0$. Si ottengono le equazioni:

$$u_{a1} = -\, sh_b^2 w^\bullet / 2\, m_{ab}^2 \quad , \quad u_{b1} = sh_{ab} w^\bullet / 2\, m_{ab}^2 \tag{22}$$

$$s_{a1} = -\, \mathrm{E}\, sh_b^4 w^{\bullet\bullet} / 2\,(1 - \nu^2)\, m_{ab}^3 \quad , \quad s_{ac0} = s s_{a1}^\bullet / 6 \tag{23}$$

$$s_{ac0}^\bullet = -\, s_{b0} z'' / m_{ab} \quad , \quad s_{b0} = -\, \mathrm{E} z'' w / h_b^4 . \tag{24}$$

Le (22) sono ottenute dalle (7), (8) con $j = 0$; con queste, dalle (3)–(5) con $j = 1$ si ha la prima delle (23); la seconda è ottenuta dalla (15) per $j = 1$, proiettando sul vettore $\boldsymbol{h}_b \wedge \boldsymbol{n}$; le (24) si ricavano dalla (15) per $j = 0$, proiettando su $\boldsymbol{n}$ e dalla (4) per $j = 0$. Si ottiene quindi l'equazione risultante

$$\frac{\partial^4 w}{\partial \xi_a^4} + \frac{12\,(1 - \nu^2)\, z''^2\, m_{ab}^2}{s^2 h_b^8} w = 0. \tag{25}$$

TABELLA I.

j	u_a , u_b	u_c	s_a	s_b	s_{ab}	s_c	s_{ac} , s_{bc}
			soluzioni omogenee di classe 1/2				
0	0,5	0	$0 + 0{,}5$	0	$0 + 0{,}5$	$0 + 1$	$-0{,}5 + 1$
1	0,5	1	0	0	0	$0 + 1$	$0{,}5 + 1$
2	1,5	1	1	1	1	1	0,5
3	1,5	2	1	1	1	1	1,5
4	2,5	2	2	2	2	2	1,5
			soluzioni omogenee di classe 1/3				
0	1/3	0	$0 + 3/3$	$0 + 1/3$	$0 + 2/3$	$0 + 4/3$	$-1/3 + 4/3$
1	2/3	$3/3 + 1/3$	1/2	1/3	1/3	$1/3 + 4/3$	$2/3 + 4/3$
2	5/3	4/3	4/3	4/3	4/3	4/3	3/3
3	6/3	7/3	5/3	5/3	5/3	5/3	6/3
4	9/3	8/3	8/3	8/3	8/3	8/3	7/3
			soluzioni omogenee per la parete piatta				
0	$0 + 1$	0	$0 + 1$	$0 + 1$	$0 + 1$	$0 + 2$	$0 + 2$
1	1	$1 + 1$	1	1	1	$1 + 2$	$1 + 2$
2	2	2	2	2	2	2	2
...	...	...	...	...	...	...	...

Nella scrittura delle (22)–(25) si è per brevità omessa l'indicazione dei termini trascurati, che in tutte sono di ordine $[s^{1/2}]$ rispetto a quelli segnati. Nell'ordine di approssimazione adottato, il coefficiente di w nella (25) si deve considerare come indipendente da ξ_a. Per la validità della soluzione indicata occorre che questo coeefficiente sia grande come s^{-2}. Si dovranno pertanto considerare a parte i casi in cui ciò non accada.

7. *Casi eccezionali.* – Se le linee $\xi_a =$ costante della superficie media sono rette ($z'' \equiv 0$), la soluzione individuata dalla (25) cade in difetto. La spezzata della fig. 1 è rappresentata in questo caso dalla OA'BC. Al lato OA' corrispondono le soluzioni di classe O, costituite dalla membranale e dalla inestensionale, rette rispettivamente dalle equazioni

$$2\, s^{\bullet}_{a0}\, z^{\bullet\prime} = (s_{a0}\, z^{\bullet\bullet})' \quad , \quad 2\, \beta^{\bullet}\, z^{\bullet\prime} = \beta'\, z^{\bullet\bullet} \tag{26}$$

con $\beta = \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{u}'$. Inoltre esistono soluzioni di classe 1/3, rivelate dal lato A'B. La relativa graduatoria delle variabili v è stabilita dai valori dell'esponente n segnati nella seconda parte della Tabella I, che mostra evidente l'intera successione. Alle equazioni (22)–(23) che sussistono invariate, vanno associate le seguenti:

$$(27) \quad s^{\cdot}_{ao} = -2\, s_{abo}\, z^{\cdot\prime}/m_{ab} \quad , \quad s^{\cdot}_{abo} = -s'_{bo} \quad , \quad h_b^4\, s^{\cdot}_{bo} = 2\, \mathrm{E} z^{\cdot\prime}\, m_{ab}\, (w/m_{ab})'.$$

Di queste, la prima e la seconda si ricavano dalla (15) con $j = 0$, per proiezione su $\boldsymbol{n}$ e su $\boldsymbol{j}$, la terza dalle (3)–(5) con $j = 0$.

Si ottiene quindi l'equazione risultante:

$$(28) \quad \frac{\partial^6 w}{\partial \xi_a^6} + \frac{48\,(1-\nu^2)\, z^{\cdot\prime 2}}{s^2\, h_b^8}\, m_{ab}^2\, \frac{\partial}{\partial \xi_b}\left[m_{ab}\, \frac{\partial}{\partial \xi_b}\left(\frac{w}{m_{ab}} \right) \right] = 0.$$

Gli errori relativi, anche qui omessi, sono di ordine $[s^{1/3}]$ per tutte le equazioni, comprese le (22)–(23).

La soluzione cade di nuovo in difetto se è $z^{\cdot\prime} \equiv 0$. La parete è allora cilindrica e la relativa spezzata nella fig. 1 è la OBC. Il lato OB indica le soluzioni di classe 1/4, tabulate in vari trattati, adoperate a rappresentare le perturbazioni aventi origine da una generatrice di orlo. Fissato $\boldsymbol{j}$ in modo che sia $z' = 0$, si ha in prima approssimazione l'equazione risultante

$$(29) \quad \frac{\partial^8 w}{\partial \xi_a^8} + \frac{12\,(1-\nu^2)\, z^{\prime\prime 2}\, h_a^2}{s^2}\, \frac{\partial^4 w}{\partial \xi_b^4} = 0.$$

La trattazione che conduce alla (25) e la relativa graduatoria delle incognite vanno modificate se le distanze z di punti della superficie media dal piano di base sono da considerare come quantità piccole e quindi da collegare in qualche modo a s nella tendenza al limite. In particolare può porsi $z = [s]$; in tal caso si arriva alla graduatoria stabilita dagli esponenti indicati nella terza parte della Tabella I. La formulazione che così si ottiene è quella della teoria della « parete piatta » (detta, nelle trattazioni in inglese *shallow shell*, in russo *pologij oboločka*, in tedesco *flache Schale*).

Idrodinamica. — *Sopra le onde di traslazione nei canali.* – A) *La equazione linearizzata.* Nota I (*) del Corrisp. GIULIO SUPINO.

1. Le onde di traslazione nei canali sono studiate, di solito, partendo dalle equazioni dell'idraulica relative al moto variabile col tempo. Con i simboli usuali (1) le due equazioni si possono scrivere nella forma

$$1) \quad \begin{cases} i_f - \dfrac{\partial Y}{\partial x} = \dfrac{Q^2}{C^2 \Omega^2 R} + \dfrac{1}{2g} \dfrac{\partial}{\partial x} \left(\dfrac{Q}{\Omega}\right)^2 + \dfrac{1}{g} \dfrac{\partial}{\partial t} \left(\dfrac{Q}{\Omega}\right) \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} + \dfrac{\partial \Omega}{\partial t} = 0 . \end{cases}$$

L'equazione risultante è una equazione non lineare: da questa si deduce facilmente, mediante la teoria delle caratteristiche, che la velocità di propagazione (2) è espressa dalla formula

$$2 \qquad \omega = \frac{Q}{\Omega} \pm \sqrt{g \frac{\Omega}{b}}$$

essendo b la larghezza del pelo libero (variabile, come Ω, con l'ascissa e col tempo). Nel caso di alveo rettangolare molto largo e di oscillazioni ondose su un moto base uniforme si può scrivere più semplicemente al posto della (2) la relazione

$$(2') \qquad \omega = U_0 \pm \sqrt{g Y_0}$$

essendo U_0 e Y_0 la velocità e profondità nel moto considerato.

La utilizzazione delle (1) nella loro forma non lineare non è stata proseguita più oltre e perciò mentre molti Autori hanno tentato di sfruttare con differenti procedimenti la cognizione acquisita, altri Autori (in particolare Puppini, Bonvicini, Massé) hanno cercato di semplificare e linearizzare le (1) riconducendole a forma facilmente integrabile almeno per oscillazioni periodiche.

Nella presente Nota, pur giungendo alla equazione linearizzata degli Autori ricordati, si sviluppa un procedimento particolarmente semplice per ottenere limitazioni e approssimazioni relativamente alla attenuazione dell'onda ed alla velocità di propagazione. A proposito della quale rileveremo la notevole differenza tra il valore ottenuto con la (2') e quello che si ricava dalla considerazione di moti periodici nei quali, tra l'altro, la velocità di propagazione dipende in modo notevole dal periodo.

(*) Presentata nella seduta del 19 novembre 1960.

(1) È i_f pendenza di fondo, Y profondità dell'acqua nella generica sezione di area bagnata Ω dove al tempo t passa la portata Q. Inoltre C è il coefficiente di Chézy e R il raggio medio. La ascissa x è positiva nel senso della corrente.

(2) Si veda PH. DEYMIÉ, *Propagation d'une intumescence allongée*, « Révue Générale de l'Hydraulique », n. 3, p. 138 (maggio-giugno 1935) (propagazione in alveo rettangolare molto largo) e G. SUPINO, *Propagazione di piccole onde su moto base permanente*, « L'Energia Elettrica », 1953 (n. 6) (propagazione in alveo generico).

I risultati ottenuti saranno applicati successivamente allo studio del caso non lineare.

2. Riferiamoci ad un moto uniforme caratterizzato dai valori q_0 delle portate e Y_0 delle profondità. Consideriamo un alveo rettangolare molto largo, ed in esso piccole onde di traslazione a carattere periodico. Sarà $R = Y$ e, per unità di larghezza, $Q = UY$, $\Omega = Y$. Poniamo nelle (1) $Q = q_0 + q$, $Y = Y_0 + y$ e ricordando che q_0, Y_0 sono costanti e che $i_f = \frac{q_0^2}{C^2 Y_0^3}$ scriviamo al posto della prima delle (1) (trascurando i termini in q^2, y^2 e le loro derivate)

$$\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{2 q_0 q}{C^2 Y_0^3} - \frac{3 q_0^2 y}{C^2 Y_0^4} + \frac{q_0}{g Y_0^2}\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{q_0^2}{g Y_0^3}\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{q_0^2}{g Y_0^2}\frac{\partial y}{\partial t} - \frac{1}{g Y_0}\frac{\partial q}{\partial t} = 0$$

e al posto della seconda

$$\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t} = 0 .$$

Da questa risulta che si può scrivere

$$q = -\frac{\partial \varphi}{\partial t} \qquad y = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \tag{3}$$

e pertanto, posto $F = \frac{q_0^2}{g Y_0^3}$ (numero di Froude) ci si riconduce subito ad una sola equazione lineare del secondo ordine che ha la forma

$$(1 - F)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{2 q_0}{g Y_0^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial t} - \frac{1}{g Y_0}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{3 i_f}{Y_0}\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{2 i_f}{q_0}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \tag{4}$$

avendo scritto

$$\frac{i_f}{Y_0} = \frac{q_0^2}{C^2 Y_0^4} \quad , \quad \frac{q_0}{C^2 Y_0^3} = \frac{i_f}{q_0} .$$

Derivando la (4) rispetto a t si ottiene una equazione identica ad essa, nella incognita q, eseguendo invece la derivazione rispetto ad x si ottiene ancora la stessa equazione nella incognita y. Pertanto i risultati che otterremo nella φ sono senz'altro trasferibili alla q e alla y. La scelta dell'incognita dipende ovviamente dalle condizioni ai limiti.

Poniamo:

$$\varphi = \frac{A}{2} e^{\lambda x} \operatorname{sen} \nu \left(t - \frac{x}{\omega}\right);$$

si verifica subito che con questa posizione la (4) è soddisfatta se è contemporaneamente:

$$\begin{cases} (1 - F)\left(\lambda^2 - \frac{\nu^2}{\omega^2}\right) - \frac{2 q_0}{g Y_0^2}\frac{\nu^2}{\omega} + \frac{\nu^2}{g Y_0} - \frac{3 i_f \lambda}{Y_0} = 0 \\ (1 - F)\frac{2 \lambda \nu}{\omega} + \frac{2 q_0}{g Y_0^2}\lambda \nu - \frac{3 i_f \nu}{Y_0 \omega} + \frac{2 i_f \nu}{q_0} = 0 . \end{cases} \tag{5}$$

Dalla seconda di queste relazioni si ricava con qualche piccola trasformazione

$$\omega = \frac{3\,i_f - 2\,(1-F)\,Y_0\,\lambda}{2\,(i_f + F\,Y_0\,\lambda)}\,U_0 \tag{6}$$

sicché introducendo ω nella prima delle (5) e semplificando si trova

$$\lambda^4 - \frac{6\,i_f}{(1-F)\,Y_0}\lambda^3 + \frac{1}{(1-F)^2 Y_0^2}\left(\frac{45}{4}\,i_f + \frac{\nu^2 Y_0}{g}\right)\lambda^2 -$$

$$- \frac{3\,i_f}{(1-F)^3 Y_0^2}\left(\frac{\nu^2}{g} + \frac{9\,i_f^2}{4\,Y_0}\right)\lambda - \frac{1}{(1-F)^3}\left(\frac{\nu i_f}{q_0}\right)^2\left(1 - \frac{F}{4}\right) = 0\,.$$

I valori di λ possono essere determinati senza difficoltà in base alla osservazione che, posto

$$\lambda = X + \frac{3\,i_f}{2\,(1-F)\,Y_0}\,, \tag{7}$$

la equazione precedente si riduce ad una biquadratica; da questa si ricava

$$X^2 = \frac{9\,i_f^2 - \frac{4\,Y_0\,\nu^2}{g}}{8\,(1-F)^2\,Y_0^2} \pm R$$

essendo

$$R^2 = S^2 + \frac{1}{(1-F)^3}\left(\frac{\nu i_f}{q_0}\right)^2\left(1 - \frac{F}{4}\right)$$

con

$$S = \frac{9\,i_f^2 + \frac{4\,Y_0\,\nu^2}{g}}{8\,(1-F)^2\,Y_0^2}\,.$$

Si osserverà che nella espressione di X^2 occorre scegliere per R il segno positivo, altrimenti X diviene immaginario. Fatta questa scelta e fissato X^2 restano due valori (per X e quindi due valori) per λ [in base alla (7)]. A ciascun λ corrisponde un ω e quindi fissato $\nu\left(=\frac{2\,\Pi}{T}\right)$ si ottengono due soluzioni per φ.

Vogliamo anche aggiungere le seguenti osservazioni:

1° Per $F < 1$ si ricava subito dalla espressione di R che è $|X| > \frac{3\,i_f}{2\,(1-F)\,Y_0}$ e pertanto alla X positiva corrisponde un $\lambda > 0$ e alla $X < 0$ un $\lambda < 0$. Quando sia $\lambda > 0$ si trova subito $\omega < 0$ e perciò le onde si propagano verso le X negative e si attenuano come $e^{\lambda x}$ (onde ascendenti). Per $\lambda < 0$ è $\omega > 0$ e si hanno perciò onde discendenti (con $x > 0$) che pure si attenuano.

2° Per $1 < F < 4$ si ricava subito che, essendo

$$-\frac{1}{(1-F)^3}\left(\frac{\nu i_f}{q_0}\right)^2\left(1 - \frac{F}{4}\right) < 0\,, \quad \text{è} \quad |X| < \frac{3\,i_f}{2\,(F-1)\,Y_0}$$

e perciò dalla (7) si deduce che i due tipi di onde discendono insieme (e per tutti e due è $\lambda < 0$).

3° Per $F > 4$ il prodotto $\frac{1}{(1-F)^3}\left(1-\frac{F}{4}\right)$ è di nuovo positivo, pertanto è di nuovo $|X| > \frac{3\,i_f}{2(F-1)\,Y_o}$ e quindi dalla (7) si deduce che in corrispondenza di $X > 0$ diviene $\lambda > 0$. Poiché è anche $\omega > 0$ così queste onde procedono verso le x positive esaltandosi. Il fenomeno all'inizio non ha nulla di eccezionale. Si può benissimo pensare ad onde molto piccole nella sezione origine e che successivamente vadano esaltandosi in altezza, ma, dopo un primo tratto, nel quale ciò accade, dovrebbero prevalere le resistenze e le onde dovrebbero attenuarsi. L'imperfezione della soluzione sta dunque nel fatto che le onde non mostrano, successivamente, nessuna attenuazione.

Ma il fatto si spiega riflettendo al carattere della equazione idraulica del moto ed in particolare della equazione linearizzata. Essa presuppone una velocità eguale in tutti i filetti liquidi ed una componente verticale trascurabile, mentre le onde periodiche, esaltandosi, raggiungono ampiezze tali che le ipotesi poste a base della equazione idraulica non sono più verificate. Ha rilevato infatti il dott. Pezzoli [3] che l'equazione idraulica è atta a rappresentare con un errore limitato le perturbazioni ondose finché, detta A l'ampiezza dell'onda, L la sua lunghezza e indicato con ε un numero molto minore di 1, sia

$$\frac{y_o}{L} \approx \varepsilon \qquad \frac{A}{y_o} < 1$$

e quindi $\frac{A}{L} < \varepsilon$.

Per avere un errore inferiore al 5 % occorre che sia $\varepsilon < 0{,}06$.

Ora per quanto si parta da valori piccoli di A se A cresce con x (perché è $\lambda > 0$) mentre L resta costante (perché l'onda è periodica ed è $L = \omega T$) arriveremo certo ad impiezze nelle quali l'equazione dell'idraulica non è più atta a rappresentare il fenomeno.

Vedremo nello studio del caso non lineare che l'esaltazione avviene in modo molto più rapido di quanto non appaia dalla equazione linearizzata.

3. Tutti gli Autori che hanno studiato le onde in base alle equazioni dell'idraulica hanno scritto l'equazione di continuità nella stessa forma della seconda delle (1). Invece l'equazione del moto è stata spesso scritta in forme leggermente diverse.

In particolare, se si ritiene C variabile ($= cY^{1/6}$) si otterrebbe per l'equazione in λ l'espressione

$$\lambda^4 - \frac{20\,i_f}{3(1-F)^3\,Y_o}\lambda^3 + \frac{1}{(1-F)^2\,Y_o^2}\left(\frac{125}{9}\,i_f^2 + \frac{\nu^2\,Y_o}{g}\right)\lambda^2 -$$

$$- \frac{10\,i_f}{3(1-F)^3\,Y_o^2}\left(\frac{\nu^2}{g} + \frac{25\,i_f^2}{9\,Y_o}\right)\lambda - \frac{1}{(1-F)^3}\left(\frac{\nu i_f}{q_o}\right)^2\left(1-\frac{4F}{9}\right) = 0$$

(3) Dott. G. Pezzoli, *Osservazioni sulle perturbazioni nei canali a pelo libero e sopra alcuni aspetti particolari dei moti ondosi*, « L'Energia Elettrica », gennaio 1958.

e si troverebbe al posto della (7)

$$\lambda = X + \frac{5}{3}\frac{i_f}{(1-F)\,Y_0}. \tag{7'}$$

Le onde comincerebbero ad esaltarsi per $F \geq 9/4$.

Altri Autori scrivono la prima delle (1) nella forma

$$i_f - \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{Q^2}{C^2\,\Omega^2\,R} + \frac{\alpha}{2g}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q}{\Omega}\right)^2 + \frac{\beta}{g}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{Q}{\Omega}\right)$$

essendo $\alpha \approx 1{,}11$ e $\beta \approx 1{,}03$ ed allora le onde inizierebbero a crescere di ampiezza per $F > 4{,}6$ (se si considera C costante) oppure per $F > 2{,}6$ (se si considera C variabile) [4].

Ma una tale scrittura (che, come è noto da circa un secolo, ha il vantaggio di ricordare che « la energia cinetica della corrente reale è superiore a quella di una corrente fittizia con una velocità uguale alla velocità media in tutti i punti di una stessa sezione ») presenta modernamente due inconvenienti: il primo è che il valore di α è differente secondo che si deriva l'equazione servendosi del teorema di Bernoulli o del teorema delle quantità di moto (ciò che come ha rilevato il prof. Cocchi [5] dipende dal fatto che si trascurano termini dello stesso ordine di grandezza di altri che si conservano) l'altro è che nei profili di moto permanente occorrerebbe prendere in esame tre differenti profondità critiche [6], tra loro molto vicine, ma non coincidenti, complicando inutilmente i calcoli.

Per questo preferiamo scrivere $\alpha = \beta = 1$ e in base a questa posizione cercheremo alcune limitazioni per λ ed ω.

(4) Per C costante l'equazione in λ avrebbe la forma

$$\lambda^4 - \frac{6\,i_f}{(1-\alpha F)\,Y_0}\lambda^3 + \left\{\frac{45}{4}i_f^2 + \frac{\nu^2 Y_0}{g}\left[\beta(1-\alpha F) + (\alpha+\beta)^2\frac{4}{F}\right]\right\}\frac{\lambda^2}{(1-\alpha F)^2\,Y_0^2} -$$

$$- \left\{\frac{\nu_{if}^2}{g}\left[\beta(1-\alpha F) + \frac{(\alpha+\beta)^2}{4}F\right] + \frac{9\,i_{if}^3}{4\,Y_0}\right\}\frac{\lambda}{(1-\alpha F)^3\,Y_0^2} -$$

$$- \frac{1}{(1-\alpha F)^3}\left(\frac{\nu i_f}{q_0}\right)^2\left(1 - \frac{3\beta - 2\alpha}{4}F\right) = 0.$$

(5) G. COCCHI, *Dell'equazione generale del moto nelle correnti turbolente*, «Memorie della Accad. delle Scienze dell'Istituto di Bologna», 1949–1950 e *Sui coefficienti di Coriolis*, ibid., 1950–1951.

(6) U. PUPPINI, *Idraulica*, Bologna, Zanichelli 1947, p. 377, n. 18.

Astronomia. — *Sul calcolo delle orbite planetarie. Nuova impostazione del problema e determinazione diretta della soluzione unica che questo ammette.* Nota (*) II del Socio VITTORIO NOBILE.

1. Come si è visto nella precedente Nota sul calcolo della prima orbita di un nuovo pianeta, la determinazione di un gruppo di cinque particolari incognite può formare l'oggetto di un problema parziale, puramente algebrico e del tutto autonomo, la cui importanza è fondamentale ai fini della risoluzione del problema integrale, perché, conosciuti i valori delle dette incognite, quelli delle rimanenti possono esser dedotti, senza necessità di ulteriori dati di osservazione e senza l'impiego di speciali artifizî, in base alla sola teoria generale del moto kepleriano. In quanto alle cinque incognite che intervengono nel problema preliminare – cioè cinque costanti le quali portano a conoscere due degli elementi ellittici dell'orbita e tre parametri sufficienti ad individuare per ogni tempo di osservazione la corrispondente distanza geocentrica del pianeta – si è pure visto come si renda semplice il procedimento che conduce a determinarle qualora si consideri che il problema in questione rientra in una categoria già ben determinata e indicata nella Nota I. Ciò implica infatti il verificarsi di quelle speciali condizioni dalle quali essenzialmente dipende la possibilità di *linearizzare* il problema stesso, ossia di isolare la particolare soluzione che si cerca, con l'escludere preventivamente quelle che si presenterebbero come estranee nel caso di una impostazione incompleta e che risultano tutte eliminate quando venga introdotta una condizione complementare che è caratteristica della soluzione *astronomica*. Si è allora condotti ad un sistema di undici equazioni lineari, nelle quali le incognite sono definite come funzioni delle sole cinque predette e i valori che assumono queste cinque nella soluzione speciale cercata sono poi, reciprocamente, deducibili con operazioni razionali semplicissime da quelli delle incognite linearizzanti.

2. Passando ora a trattare della seconda parte del problema generale, ossia della determinazione dei quattro elementi orbitali rimanenti, ricordo che, potendosi conoscere col procedimento esposto nella Nota I le distanze geocentriche del pianeta per tutti i tempi compresi nel periodo delle osservazioni, risultano anche note, a mezzo delle relazioni (I) riportate in quello scritto, le coordinate ortogonali eliocentriche corrispondenti ai tempi delle singole osservazioni, tempi ai quali si riferiscono pure i valori delle α, β, γ e quelli delle x, y, z. Dalle ξ, η, ζ così ottenute si dedurranno le distanze $r(t)$ del pianeta dal Sole e potranno allora conoscersi, con la risoluzione di

(*) Pervenuta all'Accademia il 31 ottobre 1960.

equazioni normali formate in base al sistema lineare $r(t) = r_0 + \dot{r}_0 t + \frac{\ddot{r}_0}{2} t^2$, [1] i valori più probabili da assumere per le costanti, $r_0, \dot{r}_0, \ddot{r}_0$, valori i quali dipendono dalla scelta fatta dell'origine fissata pei tempi t, origine che può opportunamente farsi coincidere con l'istante medio fra quelli corrispondenti alle singole osservazioni. Importantissimi sono i primi due fra tali dati e questi saranno qui presto utilizzati.

Detta ora v l'anomalia vera del pianeta al tempo t, indicate, come innanzi, con λ e i rispettivamente la longitudine del nodo ascendente e l'inclinazione del piano dell'orbita e detto g l'angolo compreso fra le direzioni del nodo e del perielio, si dedurranno, dalle note relazioni

$$(1)\qquad \begin{cases} \xi/r = \cos(g+v)\cos\lambda - \operatorname{sen}(g+v)\operatorname{sen}\lambda\cos i \\ \eta/r = \cos(g+v)\operatorname{sen}\lambda + \operatorname{sen}(g+v)\cos\lambda\cos i \\ \zeta/r = \operatorname{sen}(g+v)\operatorname{sen} i, \end{cases}$$

le altre due, sufficienti allo scopo qui in vista,

$$(2)\qquad \begin{cases} \cos\lambda\cdot\xi/r + \operatorname{sen}\lambda\cdot\eta/r = \cos(g+v) \\ -\operatorname{sen}\lambda\cdot\xi/r + \cos\lambda\cdot\eta/r = \operatorname{sen}(g+v)\cos i \end{cases}$$

potendo la seconda di queste essere anche, eventualmente, sostituita dall'ultima delle precedenti). Le (2) faranno conoscere senza ambiguità l'angolo $g+v$, unica incognita del sistema, e di quest'angolo si avranno tanti valori quanti sono quelli dell'anomalia v, ossia quante sono le osservazioni delle quali si dispone.

Coi valori così trovati si potrà – analogamente a quanto si è fatto per la funzione $r(t)$ e con un presumibile egual grado di precisione – ottenere lo sviluppo in serie di $(g+v)_t$, nell'intorno del valore $g+v_0$, corrispondente al tempo scelto come origine. Si avranno così, dall'insieme delle equazioni

$$(3)\qquad (g+v)_t = (g+v_0) + \dot{v}_0 t + \frac{\ddot{v}_0}{2} t^2$$

(1) Il grado di approssimazione che può raggiungersi col sostituire alla $r(t)$ e alle altre funzioni del tempo considerate nel presente studio (Note I e II) i corrispondenti sviluppi in serie limitati ai primi tre termini (legge parabolica) è da ritenersi sufficiente ai fini della determinazione di una prima orbita, data la brevità – imposta da ragioni varie – del periodo in cui debbono esser comprese le osservazioni. La più importante fra le dette ragioni, cioè quella relativa al più grave fra gli inconvenienti che sono a temersi nel caso di osservazioni troppo protratte, si rende evidente quando si noti come i dati di quelle osservazioni sarebbero da considerarsi non corrispondenti ad un moto *kepleriano* ma ad un moto *già perturbato* e sarebbe pertanto da escludere che una prima orbita determinata in tali condizioni possa rappresentare l'orbita « osculatrice » i cui elementi debbano costituire i dati iniziali per giungere, in una seconda fase del calcolo, ad una conoscenza completa e rigorosa delle perturbazioni. Considerazioni di tal natura rendono anche molto dubbia la convenienza di prolungare, nel caso qui in questione, le anzidette serie, perché con l'introduzione di nuove costanti da determinare si renderebbe necessario fare intervenire nuovi dati di osservazione, col prevedibile risultato di estendere maggiormente il periodo delle operazioni e di dar quindi luogo agli sfavorevoli effetti innanzi accennati.

corrispondenti alle singole osservazioni, coi procedimenti già applicati nei precedenti casi, i valori più probabili da ritenere per le incognite $(g + v_0)$, $\dot{v}_0$ e $\ddot{v}_0$ (valori dei quali il terzo non ha interesse diretto per la questione presente).

3. Si hanno ora tutti i dati necessarî per la determinazione dei quattro elementi che rimangono ancora a conoscersi. Premesso che nelle equazioni (3) la misura degli angoli deve intendersi espressa in radianti e che l'unità di tempo deve essere quella con cui è generalmente calcolata la costante k dell'attrazione solare, ossia il giorno solare medio, notiamo che dal valore qui ottenuto nella maniera indicata per r_0 e da quello di $\dot{v}_0$, anche noto, risulta determinata la costante delle aree corrispondente al moto considerato e quindi anche il parametro dell'orbita. La prima costante è data infatti da $c = r_0^2 \dot{v}_0$ e il parametro da $p = c^2/k^2$. In quanto all'eccentricità, anche questa può essere dedotta direttamente dall'insieme dei valori già trovati quando sia stato con questi calcolato quello della costante h dell'energia corrispondente al moto del pianeta. Si ha infatti dall'integrale dell'energia

$$2h = \dot{r}_0^2 + r_0^2 \dot{v}_0^2 - \frac{2k^2}{r_0} = \dot{r}_0^2 + \frac{c^2}{r_0^2} - \frac{2k^2}{r_0} \tag{4}$$

e quindi, da una ben nota relazione, per l'eccentricità.

$$e = \sqrt{1 + \frac{2hc^2}{k^4}}, \tag{5}$$

dopo di che dai valori di p e di e si avrà – nel caso dell'ellisse ($h < 0$), a cui ci riferiamo – quello del semiasse maggiore [2] $a = p/(1 - e^2)$, quindi quello del medio movimento diurno $n = ka^{-3/2}$. Potrà ora dedursi dall'equazione dell'orbita (che scriveremo introducendovi le coordinate r_0, v_0 corrispondenti all'origine scelta dei tempi), ossia da

$$e \cos v_0 = \frac{p}{r_0} - 1,$$

il valore dell'unica incognita che questa comprende, cioè $\cos v_0$. Risulta così ben determinato l'angolo, perché è noto inoltre il segno del seno, che deve, in ogni caso, coincidere con quello di $\dot{r}_0$, già determinato con lo sviluppo in serie di $r(t)$. Da v_0 [3] e da $g + v_0$ (angolo pure noto) si dedurrà g e la relazione $\tilde{\omega} = \lambda + g$ farà quindi conoscere la longitudine del perielio. Se ora si consi-

(2) Il semiasse maggiore può anche essere determinato indipendentemente da e (quando sia stata, con la (4), calcolata la h) a mezzo della nota relazione $a = -k^2/2h$, che è una di quelle che legano gli elementi ellittici con una sestupla di elementi canonici fra i quali è compresa la costante dell'energia.

(3) Per la determinazione di v_0 può seguirsi un altro procedimento che permette di dedurre in parî tempo il valore dell'eccentricità. Si può infatti aggregare all'equazione del-

dera in luogo dell'anomalia vera v_0 quella eccentrica corrispondente u_0, si potrà, dalla relazione *kepleriana*

$$u_0 - e \operatorname{sen} u_0 = -n\tau$$

ottenere un dato che porta alla conclusione della ricerca, cioè il tempo τ in cui il pianeta passa al perielio (tempo riferito all'origine provvisoriamente scelta). Se poi dal tempo τ si passa a quello T che corrisponde al medesimo istante dopo la scelta di una diversa origine (epoca), si avrà l'ultimo elemento orbitale $\varepsilon = \tilde{\omega} - n\mathrm{T}$.

l'orbita un'altra ottenuta derivando la prima rispetto al tempo. I valori di $r_0, \dot{r}_0, p, v_0$, ed e (dei quali i primi tre già noti) dovranno allora verificare le due relazioni

$$e \cos v_0 = \frac{p}{r_0} - 1 \quad , \quad e \operatorname{sen} v_0 = \frac{p\dot{r}_0}{r_0^2 \dot{v}_0} = \frac{p\dot{r}_0}{c} ,$$

dalle quali segue

$$e^2 = \left(\frac{p}{r_0} - 1\right)^2 + \frac{p^2 \dot{r}_0^2}{c^2} = \left(\frac{p}{r_0} - 1\right)^2 + \frac{p\dot{r}_0^2}{k^2} ,$$

dopo di che si avranno, dalle equazioni precedenti, $\cos v_0$ e $\operatorname{sen} v_0$.

Vulcanologia. — *Coefficienti di viscosità del Magma Vesuviano e sue variazioni nel periodo storico.* Nota (*) del Corrisp. Giuseppe Imbò.

Le indagini sulle analisi termiche dei prodotti eruttivi hanno consentito l'individuazione della « temperatura d'irrigidimento » della quale (1) abbiamo già segnalato l'importanza negli studi sui dinamismi vulcanici.

Si ricorda:

1° che essa corrisponde alla temperatura alla quale nel corso del raffreddamento cessa il processo cristallogenetico;

2° che a quella temperatura, o in un ristretto campo termico di cui essa rappresenta il valore medio, il coefficiente di viscosità subisce una variazione continua ma rapida. I valori estremi del salto del coefficiente sono all'incirca: 10^{16} poise, 10^{8} poise;

3° che il coefficiente di viscosità iniziale (o nel condotto vulcanico) decresce con la temperatura di irrigidimento.

Nell'ipotesi che la temperatura iniziale sia costante, l'ultima considerazione ha permesso di attribuire alla temperatura d'irrigidimento il significato di numero indice o di misura relativa del coefficiente di viscosità magmatica.

L'ammissione inoltre della validità della legge sperimentale che stabilisce la variazione (a pressione costante) del coefficiente di viscosità (η) con la temperatura assoluta

$$\eta = \eta_o^{1/a\,T}, \tag{1}$$

almeno nel campo di temperature maggiori di quella d'irrigidimento, consente la determinazione dell'effettivo valore del coefficiente di viscosità magmatica (η_m). Nella relazione (1) η_o ed a sono due costanti. Le numerose serie di osservazioni di Le Chatelier (2) lasciano ritenere che la prima costante sia una costante generale, il cui valore è deducibile da:

$$\log \log \eta_o = 1{,}5 \,.$$

La conoscenza inoltre di una coppia di valori corrispondenti (η , T), consente poi la deduzione dell'altra costante. La sola coppia nota è quella che si riferisce alle condizioni d'irrigidimento. Per T si pone il valore T_i (temperatura d'irrigidimento) e per η il valore corrispondente η_i. Questo valore è una costante generale ed assume il valore dell'estremo inferiore dell'indi-

(*) Presentata nella seduta del 19 novembre 1960.

(1) G. Imbò, *Temperature d'irrigidimento e viscosità magmatica*, « Associazione Geofisica Italiana. Atti del VII Conv. Annuale » (1957).

(2) H. Le Chatelier, *Sur la viscosité du verre*, « C. R. », CLXXIX (1924).

cato campo di variazione rapida del coefficiente di viscosità. Si assegna ad η_i il valore medio ottenuto in base ad esperienze di laboratorio [3]:

$$\eta_i = 10^{7,86}.$$

Si ha di conseguenza:

$$\log a = \frac{0,6046}{T_i}.$$

L'applicazione del metodo suggerito richiede che nessuna discontinuità termica sia presente nell'intervallo di temperatura che si considera. Evidentemente la condizione indicata non è soddisfatta, ma, per l'esiguità del processo cristallogenico estratellurico, le correzioni devono essere ritenute trascurabili.

La deduzione del coefficiente di viscosità magmatica esige inoltre la conoscenza della temperatura magmatica (T_m) che si ritiene coincidente con quella iniziale delle masse, ossia con quella ottenuta all'atto della emissione.

La relazione definitiva che consente la determinazione di η_m, in base ai valori deducibili dalle osservazioni (T_i, T_m), è:

$$\log \eta_m = 1,50\left(1 - 0,40\,\frac{T_m}{T_i}\right). \qquad (2)$$

Il metodo è stato già applicato per due vulcani, Vesuvio ed Etna, ed i valori ottenuti s'accordano:

1° con i valori presumibili;

2° con le caratteristiche dinamiche dei due vulcani, le cui modalità eruttive del momento ricevono da essi una completa giustificazione.

La riscontrata variabilità della temperatura d'irrigidimento e conseguentemente del coefficiente di viscosità magmatica per lo stesso vulcano nel tempo ed anche nel corso di uno stesso episodio eruttivo, ha fatto ritenere utile l'estensione dello studio ai prodotti (di data nota) emessi nel corso di una plurisecolare attività. Lo studio è stato limitato all'esame dei prodotti lavici vesuviani, opportunamente prelevati e relativi all'intervallo 1631–1944, ed uno solo ad un evento eruttivo preistorico. Nel quadro sono riportati i valori medi delle temperature (t_i) d'irrigidimento (in °C) ottenuti da un numero (N) di serie di osservazioni [4] e delle relative incertezze od errori (Δt_i), nonché i valori corrispondenti del logaritmo del coefficiente di viscosità ($\log \eta_m$) e degli stessi coefficienti. Per la deduzione di questi ultimi valori si è supposto che la temperatura assoluta magmatica (nel condotto) abbia conservato il costante valore

$$T_m = 1423°.$$

(3) A. WINTER, *Le rôle de la viscosité dans la formation de l'état vitreux*, «C. R.», CCXLI (1955).

(4) Nell'esecuzione delle misure sono stato validamente coadiuvato dal dott. Raffaele Pepe, che vivamente ringrazio.

	N	t_i (°C)	Δt_i (°)	$\log \eta_m$	η_m
1) Lava preistorica	3	781	6	4,88	$7,6 \times 10^4$
2) » 1631	3	704	12	4,21	1,7
3) » 1737	2	701	12	4,20	1,6
4) » 1751	2	737	8	4,51	3,3
5) » 1767	1	735	4	4,49	3,1
6) » 1794	3	728	9	4,43	2,7
7) » 1834	3	770	8	4,79	6,3
8) » 1855	2	756	11	4,68	4,8
9) » 1858	3	764	10	4,74	5,5
10) » 1861	1	742	11	4,55	3,5
11) » 1872	3	776	10	4,85	7,1
13) » 1895–1899	2	802	12	5,07	11,8
13) » 1906	3	779	9	4,88	7,5
14) » 1944	1	793	7	4,98	9,6

La rappresentazione grafica (fig. 1) dei valori mette in evidenza una variazione, nel corso del tempo, del coefficiente di viscosità. I valori ottenuti presentano scarti positivi e negativi relativamente ad un andamento medio: essi però risultano compresi entro una fascia delimitata da due rette parallele all'andamento medio, la cui equazione risulta:

$$\log \eta = 4{,}006\ (\pm\ 0{,}205) + 2{,}91 \times 10^{-3}\ (t - 1631)\ , \tag{3}$$

in cui η rappresenta il coefficiente di viscosità magmatica (in poise) al tempo t (espresso in anni).

I valori estremi dei coefficienti di viscosità deducibili dalla (3) e riferentisi all'intervallo 1631–1944 risultano: $0{,}74 \times 10^4$ poise per la prima data e $15{,}85 \times 10^4$ poise per la seconda, ai quali corrispondono i valori delle temperature d'irrigidimento di 660° C e di 820° C.

Il primo termine del 2° membro è seguito da una parentesi in cui è indicato lo scarto massimo da cui potrebbero essere affetti i valori dedotti pei singoli anni. Almeno in parte, la dispersione dei valori deve essere attribuita ad errori negli assunti valori. Nell'ammissione che essa possa dipendere esclusivamente da inesatta valutazione della temperatura d'irrigidimento, l'entità del relativo scarto può essere facilmente dedotta. In realtà, se si ritiene che in media si abbia, come può ottenersi dai valori riportati in tabella:

$$\Delta T_i = \pm\ 9°,$$

si ottiene per la variazione in $\log \eta$ un valore lievemente crescente, che nel campo 700° C–800° C della temperatura d'irrigidimento, risulta in media:

$$\Delta \log \eta = 0{,}089\ .$$

Nella figura è delimitato il campo d'incertezza dei valori. Si osserva che, ad eccezione di soli cinque punti, gli altri sono compresi nella fascia cen-

trale. I punti anomali sono quelli relativi alle eruzioni: del 1737, del 1794, del 1834, del 1861, del 1895–1899, nel senso di un abbassamento rispetto al valore medio corrispondente per le tre date: 1737, 1794, 1861 e di un innalzamento per le altre due.

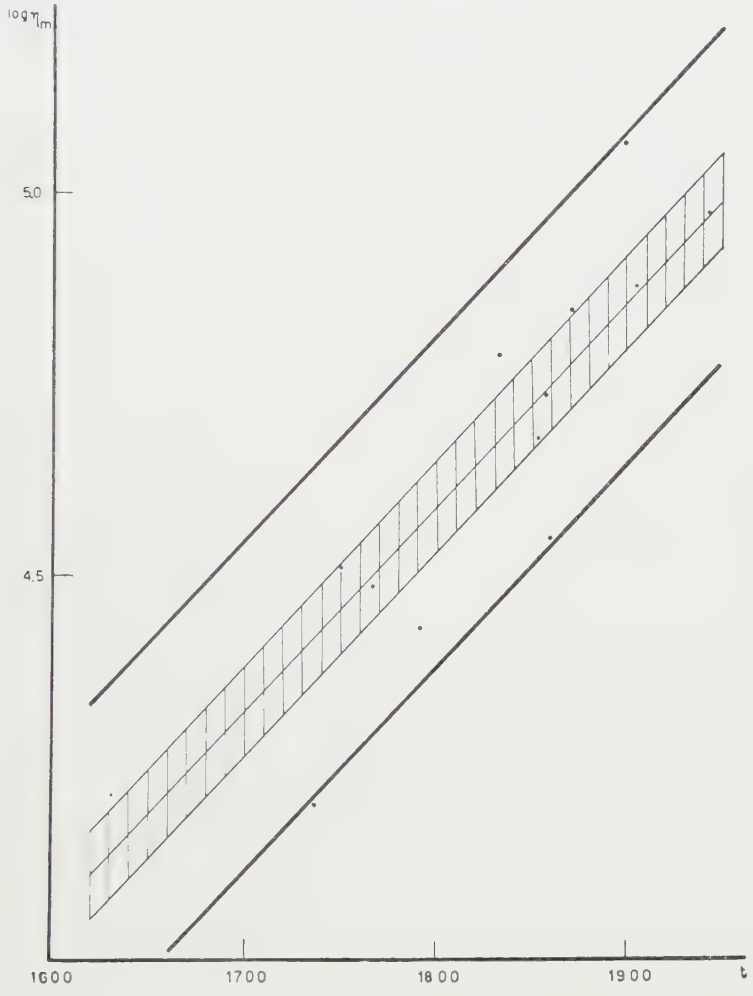


Fig. 1.

Si rileva che le eruzioni del 1794 e del 1861 sono considerate eccentriche e che l'eruzione del 1895–1899 dette luogo alla formazione di una cupola lavica e cioè che per questi tre episodi le rilevate anomalie trovano pieno riscontro negli anomali comportamenti eruttivi. Non del tutto evidente risulta la giustificazione negli altri due casi, ma dalle descrizioni si hanno elementi che permetterebbero di stabilire anche per le due date un accordo tra modalità eruttive e dedotti valori del coefficiente di viscosità magmatica. La bocca effusiva dell'eruzione del 1737 si stabilì invero lungo il versante meridionale del Gran Cono ad una quota stimata di circa 800 metri.

L'alta fluidità è confermata dalla eccezionale rapidità con la quale la lava raggiunse e distrusse la cittadina di Torre del Greco. In comune con gli altri due effiussi del 1794 e del 1861, quello del 1737 ha il versante del relativo teatro eruttivo. Nei riguardi dell'altra data (1834) si rileva che il parossismo dell'agosto rappresentò l'ultimo episodio di un'attività effusiva già incominciata qualche anno avanti e caratterizzata da efflussi lenti.

Rimane ora da prendere in considerazione la variazione normale del coefficiente di viscosità. Essa invero non può essere attribuita, almeno esclusivamente, ad un semplice processo di differenziazione magmatica. In realtà non si hanno sicure indicazioni per la mancanza stessa di analisi, ma, basandosi su quelle a disposizione, lo Scherillo [5] osserva che le lave dal risveglio del 1631 in poi sono leucotefriti di tipo basico e che il magma non ha subìto sostanziali variazioni. Potrebbe essere ammesso un lieve aumento nel grado di acidità e nel grado di silicizzazione, che sembra sia proceduto in modo progressivo, ma le assunte variazioni sono per nulla paragonabili a quelle rilevate per la temperatura d'irrigidimento e conseguentemente per il coefficiente di viscosità. E difatti mentre dal 1631 al 1944 si avrebbe un aumento di circa l'1 % nel grado di acidità e di 0,05 nel grado di silicizzazione, la temperatura d'irrigidimento sarebbe variata di circa 100° ed il coefficiente di viscosità magmatica avrebbe subìto un progressivo medio aumento fino a raggiungere nel 1944 un valore ($9{,}6 \times 10^4$) circa 6 volte maggiore di quello ($1{,}7 \times 10^4$) relativo al 1631.

Si può invero ritenere che l'aumento progressivo del coefficiente di viscosità possa essere attribuito ad una graduale riduzione nella soluzione magmatica del tenore in componenti volatili.

Emerge da tale considerazione la grande importanza delle misure della temperatura d'irrigidimento, le cui variazioni consentirebbero di mettere in evidenza processi magmatici non rilevabili diversamente e di capitale importanza nella indagine sui meccanismi eruttivi e sulle relative eventuali variazioni nel tempo.

(5) A. Scherillo, *Le lave e le scorie dell'eruzione vesuviana del marzo 1944*, « Annali dell'Oss. Ves. », 5ª serie, vol. unico (1949).

Chimica inorganica. – *Ioduri idrazinici e cianuri derivati di* Rh^{III} (*). Nota IV di Livio Cambi ed Ernestina Dubini Paglia, presentata (**) dal Socio L. Cambi.

Nelle Note precedenti abbiamo descritto rispettivamente le serie dei cloruri e cianuri idrazinici di Rh^{III}, da noi individuati (1).

La ricerca presente riguarda gli ioduri ed i cianuri da essi derivati, in genere recanti rapporti Rh/CN diversi da quelli in precedenza descritti.

Ottenemmo gli ioduri per semplice azione dell'idrazina a diverse concentrazioni su RhI_3, operando a freddo e in atmosfera inerte.

Corrispondono ai rapporti riferiti nella Tabella I.

Tabella I.

Rh^{III} –Ioduri

Sali	Composizione analitica e momento magnetico						
	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*
	Rh	J	N	N_2H_4	Rapporto molecolare	Formule brute	$\chi_{mol} \cdot 10^6$
I	1	2	7	3,5	$RhJ_2 : 3{,}5\ N_2H_4$	$RhJ_2N_7H_{13}$	— 66
II	1	1,5	5	2,5	$Rh_2J_3 : 5\ N_2H_4$	$Rh_2J_3N_{10}H_{17}$	— 89
III	1	1,66	2,33	1,16	$Rh_3J_5 : 3.5\ N_2H_4$	$Rh_3J_5N_7H_{10}$	— 75
IV_1	1	1	7	3,5	$RhJ : 3{,}5\ N_2H_4$	$RhJN_7H_{12}$	19
IV_2	1	1	5,5	2,75	$RhJ : 2{,}75\ N_2H_4$	$RhJN_{5,5}H_9$	— 6

Le formule della colonna *f* sono state dedotte dalla ipotesi di Rh^{III} e dei radicali idrazinici anionoidi.

Tutti gli ioduri predetti sono diamagnetici. Presentano colore analogo, che varia da giallo a giallo ocra. Sono insolubili in acqua e nei solventi usuali. Alcuni, all'atto della formazione si sciolgono in grande eccesso di idrazina e dalla soluzione, nella maggior parte dei casi, precipita con metanolo un monoioduro: $RhI : n\ N_2H_4$.

(*) Ricerca eseguita presso l'Istituto di Chimica Industriale dell'Università di Milano. Centro di Chimica Metallurgica del C.N.R.

(**) Nella seduta del 19 novembre 1960.

(1) Questi « Rendiconti », Nota I (8) XXVIII, 770 (1960); Nota II, idem XXIX, 8; Nota III, idem XXIX, 15.

Come già avvertimmo, si tratta in generale di polimeri, in cui interviene con probabilità un numero elevato di Rh^{III} a diverso rapporto con l'alogeno ione [2].

Gli ioduri idrazinici si differenziano, per la maggior instabilità, dai cloruri e dai cianuri da noi descritti. All'aria, come nel vuoto, anche a temperatura ambiente, con maggiore o minore velocità, anneriscono e perdono azoto, liberano rodio metallico con un residuo di ioduro. Ad esempio i monoioduri predetti, nel vuoto, possono perdere in 24 ore circa il 90 % dell'azoto idrazinico iniziale. Questo comportamento indica la maggiore reattività del rodio nei complessi iodurati stessi.

Tali ioduri, come già i cloruri, di fresco preparati, reagiscono con i cianuri alcalini in soluzione acquosa diluita, e attestano la maggiore affinità del Rh^{III} rispetto al CN^- di quella da noi notata con i cloruri.

Nella ulteriore ricerca dei Rh^{III}–cianuri idrazinici già descritti, ottenemmo, sempre per azione di KCN dai monoioduri, nelle diverse condizioni di esperienza, che più oltre indichiamo, la serie della Tabella II.

TABELLA II.

Rh^{III}–CIANURI–IDRAZINICI DA MONOIODURI

Sali	Composizione analitica e momento magnetico						
	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*
	Rh	CN	N_{tot}	N_2H_4	Rapporto molecolare	Formula bruta	$\chi_{mol} \cdot 10^6$
A	1	1	3	1	$RhCN : N_2H_4$	$Rh(CN)N_2H_2$	125
I	1	1,33	5,33	2	$Rh_3(CN)_4 : 6\ N_2H_4$	$Rh_3(CN)_4N_{12}H_{19}$	12
II	1	1,5	4	1,25	$Rh_2(CN)_3 : 2{,}5\ N_2H_4$	$Rh_2(CN)_3N_5H_7$	39
III	1	2	6	2	$Rh(CN)_2 : 2\ N_2H_4$	$Rh(CN)_2N_4H_7$	−4

Il sale A è stato ottenuto dal monocloruro, come descritto nella Nota III. Lo riportiamo per confronto.

I sali sono tutti diamagnetici e li abbiamo riferiti a Rh^{III}.

In merito alla struttura, cioè alla nostra ipotesi della presenza dei radicali anionoidi idrazinici

$$\{NH—NH_2\}^{-1} \quad \text{oppure} \quad \{NH—NH\}^{2-}$$

osserviamo che questa è in accordo con le serie degli ioduri e cianuri sopra riportate. L'ipotesi corrisponde alle reazioni con KCN: assistiamo al suc-

(2) I rapporti Rh/idrazina dipendono dalle condizioni di esperienza. È presente in genere un eccesso di idrazina con legame relativamente labile.

cessivo passaggio da 1 Rh/1 CN a 1 Rh/2 CN per spostamento dei radicali idrazidici, in schema:

$$\{= Rh^{III}—NH—NH_2\} + HCN \rightarrow \{= Rh^{III}\cdot CN\} + N_2H_4 .$$

Parte sperimentale.

Ioduri.

I) $\{RhJ_2(3{,}5\ N_2H_4—H)\}$. – Il sale è stato ottenuto aggiungendo lentamente a freddo e in atmosfera di argon, idrato di idrazina al 30 % alla sospensione in acqua di RhJ_3 nel rapporto 50 N_2H_4/1 Rh.

Il prodotto che precipita, giallo aranciato, venne separato alla centrifuga e lavato ripetutamente con acqua. Dopo essiccamento su H_2SO_4 per 12 ore, alle analisi è risultato:

	trov. %	Rh 20,80	;	J 52,10	;	N 20,16	;	H 3,70
per $\{RhJ_2N_7H_{13}\}\cdot H_2O$	calc.	21,19		52,12		20,15		3,09

$$\chi_{mol}\cdot 10^6 = -66.$$

II) $\{Rh_2J_3(5\ N_2H_4—3\ H)\}$. Alla sospensione acquosa di RhJ_3 a freddo, in corrente di argon, si aggiunge la soluzione di idrato di idrazina al 75 %, nel rapporto 50 N_2H_4/Rh. Ha lo stesso colore del precedente; dopo essiccamento è risultato:

	trov. %	Rh 26,65	;	J 50,50	;	N 18,20		
per $\{Rh_2J_3N_{10}H_{17}\}\cdot H_2O$	calc.	26,96		50,00		18,36		

$$\chi_{mol}\cdot 10^6 = -89.$$

III) $\{Rh_3J_5(3{,}5\ N_2H_4—4\,H)\}$. – È stato ottenuto usando le stesse modalità delle preparazioni precedenti, aumentando però il tempo di reazione da 10′ a 20′. Il sale giallo venne centrifugato e lavato ripetutamente con acqua. Dopo essicamento è risultato

	trov. %	Rh 25,40	;	J 53,20	;	N 7,63	;	H 2,03
per $\{Rh_3J_5N_7H_{10}\}\cdot 8H_2O$	calc.	25,81		53,03		8,16		2,17

$$\chi_{mol}\cdot 10^6 = -75.$$

IV.) $\{RhJ(3{,}5\ N_2H_4—2\,H)\}$. – Alla soluzione acquosa di K_3RhCl_6 al 4 % venne aggiunto KJ in eccesso. A caldo precipita RhJ_3. Dopo raffreddamento venne aggiunto l'idrato di idrazina nel rapporto 100 moli N_2H_4/Rh. Il colore finale del sale era rosso aranciato scuro. Separato alla centrifuga, lavato ed essiccato presentava colore aranciato chiaro. Alle analisi è risultato:

	trov. %	Rh 24,80	;	J 30,80	;	N 24,30		
per $\{RhJN_7H_{12}\}\cdot 4H_2O$	calc.	24,98		30,82		23,80		

$$\chi_{mol}\cdot 10^6 = 19.$$

IV$_2$) $\{RhJ(2{,}75\ N_2H_4—2\ H)\}$. – Alla sospensione in acqua di RhJ_3 venne aggiunta a freddo e in atmosfera di argon idrato di idrazina nel rapporto 300 moli N_2H_4/Rh. Il precipitato che inizialmente si forma si scioglie nell'eccesso di idrazina e si ottiene una soluzione aranciato chiaro da cui il metanolo precipita il sale che separato alla centrifuga, lavato con metanolo ed acqua, dopo essiccamento è risultato:

	trov. %	Rh 27,40	;	J 33,95	;	N 20,28	;	H 3,85
per $\{RhJN_{5,5}H_9\}\,4H_2O$	calc.	27,82		34,30		20,80		4,55

$$\chi_{mol} \cdot 10^6 = 6.$$

Cianuri.

I) $\{Rh_3(CN)_4(6\,N_2H_4—5\ H)\}$. – Al monoioduro rodico precedentemente descritto, sospeso in acqua in atmosfera di argon, venne aggiunta una soluzione diluita di KCN nel rapporto 1 KCN/1 Rh. Il colore della sospensione passa da giallo aranciato a giallo chiaro. Dopo 30′ si separa alla centrifuga il sale che viene ripetutamente lavato con acqua. Essiccato è risultsto alle analisi:

	trov. %	Rh 40,65	;	C 6,45	;	N 29,33	;	H 3,97
per $\{Rh_3(CN)_4N_{12}H_{19}\}\cdot 9\,H_2O$	calc.	40,54		6,32		29,38		4,80

$$\chi_{mol} \cdot 10^6 = 12.$$

II) $\{Rh_2(CN)_3(2{,}5\ N_2H_4—3\ H)\}$. – Si opera come nella preparazione precedente sempre con il rapporto 1 KCN/1 Rh. Si raddoppia il tempo di reazione. Il sale giallo chiaro lavato ed essiccato è risultato:

	trov. %	Rh 47,20	;	C 8,33	;	N 24,96		
per $\{Rh_2(CN)_3N_5H_7\}\cdot 2\,H_2O$	calc.	47,52		8,30		25,81		

$$\chi_{mol} \cdot 10^6 = 39.$$

III) $\{Rh(CN)_2(2\ N_2H_4—1)\}$. – Alla sospensione acquosa del monoioduro di rodio $\{RhJ(N_2H_4)_{2,75}\}$ è stata aggiunta la soluzione diluita di KCN nel rapporto 10 KCN/1 Rh, a freddo e in atmosfera di argon. Il colore della sospensione giallo–aranciato all'inizio, diventa giallo molto chiaro. Dopo 30′ si separa il sale alla centrifuga, lavato ripetutamente con acqua ed essiccato è risultato alle analisi:

	trov. %	Rh 42,00	;	C 9,18	;	N 33,86	;	H 4,85
per $\{Rh(CN)_2N_4H_7\}\cdot 1{,}5\,H_2O$	calc.	42,04		9,78		34,28		4,09

$$\chi_{mol} \cdot 10^6 = -4.$$

Il sale corrisponde ai dicianuri da noi ottenuti dal bicloruro, precedentemente descritti nella Nota III.

Le ricerche proseguono.

Chimica. — *Polimeri 1,4* trans *isotattici del pentadiene 1,3* (*). Nota di Giulio Natta, Lido Porri, Paolo Corradini, Giorgio Zanini, Federico Ciampelli, presentata (**) dal Socio G. Natta.

I polimeri del pentadiene 1,3 aventi concatenamento 1,4 sono costituiti da unità monomeriche che contengono due siti di isomeria sterica, una di tipo geometrico dovuta ai doppi legami, che possono assumere configurazione *cis* o *trans*, l'altra dovuta alla presenza di atomi di carbonio terziari, che possono avere configurazione isotattica o sindiotattica o statisticamente disordinata. Tali polimeri presentano un particolare interesse poiché essi contengono atomi di carbonio terziari effettivamente asimmetrici in quanto i sostituenti legati ad ognuno di essi differiscono tra di loro già per la composizione chimica dei gruppi immediatamente vicini; a differenza quindi dei polimeri di monomeri vinilici ciascuna macromolecola stericamente ordinata avente configurazione isotattica dovrebbe risultare otticamente attiva, indipendentemente dalla attività derivante da una eventuale spiralizzazione della catena.

La sintesi di polimeri del pentadiene aventi concatenamento 1,4 e configurazione *trans* del doppio legame è stata già da tempo da noi effettuata (1), impiegando i sistemi catalitici $Al(C_2H_5)_3$—$TiCl_3\,\alpha$ o VCl_3 e di ciò abbiamo brevemente riferito in un precedente lavoro (2).

Lo spettro IR di tali polimeri allo stato solido presentava bande intense a 12,80 μ; 11,54 μ; 10,65 μ; 9,75 μ, che non erano presenti nello spettro dei polimeri fusi od in soluzione e ciò fu da noi ritenuto un indice della regolarità di struttura delle catene polimeriche. Tuttavia gli spettri ai raggi X allora ottenuti, mentre presentavano alcune riflessioni nette sullo strato equatoriale, presentavano solo intensità diffuse sul 1° e 2° strato. Gli spettri si presentavano come se le catene, pur essendo capaci di assumere posizioni parallele tra di loro, avessero libertà di rotazione intorno ai loro assi e fu perciò lasciata insoluta la questione se vi fosse ordine o no nella configurazione degli atomi di carbonio asimmetrici.

Un ulteriore esame dei polimeri ha permesso ora di chiarire tale questione. È stato infatti trovato che i polipentadieni 1,4 *trans* ottenuti con i catalizzatori da noi usati possono esistere in una modificazione paracristallina (smettica) in cui si ha ordine solo lungo una direzione e che corrisponde a quella esaminata nel nostro precedente lavoro (2) ed in una modificazione

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Industriale del Politecnico di Milano.

(**) Nella seduta del 19 novembre 1960.

(1) G. Natta, L. Porri, G. Mazzanti, Brev. It. 536631.

(2) G. Natta, L. Porri, P. Corradini, D. Morero, «Chimica e Industria», *49*, 362 (1958).

cristallina, che presenta una regolarità tridimensionale. I polimeri provenienti dalla polimerizzazione, nelle condizioni sperimentali da noi di solito seguite, si presentano sempre nella forma smettica ed è risultato necessario un particolare trattamento termico per ottenere la modificazione cristallina. L'esame di quest'ultima ha permesso di definire come isotattica la configurazione degli atomi di carbonio asimmetrici delle catene.

Un ulteriore esame della polimerizzazione ha permesso inoltre di mettere in evidenza che la stereospecificità del processo di polimerizzazione e la purezza sterica delle catene risultano maggiori quando si usano gli isomeri *cis* o *trans* puri del pentadiene invece delle miscele di tali isomeri, che erano state in precedenza usate.

Polimerizzazione.

In Tabella I sono riportati alcuni risultati di polimerizzazioni effettuate col sistema eterogeneo $Al(C_2H_5)_3$—VCl_3 cristallino, a temperatura ambiente. Tali risultati possono essere riassunti come segue:

a) L'isomero *cis* o quello *trans* forniscono prodotti greggi di polimerizzazione che contengono basse percentuali di frazione estraibile con etere, amorfa ai raggi X.

I residui all'estrazione eterea ottenuti da ciascuno dei due isomeri presentano identico spettro ai raggi X ed IR, ed egual punto di fusione, $\sim 95°$ C.

Nello spettro IR sono molto intense le bande a 12,80 μ; 11,54 μ; 10,65 μ; 9,75 μ, che non sono presenti nello spettro del polimero fuso. Lo spettro ai raggi X dei polimeri tal quali (cioè così come provengono dal frazionamento con etere, senza ulteriori trattamenti termici) risulta eguale a quello già pubblicato nel nostro precedente lavoro, corrispondente alla modificazione smettica. Sulla trasformazione della modificazione smettica in quella cristallina e sull'esame di quest'ultima viene riferito in seguito.

b) I polimeri greggi ottenuti da miscele di isomeri *cis trans* contengono una percentuale di frazione amorfa, estraibile con etere, maggiore di quella dei prodotti ottenuti con gli isomeri puri. Tale frazione eterea (esaminata dopo avere allontanato con acetone i bassi polimeri oleosi) risulta costituita all'IR sostanzialmente da unità 1,4 *trans* e non presenta inversioni testa–coda (assenza di bande nella zona intorno a 13,3 μ). L'assenza di cristallinità ai raggi X di tale frazione deve quindi attribuirsi ad un certo disordine nella configurazione degli atomi di carbonio asimmetrici. Nello spettro IR allo stato solido sono presenti, molto deboli, le bande sopra accennate a 12,80 μ ecc., il che indicherebbe l'esistenza di brevi tratti di catena stereoordinati.

c) La frazione insolubile in etere dei polimeri ottenuti da miscele degli isomeri presenta ai raggi X, esaminata tal quale, lo stesso spettro, corrispondente alla forma smettica, del prodotto ottenuto degli isomeri puri. Il punto di fusione di tale frazione è però in genere più basso di 95°. Corrispondentemente nello spettro IR del polimero solido le bande sopra accen-

nate sono meno intense di quelle presenti nello spettro dei prodotti ottenuti dall'isomero *cis* o da quello *trans*.

Poiché il polimero ottenuto da miscele degli isomeri ha doppi legami tutti del tipo *trans*, l'abbassamento del punto di fusione come la minore intensità delle bande sopraddette nello spettro IR sono attribuibili ad una minore purezza sterica relativa alla configurazione degli atomi di carbonio terziari.

Tabella I.

Polimerizzazione del pentadiene 1,3 con catalizzatore $Al(C_2H_5)_3$—VCl_3 (*).

Isomero *trans* % (**)	Durata ore	Polimero g	Residuo estrazione etere % (***)	T° di fusione
100	14	1,23	87	95
100	15	1,5	83,5	95
100	17	1,4	88	—
100	70	2,4	85	95
100	72	2,4	85	—
77	14	1,44	69	92
75	14,30	0,68	66	92
50	14,30	0,64	65	90
50	15	0,95	58	89
50	16	0,87	64	90
28	14,30	0,67	69	89
25	16	1,47	64	91
0	16	1,5	98	95

(*) Le polimerizzazioni sono state effettuate in provettone di vetro, sotto agitazione: VCl_3 g 0,3; moli Al/moli V 2,5; solvente eptano cm^3 15; monomero cm^3 4.

(**) La separazione dei due isomeri è stata effettuata per via cromatografica.

(***) $[\eta]$ a 30° in toluolo 1,3–1,5 100 cm^3/g.

Modificazioni cristalline dei polimeri stereoordinati.

La modificazione smettica che si ottiene direttamente dalla polimerizzazione può essere trasformata nella modificazione cristallina mediante fusione e raffreddamento molto lento (~ 10 ore da 100° a 50°). Mediante semplice ricottura, anche molto lunga, a temperature inferiori a quella di fusione la trasformazione non ha luogo in modo apprezzabile. La modificazione cristallina può essere ritrasformata nella modificazione smettica mediante fusione e raffreddamento rapido.

Le due modificazioni presentano differente densità, circa 0,94 la modificazione smettica, circa 0,97 la modificazione cristallina. Un confronto fra gli spettri ai raggi X (CuKα) registrati con contatore Geiger nella regione angolare tra $2\vartheta = 5°$ e $2\vartheta = 30°$ di un campione di polipentadiene 1,4 *trans* nella forma smettica e nella forma cristallina è riportato in fig. 1. Lo spettro della forma smettica presenta un picco piuttosto allargato, il cui massimo di intensità corrisponde ad una distanza di Bragg di 4,55 Å, mentre lo spettro della forma cristallina è ricco di linee molto nette caratteristiche di un alto grado di ordine. Per entrambe le forme gli spettri di fibra forniscono un periodo di identità di 4,8 Å; lo spettro della forma cristallina è stato ottenuto da cilindretti fusi e raffreddati lentamente e successivamente stirati a temperatura di pochissimo inferiore a quella di fusione.

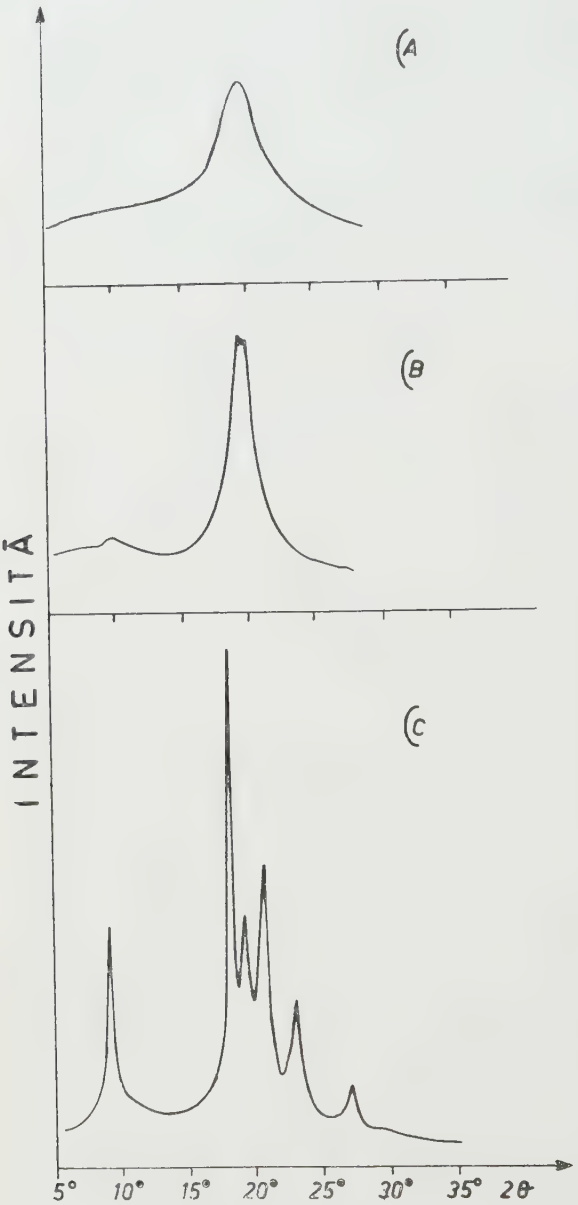


Fig. 1. – Registrazione con contatore Geiger dello spettro ai raggi X (CuKα) di un campione di polipentadiene 1,4 *trans* amorfo (A), e di un campione di polipentadiene 1,4 *trans* isotattico, nella modificazione smettica (B) e nella modificazione cristallina (C).

La distanza media tra le catene può essere valutata dalla presenza di due intensissime riflessioni equatoriali a $d = 4{,}85$ Å e $d = 4{,}35$ Å. Tenuto conto che il valore sperimentale delle densità è 0,97 e che il periodo di identità è 4,8 Å è da scartare per il polimero qualunque struttura per la quale occorra sistemare più di una unità monomerica entro tale periodo. Su basi roentgenografiche non sono cioè da prendere in considerazione possibili concatenamenti 3,4 sindio e 3,4 iso, i quali pure, all'IR, potrebbero risultare caratterizzati da un doppio legame interno

del tipo *trans*, presente nella catena laterale. Per quanto riguarda l'ordinamento sterico dei gruppi $\rangle CH—CH_3$ esso non può essere che di tipo isotattico dato che il numero di unità monomeriche contenute nel periodo di identità è uno.

Mentre gli spettri ai raggi X della modificazione smettica e della modificazione cristallina differiscono notevolmente, gli spettri IR sono molto simili tra di loro (fig. 2), mostrando solo qualche lieve spostamento di frequenze e qualche variazione di intensità. Ciò significa che lo spettro IR della catena

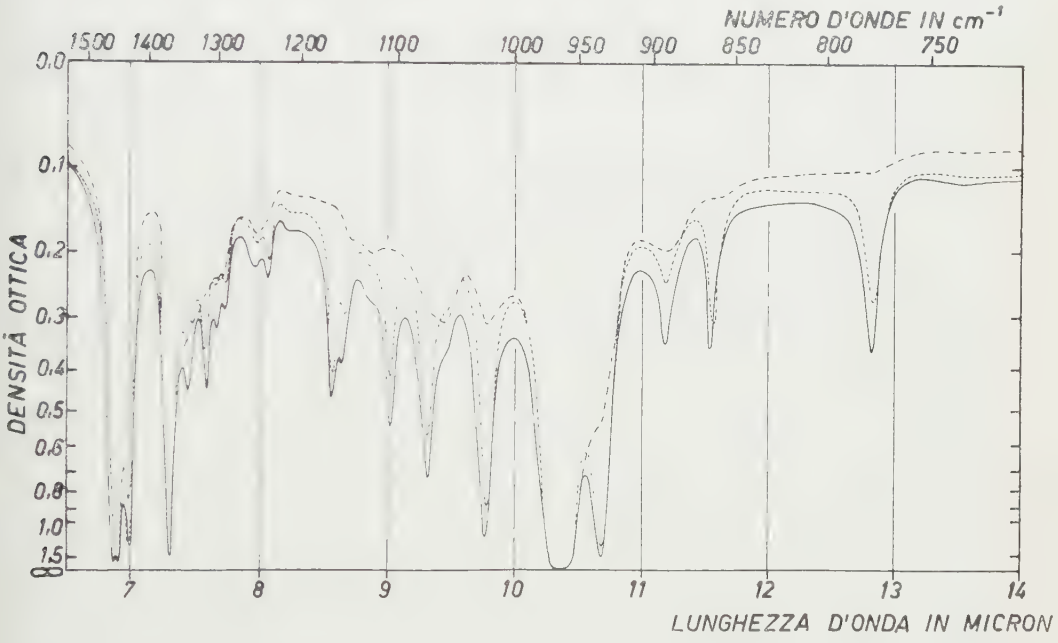


Fig. 2. – Spettri IR di un campione di polipentadiene 1,4 *trans* ottenuto dall'isomero *trans* puro.

—— modificazione cristallina
– – – – – modificazione smettica
–·–·–·– allo stato fuso.

polimerica non risente sensibilmente delle interazioni tra macromolecole vicine. Tale spettro sembra determinato essenzialmente dalla regolarità di conformazione della catena e poiché una conformazione regolare può essere realizzata anche quando non esiste un reticolo tridimensionalmente ordinato, come nella forma smettica, ciò spiega come lo spettro IR non risenta molto del grado di ordine esistente nelle direzioni perpendicolari agli assi delle catene, analogamente a quanto è stato osservato per altri polimeri cristallini [3].

L'intensità delle bande IR a 12,80 μ; 11,54 μ etc. non può quindi essere ritenuta una misura della cristallinità, intesa come ordine nelle tre dimensioni.

(3) G. NATTA, «Makromol. Chemie», *35*, 93 (1960).

Dipendendo dalla regolarità di conformazione delle catene esse sono tuttavia una misura della regolarità di struttura di queste, intesa come ripetizione regolare di una unità strutturale stericamente definita. È stato determinato, per i vari polimeri esaminati, il rapporto tra l'intensità della banda a 11,54 μ (che è una delle bande presenti solo nello spettro del polimero solido) e la banda a 2,32 μ, che è una banda praticamente indipendente dallo stato fisico del polimero. Tale rapporto, che è una misura dell'intensità relativa della banda, è risultato molto più alto (fig. 3) per i polimeri ottenuti dall'isomero *cis* o da quello *trans* che da miscele di tali isomeri (in scala relativa convenzionale, 100 per i polimeri ottenuti da isomeri puri, 68 per i polimeri ottenuti da miscele 50–50).

Analoghi risultati si hanno prendendo in considerazione invece che la banda 11,54 μ, la banda a 12,80 μ.

Conclusioni.

I polipentadieni ottenuti per polimerizzazione dell'isomero *cis* o di quello *trans* con i catalizzatori eterogenei sopra indicati risultano stereoordinati sia per quanto riguarda la configurazione del doppio legame, che è sempre *trans*, sia per quanto riguarda la configurazione degli atomi di carbonio asimmetrici, che è risultata isotattica. Tali polimeri possono quindi essere chiamati ditattici [4].

La tassia di tipo isotattico nella configurazione degli atomi di carbonio asimmetrici ci sembra attribuibile alla presenza di una superficie catalitica eterogenea ordinata, analogamente a quanto si verifica nella polimerizzazione isotattica delle α-olefine.

Si deve ritenere che la polimerizzazione avvenga con lo stesso tipo di apertura sia che si impieghi l'isomero *cis* che l'isomero *trans*, in accordo con quanto è stato sperimentalmente dimostrato per certi polimeri diisotattici [5], per i quali in entrambi i casi è stata osservata una apertura di tipo *cis*. Conseguentemente, partendo da un isomero puro del pentadiene si otterrà un polimero stereoordinato di tipo isotattico solo nel caso che la presentazione del monomero rispetto al centro attivo sia sempre la stessa. Nel caso invece che nello stesso centro attivo polimerizzino successivamente una molecola di isomero *cis* ed una di isomero *trans* del pentadiene si dovrebbero ottenere unità enantiomorfe. La presenza di una cristallinità, sia pure minore, nei polimeri da miscele 50 %, che è in contrasto con quanto si verifica nella copolimerizzazione statistica può essere attribuita ad uno o ad entrambi i seguenti motivi:

a) ciascun centro attivo agisce in modo elettivo rispetto ad un tipo di isomero, il quale perciò reagisce, su quel centro attivo, con maggiore velocità dell'altro tipo di isomero;

(4) G. Natta, F. Danusso, « J. Polymer Sci. », *34*, 3 (1959).

(5) G. Natta, M. Farina, M. Peraldo, P. Corradini, G. Bressan, P. Ganis, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (8), *28*, 442 (1960).

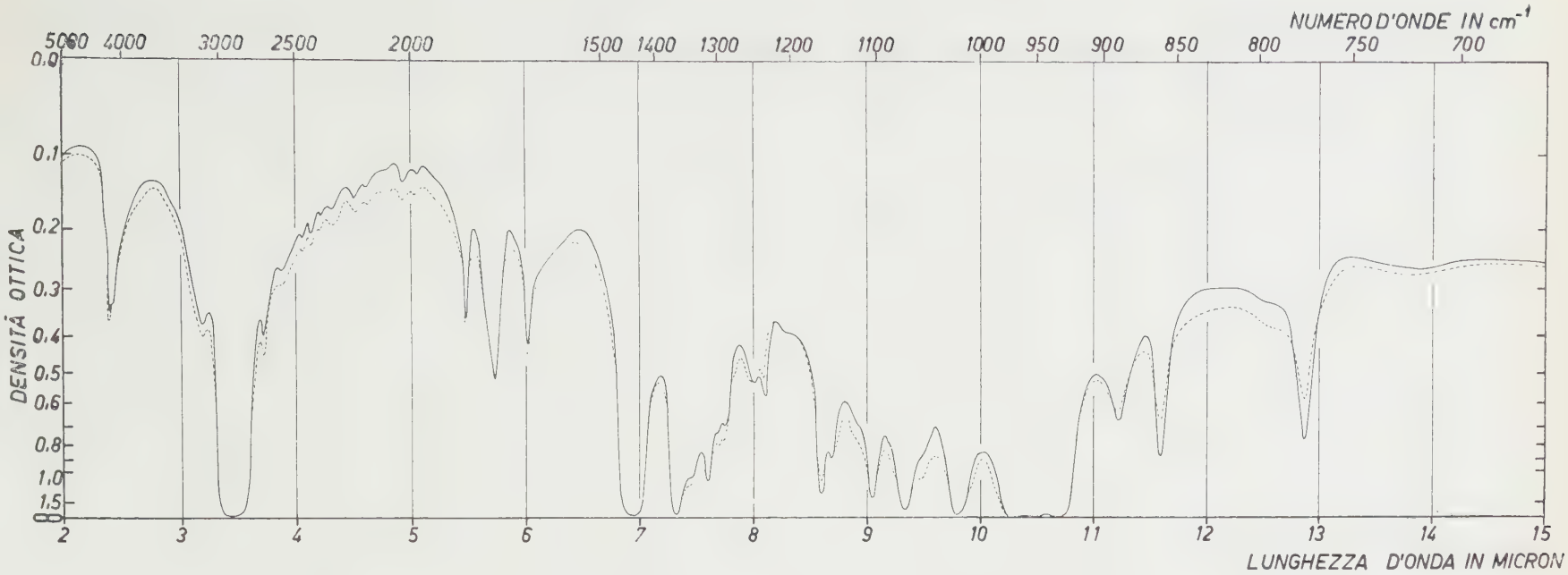


Fig. 3. – Spettri IR di campioni di polipentadiene 1,4 *trans* isotattici:

—— campione ottenuto impiegando l'isomero *cis* o quello *trans* del pentadiene 1,3

– – – – – campione ottenuto impiegando una miscela 50 % dei due isomeri.

b) considerando una singola catena in accrescimento la reattività dei due isomeri dipende dalla struttura dell'ultima unità polimerizzata, in modo da favorire la successione di unità monomeriche aventi la stessa configurazione.

Il fatto che l'abbassamento della temperatura di fusione dei polimeri ottenuti da miscele sia relativamente piccolo rispetto alla diminuzione dell'intensità delle bande nello spettro IR, può essere attribuito al fatto che la composizione sterica del polimero non è omogenea e sono presenti macromolecole contenenti sequenze isotattiche relativamente lunghe. La temperatura di fusione può essere influenzata anche dal fatto che è possibile un parziale isomorfismo tra unità monomeriche di configurazione enantiomorfa cosicché un tratto di catena è capace di cristallizzare anche se contiene una piccola percentuale di unità enantiomorfe molto disperse.

Poiché il polipentadiene, diversamente dalle poli–α–olefine, possiede atomi di carbonio asimmetrici, le sequenze di unità isotattiche dovrebbero risultare otticamente attive. La mancanza di attività ottica del polimero è evidentemente da attribuirsi all'equivalenza statistica di sequenze *d* e *l*. È da ritenere che nel polimero si abbiano, insieme con macromolecole inattive per compensazione interna (mesomorfe), macromolecole che presentano attività ottica in diverso grado e di diverso segno, in miscela racemica tra di loro.

Geologia. — *L'ambiente di formazione della « Scaglia rossa » toscana* (*). Nota (**) del Corrisp. LIVIO TREVISAN.

La « Scaglia rossa » toscana è un tipo di sedimento marino che ha dato luogo alla formulazione di interpretazioni molto vaghe per quanto riguarda l'ambiente in cui si è formato. Il problema presenta interesse per due aspetti: il primo riguarda la genesi del sedimento stesso e le condizioni di ambiente in cui si è formato; il secondo riguarda la storia evolutiva della geosinclinale dell'Appennino durante il Cretaceo e l'Eocene, l'intervallo di tempo in cui la « Scaglia rossa » si è formata.

Si tratta in realtà di un tipo di sedimento tutt'altro che comune. Senza ripetere i particolari delle conoscenze litologiche e paleontologiche, ricordo qui brevemente le caratteristiche più particolari della « Scaglia toscana ». È un sedimento che oscilla da luogo a luogo tra un'argilla appena marnosa e una marna, di colore esclusivamente o prevalentemente rosso. Si prescinde per ora da quelle intercalazioni diverse che si osservano in alcuni luoghi, come gli strati di microbrecce calcaree e – più raramente – conglomerati classati gravitativamente, in quanto rappresentano materiali in certo modo estranei all'ambiente, perché trasportati sul posto da agenti particolari come le onde torbide.

Il carattere pelagico del sedimento è indicato dai foraminiferi contenuti e dalla finezza del materiale; il colore rosso e le intercalazioni di biossido di manganese che talora si osservano, fanno ritenere che la sedimentazione sia avvenuta in ambiente ossidante.

Ma ciò che più sorprende ed esige una spiegazione è il fatto che la « Scaglia » toscana rappresenta con poche decine di metri di spessore il sedimento che si è formato in un intervallo di tempo lunghissimo, il Cretaceo per intero o quasi e l'Eocene, cioè una durata di una settantina di milioni d'anni. Per concorde opinione degli studiosi più recenti, è da escludere che lo scarso spessore della « Scaglia » si possa attribuire a lacune stratigrafiche dovute a emersione di terre.

G. Merla, nel 1952 (*Geologia dell'Appennino settentrionale*, « Boll. Soc. Geol. Ital. », vol. LXX, 1951, Roma 1952) ha fatto una messa a punto critica delle conoscenze e dei problemi concernenti la « Scaglia », e a questo lavoro si rinvia il lettore per ulteriori informazioni. Dal punto di vista paleontologico–stratigrafico è risultato che la massima parte della « Scaglia » appartiene all'Eocene (almeno nei luoghi studiati) e di conseguenza al Cretaceo si deve attribuire una sedimentazione eccezionalmente scarsa. Come interpretare questo fatto? La spiegazione che è stata data (ed è la più spontanea) è quella

(*) Presentata nella seduta del 19 novembre 1960.

(**) Redatta nell'Istituto di Geologia e Paleontologia dell'Università di Pisa.

che ammette un ambiente pelagico, profondo, dove gli apporti terrigeni erano estremamente scarsi.

Ma si possono prospettare spiegazioni diverse, e tale è lo scopo di questa Nota.

Anzitutto occorre ricordare che le facies dei depositi sottostanti e soprastanti sono a loro volta non definibili come profondità. Al letto della « Scaglia » si trovano ora i calcari a Calpionelle (Titonico superiore e parte del Cretaceo inferiore) ora direttamente i diaspri del Malm; al tetto la torbidite « macigno », tutte formazioni di profondità incerta e discussa.

Qualche nuova spiegazione dei caratteri della « Scaglia » può essere suggerita dall'esame della successione delle facies nello spazio anziché nel tempo.

Nell'Appennino settentrionale, procedendo dal Tirreno all'Adriatico, al Cretaceo–Eocene si incontrano facies variabili come segue:

1° Argille e marne nerastre con intercalazioni di strati di calcare nerastro, detto « palombino ». Questa facies si presenta nelle serie alloctone. Spessori grandi.

2° « Scaglia rossa » della Toscana marittima. Sedimento argilloso o marnoso. Spessori minimi.

3° « Scaglia » o « Scisti varicolori » della Toscana orientale (a est di Firenze e Arezzo). Simile alla precedente ma più marnosa. Spessore probabilmente un po' maggiore.

4° « Scaglia rosata e cinerea » delle serie Umbro–marchigiane. Molto più ricca in calcare, rossa o rosata solo parzialmente. Spessori rilevanti.

5° Benché non si presentino nell'Appennino settentrionale, ma più a sud, seguono verso oriente le facies calcaree del Cretaceo (ed Eocene), con grandissimi spessori ed episodi di scogliera.

Un primo raffronto tra le diverse facies eteropiche si può fare considerando l'ambiente geochimico e le sue variazioni. La facies n. 1 (argille scure con palombini) è da ritenersi di ambiente riducente, molto ossidante quello della scaglia toscana (2 e 3, specialmente 2), meno ossidante quello della Scaglia Umbro–marchigiana (fino a debolmente riducente per la scaglia cinerea). Non occorre prendere in considerazione l'ambiente, d'altronde vario, delle facies n. 5, caratterizzate da grandi spessori di calcari.

Se per ipotesi immaginiamo che il mare della geosinclinale appenninica fosse dominato in quel tempo da correnti approssimativamente da ovest verso est, possiamo così delineare una spiegazione delle variazioni di facies:

Dalla zona 1, probabilmente una fossa, di ambiente riducente, le acque che si dirigono verso est hanno un contenuto rilevante di CO_2, derivata dalle trasformazioni delle sostanze organiche deposte sul fondo. La zona 2 (facies di scaglia rossa) risente del forte contenuto di CO_2 delle acque, che ostacola, ora del tutto, ora in parte, la sedimentazione del carbonato di calcio. Rimane pertanto un sedimento argilloso estremamente scarso che può qualificarsi come residuale. La stessa sedimentazione dei colloidi residuali può essere stata ostacolata dalla corrente. Il carattere ossidante e talora ultra ossidante dell'ambiente può essere attribuito a una profondità minore, per cui

il fondo marino si sarebbe trovato al di sopra del limite di ossido-riduzione. Una posizione di dorsale interposta ad aree più infossate spiega anche ragionevolmente la scarsità di apporti terrigeni.

La zona 3, come intermediaria per caratteri tra le due contigue, non richiede commenti particolari. Le zone 4 e 5, caratterizzate da grandi spessori e abbondanza di sedimentazione calcarea (specialmente la 5) si possano interpretare come aree in cui si è avuto un relativo eccesso di precipitazione dei carbonati come conseguenza dell'arricchimento in bicarbonati che le acque hanno avuto proveniendo da ovest.

Con queste considerazioni si prospetta la possibilità che la « Scaglia toscana » si sia deposta in un ambiente particolare (dominato da correnti e da elevato contenuto in CO_2) ed inoltre meno profondo delle aree contigue a est e a ovest. Il problema della profondità non è ancora risolto, ma si può concludere che non ci sono ostacoli per prendere in considerazione anche la possibilità che si tratti di profondità molto modeste.

Sarà compito di ulteriori ricerche, attualmente in corso, analizzare la situazione in rapporto all'evoluzione della geosinclinale. Per ora sembra di poter affermare che la situazione schematizzata sopra si è verificata specialmente nel Cretaceo. Nell'Eocene, sia per la diversa subsidenza delle zone di facies sopra distinte, sia per la diversa velocità di sedimentazione, la morfologia del fondo della geosinclinale è venuta a modificarsi, tanto che, intorno alla fine dell'Eocene, con l'arrivo in massa di sedimenti sinorogenici, le zone 1 e 2 dovevano essere infossate rispetto alle zone orientali, cosicché le torbiditi (macigno e arenaria superiore) si sono incanalate da NW a SE ricoprendo sia l'area di sedimentazione della scaglia toscana, sia quella più occidentale delle argille con palombini.

Botanica. — *Singolari caratteri di alcune specie e varietà di* Alternanthera (*Amarantacee*) *e di altre Fanerogame.* Nota (*) del Socio Alessandro Trotter.

Seguo da un decennio lo sviluppo, sia in colture di piena terra che in vaso, di alcune Varietà orticole di *Alternanthera*, impiegate nel giardinaggio per bordure o per quei lavori a mosaico un tempo in grande favore (1). Oggi generalmente ridotti, causa il notevole impiego di manodopera ch'essi richiedono anche prima della collocazione a dimora delle relative talee. Pertanto, l'impiego delle *Alternanthera* persiste bensì, ma solo sporadicamente, cioè dove le condizioni ambientali si sono dimostrate le più favorevoli.

Le Varietà in senso linneano generalmente in uso, appartengono a due stipiti specificamente ben distinti: l'uno a foglie ellittico–spatulate di un bel colorito verde brillante (*Alter. Bettzichiana*), l'altro a foglie ellittico–allungate a colorito più o meno rossastro, o piuttosto bruno, con qualche riflesso metallico o verdastro, specialmente sull'ipofillo e lungo le nervature (*Alternanthera amoena*) (Tav. I).

Ambedue originarie del Brasile ed a carattere spiccatamente termo–igrofilo, nonché eliofile. In Europa furono importate, si ritiene dal 1850 al 1865, ma in Italia certamente prima (1842) (2), o prima ancora). Infatti, secondo P. A. Saccardo, *Cronologia della Flora Italiana*, Padova 1909, pp. 81 e 343), una *Alter. repens* (L.) Steud. era coltivata in molti Orti italiani sino dal 1772; un'*Alter. paronychioides* A. Saint Hil., era presente nel 1869 nello Stabilimento Orticolo It. L. Croff, e nel 1870 nell'Orto Bot. di Padova. Così pure, dello stesso autore, troviamo tali notizie in *Cronologia delle piante da giardino o da campo coltivate in Italia* (« L'Indicatore alfabetico », San Remo 1917, p. 50).

Le *Alternanthera* sono coltivate come erbe annuali, mentre nei paesi di origine si comportano come erbe perenni e suffruticose. In Europa, pur potendo modestamente fiorire, non producono semi fertili e pertanto si debbono moltiplicare esclusivamente per talee, queste però a radicazione facile e pronta.

Già dal 1950 ero stato in corrispondenza con la Stazione Sperimentale di Floricoltura di San Remo, e la Direttrice prof.ssa Eva Mameli Calvino,

(*) Pervenuta all'Accademia il 29 ottobre 1960.

(1) Fino dal 1948–49 (a Portici, Napoli) mi ero posto in contatto con le *Alternanthera*, ivi coltivate e disponibili presso Case orticole del luogo.

(2) R. De Visiani, *L'Orto Botanico di Padova nell'anno MDCCCXLII*, con tav. Con catalogo delle piante che si coltivano nell'Orto Botanico di Padova nell'anno 1842. Vi troviamo le seguenti (p. 53): *Altern. Achyranta* R. Br., *ficoides* R. Br., *filiformis* Schrad., *polygonoides; sessilis* R. Br., *repens* (L.). Nomi da inserire tra i sinonimi delle due specie considerate.

mi aveva confermato che in Liguria la coltura delle *Alternanthera* era in disuso, probabilmente per le già esposte ragioni. Piante da me inviate nel 1952, malgrado il clima migliore, erano rimaste sterili, per aborto, pare dell'ovario, mentre il polline appariva normale.

L'attività vegetativa delle due specie culmina nel periodo più caldo dell'anno (luglio–agosto), durante il quale il loro fogliame va intensificando variazioni di colorito e di forma, parallelamente all'accrescersi delle piante in altezza (sino a 20–30 cm.).

Le Varietà collegate a *Bettzichiana* posseggono, allora, lamine fogliari più o meno assimmetriche e contorte, inoltre maculate più o meno di giallo, talora di un bel giallo dorato. Quelle collegate con *amoena*, posseggono foglie allungate e a margini più o meno involuti, talora le terminali quasi bacelliformi, ed il loro colorito per alterazioni o scomparsa della clorofilla, ci appare irregolarmente maculato di un colore rossastro più o meno intenso. Sull'ipofillo, possono persistere sottili tracce verdi, con grandi sfumature e variazioni di tinte anche nel resto della lamina.

Tale variabilità contribuisce ad accrescere il loro pregio ornamentale ed i contrasti già notevoli tra le due specie. Non è perciò da stupire se nelle opere orticole o di giardinaggio [3], nonché in quelle rigorosamente botaniche [4], troviamo associate le due specie ad una ricca nomenclatura botanica, e non di fantasia come accade per piante esclusivamente coltivate, mentre i loro svariati e variabili aspetti non furono sufficientemente valutati dagli Autori:

ALTERNANTHERA Forsk. (Syn. *Teranthera*, *Gomphrena*, *Mogiphanes*).

ALTERNANTHERA BETTZICHIANA (Regel 1869) Standley 1869. *Alternanthera paronychioides* St. Hilaire, con le seguenti Var., denominate: *amabilis* Lamaire, *albida*, *aurea* Voss 1896, *aurea major*, *aurea nana*, *compacta*, *brasiliensis*, *chromatella*, *ficoides*, *filiformis*, *Kuntzei*, *magnifica*, *picta*, *polygonoides*, *porrigens*, Jacq., O. Küntze, *portoricensis*, *spathulata*, Regel, Voss, *tricolor*, *versicolor*.

ALTERNANTHERA AMOENA (Regel 1869) Voss 1896. *Alter. versicolor* Saubert 1875, *amabilis* Voss 1896, *atripurpurea*, *ficoides*, *fruticosa*, *fulgens*, *Juwel*, *Hermandorfi*, *porrigens* Moq., *purpurea*, *Reinhardii* Voss, *rosea*, *rubronana* Regel 1868, *sessilis*, *spectabilis* Voss 1896, *trichotoma*, *truxilensis*, *versicolor* Hort.

Credo non esistano specie botaniche, sottoposte a coltura, le quali abbiano una così ricca sinonimia, applicata a supposte sottospecie, varietà o forme

(3) Di M. H. Baillon, di L. H. Bailey, di Nicholson et Mottet, di O. Traverso.

(4) ASCHERSON und GRAEBNER, *Synopsis der Mitteleuropaeische Flora*, Leipzig 1919. ENGLER und PRANTL, *Die Naturlichen Pflanzenfamilien*, Leipzig 1934.

botaniche, Nomi, ripeto, non di fantasia come avviene per molte piante coltivate, ma assegnati con criteri sistematici, anche se personali, e secondo le norme della nomenclatura lineana. Persino le due ottime specie, furono da qualcuno, tra loro sinonimizzate ! !

Le grandi Opere sistematiche europee già ricordate, nonché il ben noto *Index Kewensis*, non ci consentono di districare una così complessa sinonimia, ma solo di poter confermare i due nomi specifici qui impiegati entro i limiti delle loro più generali e costanti caratteristiche. Anche il botanico tedesco O. Küntze nella sua poderosa Opera [5], con la laboriosa critica del Genere, in base specialmente ai minutissimi organi fiorali, considera solo altre specie critiche esotiche, ed in particolare *Alt. ficoides* St. Hil., *paronychioides* St. Hil. e *sessilis* R., tutte con presupposte distinte sottospecie e varietà, ma provenienti invece dall'Estremo Oriente. Ben poco ci è dato dedurre in rapporto alle segnalate varietà europee impiegate nel giardinaggio.

Per tale congerie di giudizi e di nomi, dovrebbe essere presa in considerazione l'opinione sintetica espressa da Hans Schinz nelle *Pflanzenfamilien* II Edizione, Bd. 16; C., p. 74), trattarsi cioè di « Spielarten » e per le varie colorazioni, di « Papagaienblatt » (due espressioni calzanti ma che nulla dicono in rapporto alle cause o ragioni di tale variabilità).

Orientandomi su tali giudizi anche se troppo sintetici, ma in base precipuamente ai miei allevamenti ed a nuove osservazioni, ritengo di essere pervenuto ad una plausibile e concreta conclusione. A tal fine, avevo cercato di procurarmi presso Stabilimenti italiani le piante che in qualche modo corrispondessero a talune delle molte denominazioni ricordate; ma senza positivi risultati in quanto corrispondenti qualunque fosse la denominazione, ai tipi eminentemente variabili che io tenevo in allevamento. La Casa francese, ben nota, Vilmorin–Andrieux, alla quale pure mi ero rivolto nel luglio 1957, mi comunicava: « A notre grand régret, ces plantes ont cessé d'être commercialisées par notre firma, et depuis la fin de la guerre, nous n'en detenons plus du tout ». L'ultimo mio tentativo per procurarmi materiali diversi da quelli già in mio possesso, fu con il « Royal Botanic Garden » di Kew, il cui premuroso Direttore, dott. G. Taylor, m'inviò 7 piantine delle varietà da loro tenute in coltura, e precisamente con le seguenti denominazioni: *Alter. Bettzichiana*, e varietà *aurea; Alter. amoena*, con le varietà, *aurea*, *amabilis* e *versicolor; Alter. magnifica*; *Alternanthera* « small », non meglio precisata. Tralascio ogni commento su tali denominazioni. Le piante da me allevate da tale nuovo materiale, mi confermarono, anche qui, malgrado i differenti nomi trattarsi sempre di due sole entità fondamentali ma grandemente variabili.

Per risolvere tale complesso ed intricato problema sistematico e biologico, tentai la via degli specialisti delle Amarantacee. Mi rivolsi pertanto (1957) alla « Botanische Staatsammlung » di Monaco di Baviera, che conserva

(5) O. Küntze, *Revisio Genera Plantarum*, Pt. I–III, Würzburg 1891–93.

il ricco materiale dello specialista Süssenguth. In tale materiale però mancava il Gen. *Alternanthera*, mentre lo stesso specialista era deceduto il 7 giugno 1955. Il dott. H. Merkmueller nel darmene comunicazione, mi segnalava il dottor prof. G. H. M. Lawrence, Direttore del « Bailey Hortorium » di Ithaca (New York) dal quale avrei potuto avere notizie precise intorno alle piante ornamentali di origine americana. Il Direttore da me interpellato, mi confermava oltre all'esattezza della denominazione specifica delle due *Alternanthera*, anche la loro origine brasiliana, e strettamente orticola, nomi cioè conferiti a piante già passate allo stato colturale! Il che è significativo.

Perciò, a chiarire e giustificare il groviglio di nomi, di caratteri e di sinonimie a suo luogo elencati, non mi restava che seguire da vicino e lungamente gli allevamenti. I risultati migliori derivarono non tanto da consuete coltivazioni annuali di pienaria, quanto da allevamenti in vaso (5 piantine per ogni vaso) che mi consentirono di seguirle da vicino, di prolungare a volontà la loro vita, portandole alla perennanza. Le talee furono da me controllate allevandole anche in semplice acqua potabile, senza addizioni nutritive, ma con luce e calore sufficienti, ottenendone rapida emissione di radici e anche di germogli. Più sollecite e vigorose le piante derivanti dalla specie *amoena*.

Le mie colture sperimentali ebbero inizio nell'estate 1954 e termine alla fine del 1959. Le talee invasate, al termine della vegetazione annuale, con 16°–18° C. di temperatura, perdono rapidamente le foglie, e con ulteriori abbassamenti lo stesso fusto dissecca. Invece protette dal freddo, si mantengono vegete e più o meno lignificano, trasformandosi in suffrutici. Poi, a cominciare dal maggio, emettono nuovi germogli, specialmente basilari, le foglie si rinnovano, con lamine più o meno regolarizzate e simmetriche ed a colorito normale. Solo con l'ulteriore sviluppo presenteranno le già note e variabili caratteristiche di colore, culminanti nel pieno estate (luglio–agosto), mentre gli stessi germogli basilari della talea, potranno offrire sensibili differenze.

Non può recar meraviglia quindi che tali variazioni morfologiche e cromatiche iniziali, mutevoli e progressive dalla primavera all'estate, abbiano potuto colpire separatamente i botanici e gli orticultori, fuorviandoli nei loro giudizi, spingendoli a creare nuove varietà sistematiche con nuove denominazioni, desunte dalle caratteristiche *presenti nel periodo delle loro osservazioni*, come segue:

ALTERNANTHERA BETTZICHIANA

per forme di sviluppo: *compacta*, *ficoides*, *filiformis*, *fruticosa*, *major*, *nana*, *porrigens;*

per fogliame: *paronychioides*, *polygonoides*, *spathulata;*

per colori e maculazioni: *albida*, *aurea*, *chromatella*, *picta*, *tricolor*, *versicolor*.

per sviluppo: *ficoides*, *fruticosa*, *nana*, *porrigens*, *trichotoma*;
per fogliame: *sessilis*;
per colori e maculazioni: *atripurpurea*, *purpurea*, *rubra*, *versicolor*.

In conclusione, ci troviamo di fronte a caratteristiche instabili, fluttuanti, con notevole parallelismo fra le due specie, di fronte ad eccitamenti ambientali, nutritivi od anche climatici per temperatura, luminosità ed umidità, nonché ad altri di origine genetica, ed ora aggiungo anche di origine patologica, interessanti particolarmente il fogliame. Sotto quest'ultimo aspetto, anche anatomo-patologico, i sintomi morfologici e cromatici, sono particolarmente manifesti e spiegabili.

In *Alternanthera Bettzichiana*, possiamo notare: vascolarizzazione anormale e quindi anche innervazione; anormalità che si ripercuotono sugli interposti parenchimi, e quindi lamine che si deformano s'increspano e s'incurvano. A ciò si aggiungono fenomeni progressivi di alterazione od anche scomparsa della clorofilla. In *Bettzichiana*, si traducono secondo il variabile prevalere o persistere della xantofilla, in fenomeni di ittero, di clorosi o persino di albinismo [6]. In *amoena*, tali alterazioni con scomparsa della clorofilla, rendono invece manifesta la colorazione rossa fondamentale, dovuta ad altro pigmento normale piuttosto che al prevalere della carotina, con tutte le possibili sfumature. Nel loro insieme invece, e nella conclusione, tali alterazioni potrebbero essere considerate quali aspetti di un fenomeno cromatico più generale, cioè la « variegazione » (Panaschierung dei tedeschi). Tali fenomeni, tra i quali in *Bettzichiana* le maculazioni propriamente dette, non sarebbero perciò che un caso particolare della « variegazione », e come gli altri, di assai complessa eziologia.

Meglio note le « variegazioni infettive » (infektiose panaschierung), quali i « mosaici » dovuti all'azione di virus diversi. Qui i cloroplasti sarebbero attaccati dai virus per la loro nutrizione, con scomparsa del pigmento verde e del suo substrato plasmatico, e conseguente liberazione della xantofilla, o di quello rosso, cioè la carotina. Fenomeno affine ma diverso da quello puramente naturale e climatico, che induce la colorazione rossa autunnale nelle foglie di talune piante, influenzata da differente acidità dei succhi cellulari.

Tali differenti variazioni di colorito delle piante in generale, hanno trovato adeguata trattazione in note opere del compianto botanico e fitopatologo tedesco E. Kuester dell'Università di Giessen [7].

Pertanto le variegazioni e le deformazioni delle due *Alternanthera*, altro non sono che una nuova virosi di piante coltivate, e come le altre, a causa

(6) E. PANTANELLI, *Studi sull'albinismo nel Regno vegetale*, I–IV in « Malpighia », 1902, 1903, 1904, con tav. colorata. L'albinismo è qui considerato sintomaticamente, senza discriminazioni eziologiche.

(7) ERN. KUESTER, *Die Pflanzenzelle*, II Ediz. Jena 1951, 766 pp., 422 figg.; *Pathologische Pflanzenanatomie*, III Ediz., Jena 1925, 558 pp., 442 figg.

del terreno maggiormente predisposte a tale tipo d'infezioni [8]. Allo stesso modo, nel caso nostro, delle variegazioni fogliari e fiorali del Tulipano, salite a dignità di Varietà o di Specie orticola, e così dicasi di altri differenti casi a carattere teratologico [9].

Tali variegazioni infettive o virosi delle due *Alternanthera* furono importate così dal paese di origine (Brasile), oppure si sono costituite in Europa dopo l'importazione? Sembrerebbe valida la prima ipotesi, secondo la generica opinione del prof. Lawrence già riportata; quindi si potrebbe ritenere che tale virosi già esistesse nel paese di origine. Ma ciò che mi ha rafforzato nell'ipotesi fondamentale d'una origine patologica, remota o recente delle due Specie, è stato il fortuito rinvenimento, nel 1958, di una piantina di *amoena* perfettamente sana, e mantenutasi tale anche nella perennanza e naturalmente, tra migliaia e migliaia di virosate. A volerle dare un nome, la potrei definire come *polygonoides*, per il suo fogliame regolarmente distanziato, foglie lungamente ellittiche perfettamente simmetriche, di statura superiore a quella delle piante virosate e di colore bruno uniforme etc. Si è dovuto trattare di una talea o guarita spontaneamente, o geneticamente immune e rimasta tale per effetto della moltiplicazione, malgrado il contatto con le altre virosate. Quindi, tra le sinonimie a suo luogo riportate, talune potrebbero riferirsi *a piante normali*, sane, ma solo di accidentale apparsa!

Le presenti osservazioni ci inducono a dover considerare la specie vegetale come suscettibile di essere influenzata morfologicamente, oltre che dalla nutrizione e dal clima, anche da agenti patogeni particolari, tra loro in simbiosi antagonista, capaci d'imprimerle ingannevoli caratteristiche, atte persino ad assumere una utile funzione ornamentale od in altro modo caratteristica. Il Tulipano variegato, pregio dell'orticultura, è ritenuto effetto da una virosi trasmissibile a mezzo dei bulbi, e così altre variegazioni ed albinismi fogliari. Altri esempi non cromatici ma morfologici, ci sono offerti dalle piante coltivate od anche spontanee, suscettibili di analoghe interpretazioni. La *Celosia cristata* ad esempio, ci appare come una « fasciazione », fenomeno teratologico, e così il « krepoek » fogliare del Tabacco « Aja Soluk » del Leccese, una mutazione egualmente teratologica [10]. Quale sede di

(8) A. TROTTER, *Strutture ed attività di miceli fungini e loro probabile rapporto con la natura e l'origine dei virus*, « Rendiconti Accad. Naz. Lincei », vol. XXIV, 1958, fasc. IV, pp. 380-385.

(9) D. ATANASOFF, *Virus Diseases of Plants*. A. *Bibliography*; Sofia Houdonik, Print Co., 1934, 219 pp.; M. A. BEAUVERIE, in « Ananles Service Botan. et Agronom. », Tunisie 1932, t. IX, 175 pp.; Fr. HOLMES, *Handbuch of Phytopathogenic Viruses*. Minneapolis, 1939; M. A. SMITH KENN, A. *Textbooch of Plant. Virus Diseases*. London 1937; G. ROLAND, *Virologie et Botanique*, « Bull. Soc. Bot. Belg. », t. 92, pp. 103-109.

(10) A. TROTTER, *Nostre conoscenze sulle virosi del Tabacco ed in particolare sul « mosaico »*, « Boll. Tecnico Ist. Scafati », 1933, vol. 30, pp. 26; *Una mutazione teratologica nel Tabacco « Aja Soluk » affine al « Kroepoek » riscontrata nel Leccese*, loc. cit., « Scafati », 1939, pp. 13, 2 fig., 4 tavv.

numerose virosi pure tra le Solanacee; vi è da ricordare il *Cestrum Parqui* ed in particolare i *Solanum* (Patata e Pomodoro) sede di numerose modificazioni morfologiche trasmissibili, capaci di imprimere caratteristiche sistematiche quasi specifiche [11]. Merita pure segnalazione una virosi della Canna da zucchero detta « sereh », e da un punto di vista particolarmente sistematico, l'*Oenothera nanella*, variazione virosata di *Oenothera Lamarckiana* secondo Zeijlstra [12].

Entità sistematiche di origine patologica sarebbero quelle provviste di tubercoli radicali di origine batterica, controversi quelli degli *Alnus*, positivi e studiatissimi quelli delle Leguminose, nonché quelli da me scoperti su *Datisca cannabina* [13], accolti anche dal prof. R. Pirotta nel suo Trattato *Fisiologia vegetale*, nonché nell'Opera di Lutz: *Les microrganismes fixateurs d'azote*, Paris 1904, studiati di poi anche dal Montemartini. Inoltre gli « acarodomazi » fogliari di molte piante europee ed esotiche divenuti pur essi contrasegni utilizzati dalla sistematica. Le numerose modificazioni ipertrofiche del sistema radicale (ad esempio « micorrize »), nonché altre più vistose simbiosi soprattutto radicali, nelle piante formicare di Giava (*Acacia*, *Cecropia*, *Cordia*, *Myrmecophyllum*) classicamente illustrate dal nostro Beccari [14] sono altrettanti fenomeni del medesimo ordine, collegati ad una loro origine patologica e di un particolare significato o valore anche nella sistematica delle Fanerogame.

Nel medesimo ordine di fenomeni è da segnalare nuovamente altra Solanacea, la Patata, soggetta a fatti degenerativi da virus, capaci di annullare indirettamente la tuberizzazione, nonché ad altre deviazioni morfologiche ipogee, e negli organi fogliari arricciamenti vistosi (questi anche nel Pomodoro), e foglie con margine involuto bacelliforme nonché forme di nanismo in tutta la pianta ed in tutti gli individui provenienti dal medesimo lotto di tuberi. Per analogia, si potrebbero qui considerare le tuberizzazioni schiettamente parassitarie da Funghi ed altre morfosi mimetiche,

(11) A. TROTTER, *Le « virosi » del* Cestrum Parqui, *l'Her.*, « Ricerche, osserv., divulgazione fitopatologiche etc. », Portici, vol. IV, 1935, pp. 18–24, 1 fig., 1 tav.; *Prove di allevamento e di selezione della Patata a mezzo di semi*, loc. cit., Portici, vol. VIII, 1940, pp. 64, 8 figg. (Collabor. prof. Cristinzio).

(12) H. H. ZEIJLSTRA, *Versuch einer Erklaerung der « Sereh » Erscheinung der Zuckerrohrs*, « Ber. Deutsch. Botan. Gesell. », 1911, Bd. 29, pp. 330–333; Oenothera nanella *de Vries, eine krankhafte Pflanzenart*, « Biolog. Centralbl. », 1911, Bd. 31, pp. 125–138, 5 figg.

(13) A. TROTTER, *Intorno a tubercoli radicali di* Datisca cannabina, « Bull. Soc. Bot. Ital. », Firenze 1902, pp. 50–52; *Ulteriori osservazioni sui tubercoli radicali di* Datisca cannabina *L.*, « Bull. Soc. Bot. Ital. », marzo 1906, pp. 53–57 e « Giornale di Viticol. ed Enologia », XIV, Avellino 1906, N. 3, pp. 4; *Osservazioni sugli acarodomazi*, « Bull. Soc. Bot. It. », 1904, pp. 82–86; L. MONTEMARTINI, *Sui tubercoli radicali della* Datisca cannabina *L.*, « Atti Acc. Lincei », vol. XVI, 1906, pp. 144–146; *Studio anatomico sulla* Datisca cannabina *L.*, in « Annali di Botanica », vol. III, 1905, pp. 102.

(14) O. BECCARI, *Nelle foreste di Borneo. Viaggi e ricerche di un naturalista.* Vol. in–8° gr., di XVI–667 pp., 78 figg., 4 carte, Firenze 1902; A. TROTTER, *Osservazioni sugli acarodomazi*, « Bull. Soc. Bot. Ital. », 1904, pp. 182–186.

da me segnalate, od anche descritte e figurate già da molti anni su varie piante, ma inizialmente proprio su *Amaranthus* (*sylvestris*) [15]. Tutti argomenti i quali meriterebbero di essere ripresi e studiati con maggiore ampiezza e profondità, e possibilmente dal lato sperimentale. Anche la patologia animale e specialmente umana ci potrebbe offrire qualche analogo fenomeno, con i suoi tipi clinici di natura somatica, con la teratologia, talora ereditaria, e con quelle manifestazioni patologiche le quali, più che malattie, dovrebbero essere chiamate « affezioni ».

Pertanto le deformazioni e variegazioni delle due *Alternanthera*, non rappresentano che una nuova virosi, non ancora registrata dalla Patologia, per lungo tempo mascherata dai pregi acquisiti nel giardinaggio, ma con una variabilità, già da tempo ritenuta di origine genetica.

Tale supposta origine, e non ambientale, ci induce a dover considerare la « specie sistematica » sotto un nuovo profilo, potendo i suoi caratteri originari e fissi, essere influenzati da azioni esteriori patologiche, capaci di deviarli verso nuove combinazioni. Fenomeni interessanti non solo per il loro aspetto somatico originario, botanico e fitopatologico, ma anche ed ancor più se considerati alla luce della Biologia generale.

Non deve recar meraviglia che una qualsiasi specie possa assumere un tale poliformismo patologico, quando molte altre, considerate come del tutto normali possono offrirsi egualmente poliforme; allorché di esse si possano raccogliere o meglio esaminare, non pochi individui soltanto ma centinaia e forse migliaia, della specie ritenuta come normale e costante. Ci sarà dato in tale modo di rinvenire individui che più o meno si allontanano dallo schema linneano, o da quello tracciato da altri botanici sistematici. Io l'ho potuto scoprire ed accertare con la ricerca e lo studio di migliaia di esemplari di *Galanthus nivalis* L., di *Cerastium semidecandrum* L., di *Lycopsis arvensis* L. e di altre Borraginee [16]. Ne sono risultate alcune nuove entità sistematiche che potranno essere registrate dalle Flore.

Perciò, una specie vegetale linneana non deve essere considerata come un qualche cosa di rettilineo e di immutabile bensì di poliedrico, del quale normalmente non scorgiamo che una delle facce, mentre le altre, occultate, le possiamo rinvenire ed individuare solo con una ricerca tra migliaia d'individui. Cosa agevole per specie gregarie, ma non altrettanto per altre, disseminate oppure rare. Fenomeni anche questi i quali apparterranno ad una « variazione brusca o discontinua o mutazione ». Però *brusca*, non nel senso di una nuova apparizione *improvvisa* ex novo, come alcuni ritengono, bensì

(15) A. TROTTER, *Un caso di tuberazione parassitaria in piante di* Amarantus sylvestris, « Bull. Soc. Ital. », 1908, pp. 117–120; *Le ragioni biologiche della cecidogenesi*, loc. cit., 1901, pp. 557–575; *La Cecidologia. Nostre conoscenze intorno alle galle*, « Rivista di Fisica, Matem., Sc. Natur. », Napoli 1927, vol. II, pp. 143–156, 1 fig.

(16) A. TROTTER, Galanthus rivalis *L. e* G. major *Red. Contributo allo studio della variabilità*, « Annali di Botanica », Roma, vol. 13°, pp. 185–236, 2 figg., 4 tavv. *Intorno a* Lycopsis variegata *L. var.* albiflora *Trott. ed analoghe variazioni cromatiche nelle Borraginee*, « Bull. Soc. Botan. Ital. », 1917, pp. 71–77.

solo *occultata*. Di tale variazione, la Teratologia potrebbe fornirci molti e svariati esempi, tra i quali quelli considerati geneticamente come ereditari, non fanno che confermare la presente tesi, trattarsi cioè di fenomeni naturali ma occultati [17], nel senso qui indicato.

Comunque, al concetto linneano di specie vegetale costituita da individui a caratteri fissi trasmissibili (o se non trasmissibili, varietà), deve essere sostituito un criterio più elastico che ammette una variabilità contenuta entro certi limiti, per i quali furono già distinte specie: collettive, elementari, disgiunte, grandi e piccole, specie, linneane, jordaniane, vicarianti, ed ora aggiungo anche patologiche o di origine patologica, od a caratteri patologici.

(17) M. Puglisi, *Di alcune osservazioni ed esperienze intorno alla scomparsa e persistenza di caratteri nelle forme vegetali*, « Rend. Acc. Lincei », XX, 1911, pp. 6–10, con figg.: *La eredità della fasciazione nella* Bunias orientalis *L.*, « Annali di Botan. », XII, 1914, pp. 345–360, tavv. III–VII.

Fig. A – *Alternanthera Bettzichiana.*

In a^1, a^2 due foglie normali.

Fig. B – *Alternanthera amoena.*

b^1, b^2, foglie normali, più piccole del normale;
b^3, foglia ingrandita discolare: superiormente ipofillo, inferiormente epifillo

Botanica. — *Fruttificazione allo stato di plantula in* Chenopodium amaranticolor, *e considerazioni sulla pedogenesi, neotenia e fenomeni affini.* Nota (*) del Corrisp. ROBERTO SAVELLI.

Il reperto consegnato in questa Nota è certamente uno dei più belli della letteratura, nell'ordine dei fenomeni accennati nel titolo; tuttavia esso vien quasi come un relitto da un esperimento abbandonato.

Volevo riprendere l'esame degli effetti che può indurre su diverse piante una denutrizione assai spinta, conseguita mediante coltura su carbone umettato con acqua monodistillata, povera di sostanze disciolte (cfr. questi « Atti », vol. XXVII, pp. 185–188; e vol. XXVIII, pp. 27–31). Mi proponevo peraltro di complicare la ricerca con la somministrazione per via radicale di speciali sostanze lipidiche attraverso un veicolo che pensavo potesse facilitarne l'assorbimento, e cioè lanolina incorporata nel carbone insieme con acqua. Accadde invece che questa somministrazione non fu neanche iniziata, e di tutto il progetto rimase in atto solo qualche coltura in carbone impregnato di lanolina, la quale veniva a costituire una specie di concimazione organica, che rompeva l'estremo rigore delle denutrizioni in precedenza sperimentate.

Di tali colture qui interessa soltanto una serie impiantata con *Chenopodium amaranticolor* Coste et Reynier, che secondo Ulbrich è la specie più grande del genere. Infatti gli esemplari dell'Orto Botanico di Padova, come m'informa il collega Cappelletti, raggiungono frequentemente i 3 metri e $^1/_2$; qui a Bologna vengono un po' meno bene.

Solo dai semi di poche provenienze, italiane (Modena, Roma, Palermo) o straniere (Romania) ottenni germinazioni in laboratorio, in cassula Petri od in vaso. Semi di altre provenienze, come per esempio quelli di Padova, rimasero refrattarî anche agli artificî della vernalizzazione, ed in laboratorio non mi vollero germinare, mentre invece nella libera natura nascono generalmente dopo avere svernato.

La serie di cui mi occupo fu seminata in cassula il 19 febbraio 1960: la germinazione fu tarda, non uniforme, cioè con nascite stentate e distanziate nel tempo. Solo il giorno 8 marzo potei fare il trasferimento di una buona serie di plantule in carbone–lanolina, entro i consueti vasetti di plastica, da 10 o da 25 cm^3 di capacità. In questo caso la differenza di volume del substrato concesso non ha importanza: per colpa della lanolina, lo sviluppo radicale si mantiene comunque ridottissimo (fig. 6), e le radici compenetrano solo una piccola frazione del « terreno » disponibile.

Ora debbo restringermi a considerare un solo esemplare, il più straordinario della serie, che nell'aprile attrasse la mia attenzione perché stava pro-

(*) Presentata nella seduta del 19 novembre 1960.

ducendo un fiore subito dopo le « prime foglie », intendendo con questa locuzione le due foglie che seguono immediatamente i cotiledoni. Questo esemplare è ritratto, quasi al doppio del vero, nella fig. 1, che mostra essiccato uno dei cotiledoni, mentre l'altro è già caduto, mostra le prime foglie, e fra esse il fiore in sviluppo.

Non posso precisare la data esatta in cui il fenomeno cominciò a divenire visibile, essendomene accorto in stadio piuttosto avanzato, benché di parecchio precedente la antesi, la quale si segnala maggiormente per il colore giallo delle antere.

La fase di sviluppo del nostro fiore, che si stava trasformando in frutto, fu lunghissima e lenta: a metà maggio già notavo le sue forti dimensioni, che mi parevano lievemente maggiori del normale. Il peso fresco di un frutto normale in quello stadio fu da me valutato a mgr. 0,8; ma naturalmente non potevo fare determinazioni di peso sul frutto della preziosa piantina, che verso quest'epoca aveva perduto i cotiledoni, e la cui parte aerea misurava mm. 15, con lunghezza media delle prime foglie di mm. 3,5.

Una manifestazione così inattesa, così estrema, e vorrei dire così fuor del naturale [1], è meglio ritratta nella fig. 2, di profilo (circa 7 ×), e nella fig. 3, dall'alto (circa 6 ×), che ben mostrano il frutto tra le due prime foglie, ed il forte spessore e l'aspetto crassulento assunto da queste.

Per farmi una idea approssimativa del probabile peso della plantula, sacrificai al momento opportuno alcune piantine sorelle, pur esse dotate delle sole prime foglie e prive di cotiledoni: esse pesavano da 7 a 10 mgr., radice compresa.

Nella seconda metà di maggio mi avvidi che la plantula avrebbe portato il suo frutto a completo sviluppo ed a maturazione, grazie alla persistente attività delle due prime foglie, che ormai mi parvero meritare il nome di *foglie nutrici*. Non che con questa designazione io intenda negare funzione consimile alle foglie precedenti, cioè ai cotiledoni, come del resto a qualsiasi foglia normale, che è pure un trofofillo; ma intendo sottolineare la straordinaria accentuazione di questo compito, espressa dall'anormale prolungamento della vita di queste foglie, dal loro eccezionale sviluppo, dal loro differenziamento, per forma e dimensioni, da ciò che sarebbe stato l'aspetto normale delle « prime foglie ». Le foglie nutrici divengono, fra l'altro, riccacamente glandolose, come ben mostra la fig. 4 (10 ×).

Esse caddero simultaneamente l'11 giugno, e la piantina assunse lo strano aspetto della fig. 5 (2 ×): alla sommità, il frutto « a cappello di prete », un po' rattrappito per la disidratazione della incipiente maturanza, sembra riposare su due cuscini, che sono i resti picciolari, brevi e crassi, delle foglie nutrici, mentre un po' più sotto si vedono ancora le cicatrici lasciate dai due cotiledoni caduti. Altezza totale della parte aerea mm. 16.

(1) Grossolano ed improprio, specie per ragioni morfologiche, sarebbe un ravvicinamento a *Welwitschia*, che normalmente fiorisce arrestandosi alle « prime foglie ».

La plantula sopravvivrà ancora per pochi giorni, durante i quali il frutto darà luogo a movimenti di deiscenza, alternamente scoprendo e poi tornando a nascondere il seme, a seconda dello stato igrometrico dell'ambiente. La morte totale della plantula, col suo brusco essiccamento, avvenne il 17 giugno 1960, a 118 giorni dalla semina, dopo aver maturato il suo *unico seme*, del peso di mgr. 0,43.

La fig. 7 (circa 7 ×) mostra il follicolo semiaperto, visto dall'alto; la fig. 8 (10 ×) mostra il seme prodotto.

Date le difficoltà fisiologiche che ho incontrato nella germinazione dei semi di questa specie, ho preferito sacrificare il seme ottenuto alla ricerca anatomica, accertando che esso era *normalmente embrionato*: con questo, la minuscola graziosa piantina ha fatto quanto occorreva per proiettare nel futuro il risultato della sua breve esistenza.

Questi i fatti. Se si chiedesse di approfondire – al di là dei criterî di numero e di posizione – il significato e il valore di quelle che ho chiamato « foglie nutrici », ci si indurrebbe già ad abbandonare il terreno dei fatti per quello controverso delle interpretazioni. Non ho spazio per una discussione esauriente e ben concatenata, ma potrò prospettare isolatamente qualcuna delle principali difficoltà e divergenze teoriche.

Il primo che, a mia notizia, abbia applicato alle piante il termine di *pedogenesi* è J. C. Costerus, a proposito di *Melia arguta* D. C., appartenente ad una famiglia di piante d'alto fusto, e di cui due esemplari essiccati, fiorenti ancor molto giovani, dopo la 3ª foglia oltre i cotiledoni, gli suggerirono l'idea di *riproduzione infantile* (*Paedogenesis?*, « R. Trav. Bot. Neerl. », I, 1904, pp. 128–130). Così il termine « pedogenesi » non veniva più preso nel particolare senso a cui l'entomologia aveva voluto piegarlo: passando alla botanica, tornava al suo senso proprio, coincidente col significato letterale.

Un punto su cui mi trovo particolarmente d'accordo con il Costerus (e quindi in disaccordo con altri) è il dubbio della applicabilità di tale termine alle due piante essiccate, di cui non si può sapere se avrebbero prodotto, seme: Costerus dice « arrischiata » una tale applicazione, che sarebbe lecita *solo in caso di dimostrata capacità generativa*. Non basta vedere uno sporofillo, per esempio un carpello; occorre lo sviluppo di un sacco embrionale con oosfera fecondabile, anche se non si voglia addirittura esigere il passaggio alla nuova generazione cioè al seme embrionato, come accenna Costerus, e come si verifica appunto nel mio caso.

Ma la questione di fondo è quella di valutare il senso del « precoce sviluppo degli organi sessuali », come è inteso da Costerus. Sta di fatto che nella massima parte degli organismi la riproduzione sessuale avviene quando il loro sviluppo è prossimo al completamento: da ciò l'abitudine di considerare la maturità sessuale come un *criterium* per giudicare se l'organismo è adulto, e di considerare i caratteri che esso allora presenta come quelli definitivi proprî della specie. Se questo criterio si volesse elevare a principio, e – per definizione – chiamare adulto qualsiasi organismo atto a riprodursi, la questione sarebbe troncata piuttosto che risolta, e la parola « pedogenesi » ver-

rebbe ad includere una contraddizione in termini. A rendere peraltro evidenti la superficialità e l'arbitrarietà di un tale atteggiamento basterebbero i fatti della *dissogonia*, ove l'organismo presenta due periodi riproduttivi, uno nelle prime età, eppoi – con distacco reciso – un secondo, a sviluppo compiuto. Nessuno vorrà dire, io spero, che in tali casi l'organismo diventa adulto due volte; ma si vorrà invece riconoscere che nel concetto di « adulto » concorrono varî elementi, come una certa durata dell'età cronologica (quella che, per l'Uomo, si direbbe « età anagrafica »), un certo grado quantitativo di sviluppo somatico (ponderale e dimensionale), ecc.: elementi che in certi casi possono essere più o meno – ed anche assai fortemente – dissonanti fra loro. Che il concetto di « adulto » possa essere indipendente dalla maturazione sessuale, lo attestano poi, specie nel mondo vegetale, i numerosi organismi che dobbiamo chiamare adulti nonostante che sieno sterili.

Credo dunque che il termine di « pedogenesi », nel senso di Costerus, risulti, in generale, pienamente legittimato dalla nostra breve discussione. Ma la sua applicazione ai singoli casi, dovrà essere volta per volta giustificata.

Resta ancora da precisare il rapporto tra « pedogenesi » *sensu* Costerus, ed un fenomeno che potrebbe avere alcuni aspetti somiglianti, ma che a me sembra sostanzialmente opposto: quello della neotenía, termine del Kollmann che significa « rimanere giovane » e fu per la prima volta applicato ad anfibî persistenti per varî anni nella « condizione girinale », e capaci di dare opera alla riproduzione in tale stadio. Questo termine non è da prendere nel suo significato letterale assoluto, perché il « rimanere giovane » non è vero se non per qualche carattere o per qualche apparato (per esempio, quello respiratorio). Nella libera natura gli organismi neotenici raggiungono in genere la mole normale della specie; ed anche l'età cronologica della maturazione sessuale non viene sensibilmente modificata [2]. Ciò costituisce, mi pare, un notevole tratto differenziale rispetto alla « pedogenesi ».

Ciò premesso, un esame più attento del nostro *Chenopodium* potrà forse avvicinarci ad una miglior comprensione, attraverso il confronto con lo sviluppo normale. *C. amaranticolor* è specie ben nota, avendo costituito il materiale per gli importanti studî del Lona sul fotoperiodismo. Brevidiurna tipica, seminata in primavera, fiorisce a Bologna tra gli ultimi di agosto e la prima metà di settembre, quando le ore di luce cominciano a scendere da 14 a 12; matura poi i frutti tra ottobre e novembre. Se la pianta è ben nutrita il numero delle foglie successivamente prodotte è molto alto e la loro evoluzione notevole. *La forma del nomofillo come indice di passaggio alla fase riproduttiva* fu oggetto di un lavoro dello stesso Lona (« N. Giorn. Bot. It. », 1949, vol. LVI, N. 4, pp. 669–675), i cui risultati possiamo confermare in blocco; manca peraltro il tentativo di dare una espressione numerica

(2) Si prescinde qui totalmente da quelle false neotenie sperimentali, ottenute in laboratorio con scarsa nutrizione, abbassamento di temperatura, privazione di luce: ad esse conviene interamente il concetto di « arresto di sviluppo » indotto nell'organismo da una sorta di stato patologico.

ad alcuni dei caratteri presi in esame, e non vengono considerati i primissimi e gli ultimi stadi della evoluzione fogliare. Io prenderò in esame un piccolo esemplare in vaso alto pochi decimetri e di cui ho fissato per via fotografica le sagome (fig. 9 *a–s*; fig. 10 *a–q*) delle foglie succedentisi sull'asse principale, dai cotiledoni alla 36ª foglia, omettendone senza danno alcune, come la 6ª, la 8ª, la 10ª, ecc., che erano troppo simili alle loro prossime.

I cotiledoni, per quanto si vede ad occhio, sono opposti: le prime quattro figure ne indicano la breve picciolatura ed il lembo ridottissimo. Le « prime foglie » successive dànno l'idea di essere pur esse opposte, ma in realtà un piccolo tratto internodale le separa, e si può distinguere una 1ª foglia dalla 2ª, con sensibile differenza nella ampiezza del lembo: non solo, ma già dalla 2ª foglia può aversi, eccezionalmente, un primo dente o lobo acuminato. Con la 3ª foglia si afferma nettamente il tipo « espanso, rozzamente triangolare, a base larga » descritto da Lona, e che nel mio caso accentua i suoi caratteri fin verso la 14ª foglia.

Sebbene in foglie dal contorno dentato, irregolare, il mio metodo fillometrico si applichi meno esattamente e meno direttamente che non al tabacco, per cui lo proposi (« Atti Soc. Nat. e Mat., Modena », 1927, vol. V–VI, pp. 111–120), pure gli indici fillometrici del lembo, A/L e A/D, possono rendere buon servigio. Ecco gli indici approssimativi per la successione fogliare esaminata:

	cot.	1ª f.	2ª f.	3ª f.	4ª f.	5ª f.	7ª f.	9ª f.	11ª f.	13ª f.	15ª f.	18ª f.
$\frac{A}{L}$ =	4–2,6	1,7–1,4	2–1,2	1,1	1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,3	1,3	1,4
$\frac{A}{D}$ =	2,5–2	3–1,5	1,8–1,3	1,4	1,5	1,5	1,5	1,5	1,4	1,6	1,5	1,4

	20ª f.	21ª f.	23ª f.	24ª f.	27ª f.	30ª f.	31ª f.	32ª f.	33ª f.	34ª f	35ª f	36ª f.
$\frac{A}{L}$ =	1,5	1,4	1,5	2,1	2	2,2	2,6	2,7	2	2	3	2,5
$\frac{A}{D}$ =	1,3	1,5	1,4	1,4	1,2	1,3	1,9	1,8	2	2,3	1,7	1,7

Si può dire all'ingrosso che per un certo tratto, mentre aumenta la superficie del lembo, aumenta relativamente anche la massima larghezza, che si sposta in basso: così i 2 indici diminuiscono, finché poi, dopo un incerto periodo di stasi, la foglia torna a snellirsi e gli indici risalgono, mentre diminuisce la superficie del lembo, finché si precipita rapidamente verso forme bratteali, che – pur diversissime per altri caratteri – quanto agli indici fillometrici tornano a somigliare alle prime foglie ed ai cotiledoni. Il carattere delle foglie *antocline*, preannunciatrici del fiore, comincia però molto prima, ed è dato dalla caratteristica colorazione amaranto, e dalla sovrabbondanza delle formazioni glandolari. Un particolare sfuggito al Lona è che molto spesso foglie simili alla 31–36ª delle mie figure prolungano il loro apice in una appendice biancastra, che simula uno stimma: è una falsa apparenza:

tale appendice è coperta di grosse e rozze ghiandole che non hanno alcuna somiglianza con la delicata struttura dello stimma di questa specie (figg. 11-13).

Domandiamoci ora: di tutta questa così complessa, e generalmente così lunga evoluzione fogliare, cosa è rimasto nella nostra plantula ?

La risposta è semplice: *non ne è rimasto assolutamente nulla.*

« La fioritura è sempre accompagnata dalla formazione e differenziazione di foglie di tipo speciale », marcate « soprattutto per i caratteri di pigmentazione » e di forma, che « si potrebbero quindi denominare *caratteri riproduttivi secondarî* ». Così, press'a poco, dice giustamente Lona. Ma nella nostra piantina il caratteristico colore amaranto non è per nulla comparso, e le foglie precedenti il fiore non hanno alcun carattere bratteale. Non hanno neanche più i caratteri delle « prime foglie », che di norma sono a lamina sottile, mentre in queste, che ho chiamato « foglie nutrici » perché sostennero quasi tutto il lavoro dell'accrescimento del frutto e della maturazione del seme, la lamina è divenuta spessa, e la sua superficie è tempestata di ghiandole, che invece sono pochissimo numerose nelle prime foglie normali.

In realtà le foglie nutrici hanno un carattere *sui generis*, che non è né un carattere di « prime foglie » (salvo che per i rapporti di posizione e di numero) e men che meno un carattere prefiorale o bratteale. Tutto un lungo periodo evolutivo è stato soppresso, e questo è ciò che si dice *accelerazione*, ma si può ad arbitrio pensare che sia stata soppressa tutta la successione fogliare che va dalle « prime foglie » al fiore, oppure tutta la successione fogliare che avrebbe dovuto stare fra i cotiledoni e le estreme foglie prefiorali. Più naturale e più verosimile la prima interpretazione; ma in realtà il quesito è insolubile.

Il comportamento delle piantine sorelle non ci dà altri lumi: alcune restarono lungamente con 3–4 foglie e poi morirono; altre accennarono a formare rudimenti di infiorescenze. Quella ritratta nella fig. 14 è la più normale: ha 8–9 foglie e le ultime presentavano il colore amaranto prefiorale senza che poi il fiore sia mai arrivato a manifestarsi.

Io credo che la nostra piantina segni il caso estremo di « accelerazione » compatibile con la fecondità. Un grado maggiore di « accelerazione » penso che avrebbe soppresso la funzionalità sessuale, lasciando del sesso secondarie vestigia morfologiche. Esiste invero un gruppo di fatti interessantissimo concernente la sessualizzazione della plantula indotta prima della maturazione del seme, in *Bidens*, ad opera dello Chouard: le plantule non vengono a fiore, e la sessualizzazione può, per esempio, manifestarsi con mammelloni irti di papille stimmatiche. Curioso è che Chouard parli di neotenía. Ma questo è anzi tutto il contrario della neotenía la quale è bene, infatti, *l'opposto della accelerazione* (Wardlaw, *Embryogenesis in Plants*, p. 11). Per la categoria di fatti inaugurata dallo Chouard occorrerebbe un termine nuovo; ma certamente non spetta a me il privilegio di escogitarlo.

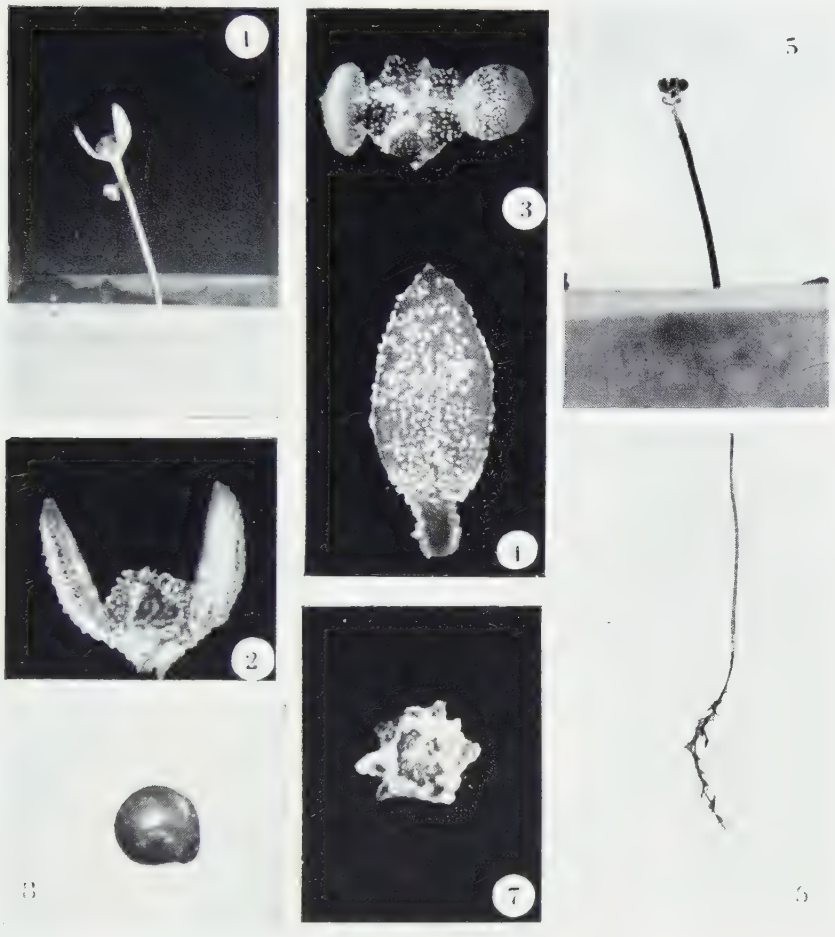


Fig. 1 - Plantula di *Chenopodium amaranticolor* fruttificante sopra le «prime foglie» (circa 2×). Fig. 2 - La parte superiore della plantula in più avanzato sviluppo, vista di fianco (circa 7×). Fig. 3 - La stessa, vista da sopra (circa 6×). Fig. 4 - Una «foglia nutrice» (10×). Fig. 5 - La plantula dopo la caduta delle «foglie nutrici» (2×). Fig. 6 - Lo scarso sviluppo del sistema radicale delle piantine in carbone-lanolina (gr. nat.). Fig. 7 - Il frutto in deiscenza (7×). Fig. 8 - Il seme (10×).

Fig. 9 a-s - Prima parte dell'evoluzione del tipo fogliare lungo l'asse di una pianta di *Chenopodium amaranticolor*.

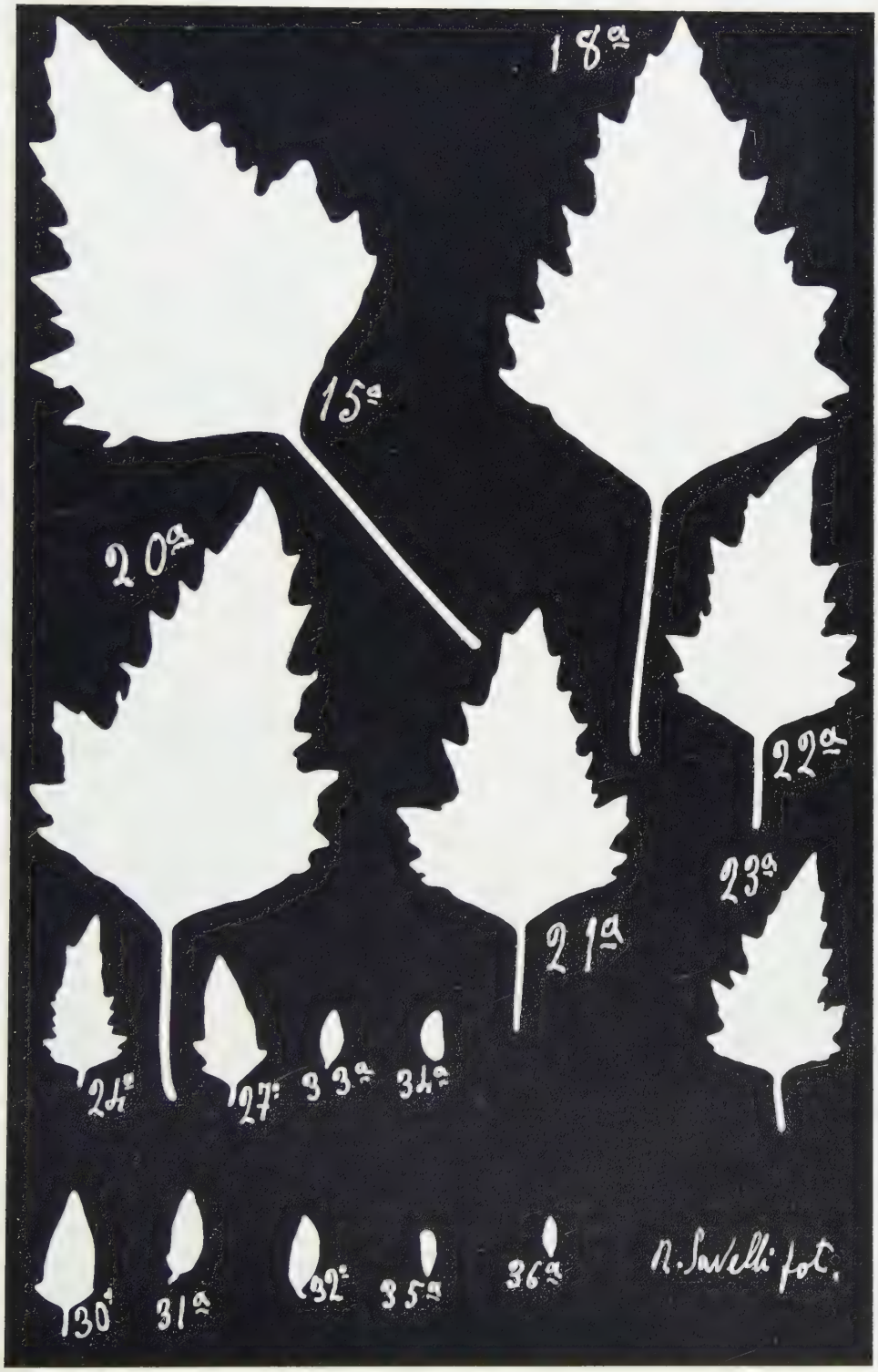
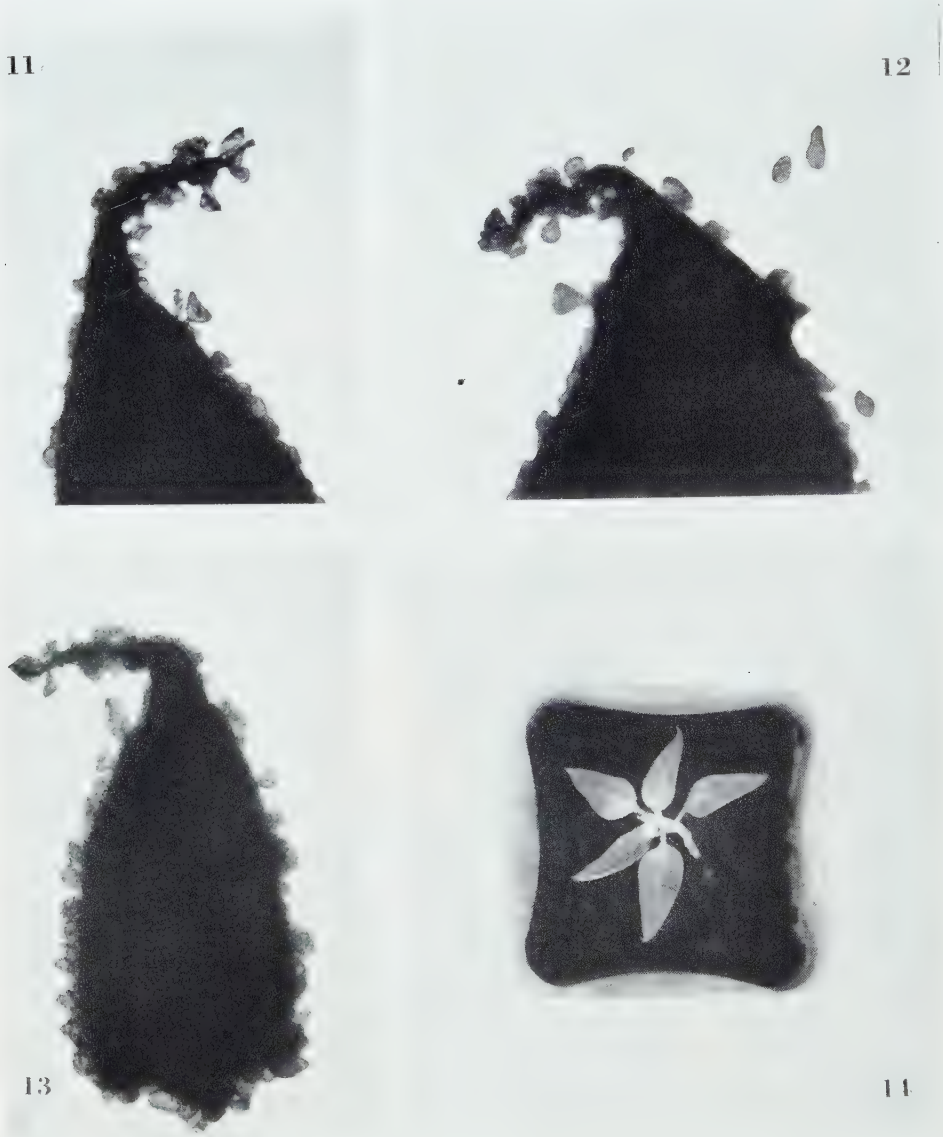


Fig. 10 a-q - Seconda parte dell'evoluzione del tipo fogliare lungo l'asse di una pianta di *Chenopodium amaranticolor*.



Figg. 11-13 - Atteggiamento prefiorale delle ultime foglie bratteali, stracariche di glandole e con prolungamento filiforme (ingrandimenti varî): nella fig. 12 spiccano sul fondo alcune glandole staccatesi dalla foglia. - Fig. 14 - La piantina più vicina alla normalità, nella stessa serie che dette la plantula fruttificata (gr. naturale): si vede il «terreno» di carbone-lanolina entro il vasetto di plastica.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sur la monogénéité dans l'espace.* Nota (*) di DAN PASCALI e SORIN GOGONEA, presentata dal Socio M. PICONE.

En 1931, Gr. C. Moïsil et N. Théodoresco [1], [2] ont étendu à l'espace à plusieurs dimensions, certains résultats fondamentaux de la théorie des fonctions d'une variable complexe, en utilisant un symbolisme matriciel.

Un ensemble de quatre fonctions $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)$ définies et de classe $C^{(2)}$ dans un domaine tridimensionel V et satisfaisant aux systèmes d'équations aux dérivées partielles

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\psi_1}{\partial x} + \dfrac{\partial\psi_4}{\partial y} - \dfrac{\partial\psi_3}{\partial z} = 0 \\ \dfrac{\partial\psi_1}{\partial y} + \dfrac{\partial\psi_2}{\partial z} - \dfrac{\partial\psi_4}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial\psi_1}{\partial z} + \dfrac{\partial\psi_3}{\partial x} - \dfrac{\partial\psi_2}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial\psi_2}{\partial x} + \dfrac{\partial\psi_3}{\partial y} + \dfrac{\partial\psi_4}{\partial z} = 0 \end{cases} \qquad (2)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\psi_1}{\partial x} - \dfrac{\partial\psi_4}{\partial y} + \dfrac{\partial\psi_3}{\partial z} = 0 \\ \dfrac{\partial\psi_1}{\partial y} - \dfrac{\partial\psi_2}{\partial z} + \dfrac{\partial\psi_4}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial\psi_1}{\partial z} - \dfrac{\partial\psi_3}{\partial x} + \dfrac{\partial\psi_2}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial\psi_2}{\partial x} + \dfrac{\partial\psi_3}{\partial y} + \dfrac{\partial\psi_4}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

est appelé demi–vecteur holomorphe, respectivement demi–vecteur coholomorphe.

Afin d'établir des formules analogues à celles de Cauchy et Pompeiu, ces systèmes sont écrits à l'aide des matrices carrées du quatrième ordre, tandis que le demi–vecteur est écrit comme une matrice rectangulaire à une seule colonne.

Un point de vue analogue est développé par M. S. Şneerson [4].

Soit $(p\,;\vec{a})$ une matrice de la forme

$$(3)\qquad (p\,;\vec{a}) = \begin{pmatrix} p & a_z & -a_y \\ -a_z & p & a_x \\ a_y & -a_x & p \end{pmatrix}$$

où p est un scalaire et $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ est un vecteur, tous les deux définis et de classe $C^{(2)}$ dans le domaine V. La matrice $(p\,;\vec{a})$ est appelée fortement monogène de première espèce dans V si l'on a

$$(4)\qquad \begin{cases} \operatorname{grad} p + \operatorname{rot}\vec{a} = 0 \\ \operatorname{div}\vec{a} = 0 \end{cases}$$

(*) Pervenuta all'Accademia il 6 luglio 1960.

et fortement monogène de seconde espèce si l'on a

$$(5)\qquad \begin{cases} \operatorname{grap} p - \operatorname{rot} \vec{a} = 0 \\ \operatorname{div} \vec{a} = 0 . \end{cases}$$

En employant le produit matriciel usuel, on établit aussi des formules analogues à celles de Cauchy et Pompeiu.

Ce travail part de l'observation que les systèmes (1) et (4), respectivement (2) et (5), coïncident si l'on pose $p = \psi_1$, $a_x = \psi_2$, $a_y = \psi_3$, $a_z = \psi_4$. Cette équivalence entre les demi–vecteurs holomorphes et les matrices fortement monogènes nous a suggéré l'emploi des matrices du troisième ordre, ce qui constitue un symbolisme plus naturel, à l'aide duquel nous établissons quelques formules de représentation des demi–vecteurs, analogues à celles de [1] et [2].

1. Nous introduisons, pour les demi-vecteurs de la forme (3), le produit défini par la formule

$$(6)\qquad (p_1 ; \vec{a}) \wedge (p_2 ; \vec{b}) = (P ; \vec{A})$$

où

$$(7)\qquad \begin{cases} P = p_1 p_2 - \vec{a} \cdot \vec{b} \\ \vec{A} = \vec{a} p_2 + \vec{b} p_1 + \vec{b} \times \vec{a} . \end{cases}$$

Les demi–vecteurs $(p ; \vec{a})$ et $(p ; -\vec{a})$ sont, par rapport à l'addition usuelle et au nouveau produit, les homologues des variables z et $\bar{z}$ du plan complexe. En effet

$$(p ; \vec{a}) + (p ; -\vec{a}) = (2p ; 0)$$

$$(p ; \vec{a}) \wedge (p ; -\vec{a}) = (p ; -\vec{a}) \wedge (p ; \vec{a}) = (p^2 + a^2 ; 0)$$

a étant le module de $\vec{a}$.

Afin d'écrire symboliquement les systèmes (4) et (5), nous introduisons les opérateurs définis par

$$D_d (p ; \vec{a}) = (p ; \vec{a}) \wedge (0 ; \nabla)$$

$$\bar{D}_d (p ; \vec{a}) = (p ; \vec{a}) \wedge (0 ; -\nabla)$$

$$D_g (p ; \vec{a}) = (0 ; \nabla) \wedge (p ; \vec{a})$$

$$\bar{D}_g (p ; \vec{a}) = (0 ; -\nabla) \wedge (p ; \vec{a})$$

où

$$\nabla = \vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}.$$

En utilisant les relation (6) et (7), il résulte immédiatement

$$(8)\qquad \begin{cases} D_d(p\,;\vec{a}) = (-\operatorname{div}\vec{a}\,;\quad \operatorname{grad}\vec{p} + \operatorname{rot} a) \\ \bar{D}_d(p\,;\vec{a}) = (\quad \operatorname{div}\vec{a}\,;-\operatorname{grad}\vec{p} - \operatorname{rot} a) \end{cases}$$

$$(9)\qquad \begin{cases} D_g(p\,;\vec{a}) = (-\operatorname{div}\vec{a}\,;\quad \operatorname{grad}\vec{p} - \operatorname{rot} a) \\ \bar{D}_g(p\,;\vec{a}) = \quad \operatorname{div}\vec{a}\,;-\operatorname{grad}\vec{p} + \operatorname{rot} a). \end{cases}$$

On observe que

$$D_d(p\,;\vec{a}) = -\bar{D}_d(p\,;\vec{a})$$

$$D_g(p\,;\vec{a}) = -\bar{D}_g(p\,;\vec{a}).$$

Si l'on emploie ces notations, les demi-vecteurs holomorphes sont caractérises par les équations

$$(10)\qquad D_d(p\,;\vec{a}) = 0 \qquad \text{ou} \quad \bar{D}_d(p\,;\vec{a}) = 0$$

et les demi-vecteurs coholomorphes par les équations

$$(11)\qquad D_g(p\,;\vec{a}) = 0 \qquad \text{ou} \quad \bar{D}_g(p\,;\vec{a}) = 0.$$

Les relations (8) et (9) montrent aussi que si $(p\,;\vec{a})$ est un demi-vecteur holomorphe, alors $(p\,;-\vec{a})$ est un demi-vecteur coholomorphe et réciproquement.

L'application successive des deux opérateurs au demi-vecteur $(p\,;\vec{a})$ conduit aux relations

$$D_d\,\bar{D}_d(p\,;\vec{a}) = D_d\,\bar{D}_d(p\,;\vec{a}) = (\Delta p\,;\Delta\vec{a})$$

$$D_g\,\bar{D}_g(p\,;\vec{a}) = \bar{D}_g\,D_g(p\,;\vec{a}) = (\Delta p\,;\Delta\vec{a})$$

Δ étant l'opérateur de Laplace.

Il résulte, en vertu de (10) et (11), que les demi-vecteurs holomorphes et les demi-vecteurs coholomorphes ont pour composantes des fonctions harmoniques dans V. On retrouve de cette manière le résultat établi dans [2].

2. A l'aide des notations introduites et de la formule de Gauss–Ostrogradski, on démontre facilement les relations suivantes,

$$
\left|\begin{array}{l}
\displaystyle\iint_{\Sigma}\{(p\,;\ \vec{a})\wedge(0\ \ ;\vec{n})\}\,ds=\iiint_{T}D_d(p\,;\vec{a})\,d\tau\\
\displaystyle\iint_{\Sigma}\{(p\,;\ \vec{a})\wedge(0\,;-\vec{n})\}\,ds=\iiint_{T}\bar{D}_d(p\,;\vec{a})\,d\tau\\
\displaystyle\iint_{\Sigma}\{(0\,;\ \vec{n})\wedge(p\ \ ;\vec{a})\}\,ds=\iiint_{T}D_g(p\,;\vec{a})\,d\tau\\
\displaystyle\iint_{\Sigma}\{(0\,;-\vec{n})\wedge(p\ \ ;\vec{a})\}\,ds=\iiint_{T}\bar{D}_g(p\,;\vec{a})\,d\tau
\end{array}\right. \qquad (12)
$$

où Σ est une surface Liapounoff fermée, incluse avec son intérieur T, dans le domaine V, tandis que $\vec{n}$ est le verseur de la normale extérieure à la surface Σ.

Les formules (12) conduisent à des théorèmes analogues à celui de Cauchy, pour les demi–vecteurs holomorphes et coholomorphes.

3. Soit le demi–vecteur $(p\,;\vec{a})$ défini et de classe $C^{(1)}$ dans le même domaine T, $\vec{r}=\overrightarrow{MQ}$, M étant un point fixe, et $\vec{\rho}=-\operatorname{grad}\frac{1}{r}=\frac{\vec{r}}{r^3}$.

Considérons le noyau

$$K_1(p\,;\vec{a})=\{(p\,;\vec{a})\wedge(0\,;\vec{n})\}\wedge(0\,;\vec{\rho}).$$

En employant (6), il résulte immédiatement $K_1(p\,;\vec{a})=(P_1\,;\vec{A}_1)$ où

$$P_1=-\vec{\rho}\cdot(\vec{n}\,p+\vec{n}\times\vec{a})$$

$$\vec{A}_1=-\vec{\rho}\cdot(\vec{a}\cdot\vec{n})+\vec{\rho}\times[\vec{n}\,p+(\vec{n}\times\vec{a})].$$

En appliquant à chaque élément de K_1 la formule de Gauss–Ostrogradski, on obtient

$$\iint_{\Sigma}K_1(p\,;\vec{a})\,ds_Q=\iiint_{T}(-\vec{\rho}\cdot(\operatorname{grad}p+\operatorname{rot}\vec{a})\,;\vec{\rho}$$

$$\times(\operatorname{grad}p+\operatorname{rot}\vec{a})-\vec{\rho}\operatorname{div}\vec{a})\,d\tau_Q$$

ou

$$\iint_{\Sigma}K_1(p\,;\vec{a})\,ds_Q=\iiint_{T}\{D_d(p\,;\vec{a})\wedge(0\,;\vec{\rho})\}\,d\tau_Q \qquad (13)$$

pour $M \in \Xi T$, et

$$(14) \qquad (p\,;\vec{a})_M = -\frac{1}{4\pi}\iint_{\Sigma} K_1(p\,;\vec{a})\,ds_Q + \frac{1}{4\pi}\iiint_{T}\{D_d(p\,;\vec{a}) \wedge (o\,;\vec{\rho})\}\,d\tau_Q$$

pour $M \in T$.

En procédant de façon analogue avec le noyau

$$K_2(p\,;\vec{a}) = (o\,;\vec{\rho}) \wedge \{(o\,;\vec{n}) \wedge (p\,;\vec{a})\}$$

on obtient

$$(13') \qquad \iint_{\Sigma} K_2(p\,;\vec{a})\,ds_Q = \iiint_{T}\{(o\,;\vec{\rho}) \wedge D_g(p\,;\vec{a})\}\,d\tau_Q$$

pour $M \in \Xi T$ et

$$(14') \qquad (p\,;\vec{a})_M = -\frac{1}{4\pi}\iint_{\Sigma} K_2(p\,;\vec{a})\,ds_Q + \frac{1}{4\pi}\iiint_{T}\{(o\,;\vec{\rho}) \wedge D_g(p\,;\vec{a})\}\,d\tau_Q$$

pour $M \in T$

Les formules (13), (14), (13') et (14') sont les analogues de la formule de Moïsil–Théodoresco [2], extension à l'espace de la formule de Pompeiu [3].

Si le demi–vecteur $(p\,;\vec{a})$ est holomorphe, on obtient, en vertu de (13) et (14)

$$(15) \qquad -\frac{1}{4\pi}\iint_{\Sigma} K_1(p\,;\vec{a})\,ds_Q = \begin{cases} (p\,;\vec{a}) & \text{si } M \in T \\ O & \text{si } M \in \Xi T \end{cases}$$

et si le demi–vecteur $(p\,;\vec{a})$ est coholomorphe, les relations (13') et (14') montrent que

$$(16) \qquad -\frac{1}{4\pi}\iint_{\Sigma} K_2(p\,;\vec{a})\,ds_Q = \begin{cases} (p\,;\vec{a}) & \text{si } M \in T \\ O & \text{si } M \in \Xi T\,. \end{cases}$$

Les formules (15) et (16) sont les analogues pour l'espace, des formules intégrales de type Cauchy (analogues des formules écrites par Gr. C. Moïsil et N. Théodoresco [2] à l'aide du symbolisme matriciel).

4. Si $(p\,;\vec{a})$ est un demi–vecteur continu sur Σ, alors on constate par vérification directe, que

$$(\mathcal{S}_1\,;\vec{\mathcal{A}}_1) = -\frac{1}{4\pi}\iint_{\Sigma} K_1(p\,;\vec{a})\,ds$$

est un demi–vecteur holomorphe et

$$(\mathcal{S}_2 ; \vec{\mathcal{A}}_2) = -\frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} K_2(p ; \vec{a})\, ds$$

est un demi–vecteur coholomorphe dans tout l'espace, sauf la surface Σ.

Bibliographie.

[1] Gr. C. Moïsil, *Sur une classe de systèmes d'équations aux dérivées partielles de la physique mathématique*, Imprimerie Göbl, Bucarest 1931.

[2] Gr. C. Moïsil et N. Théodoresco, *Fonctions holomorphes dans l'espace*, «Mathematica», t. V, p. 1 (1930).

[3] D. Pompeiu, *Sur une classe de fonctions d'une variable complexe*, « Rendiconti Palermo », t. 33, p. 108 (1912); t. 35, p. 277 (1913).

[4] M. S. Sneerson, *O nekotorom analoghe integrala tipa Koşi*, «Uspehi matematiceskih nauk», t. 14, no. 4, p. 217 (1959).

Analisi matematica. — *Sulla equazione integro-differenziale di tipo ellittico di Volterra*. Nota di LUCIANO DE VITO, presentata (*) dal Socio M. PICONE.

Indichiamo con S_n lo spazio cartesiano n-dimensionale. Per $n = 3$, denoteremo con x il punto generico dello spazio, e con x_1, x_2, x_3 le sue coordinate. Per $n = 4$, il punto generico dello spazio sarà indicato con (x, t) e x_1, x_2, x_3, t saranno le sue coordinate (talora useremo anche la lettera ξ in luogo di x e la lettera τ in luogo di t). Sia A un campo di S_3 *propriamente regolare* nel senso di Fichera (1) e sia t_0 un numero reale positivo. Denoteremo con T_0 l'intervallo chiuso di estremi $0, t_0$ e con T il generico intervallo chiuso contenuto in T_0. Se C è un insieme di S_3, con $C \times T$ si denoterà l'insieme di S_4 descritto da (x, t) al variare di x in C e t in T. Con $f_i(t, \tau)$ $(i = 1, 2, 3)$ indichiamo tre funzioni reali e continue definite al variare di t e di τ in T_0.

Vito Volterra, in un lavoro del 1912 (2), proponeva lo studio dei problemi al contorno per la seguente equazione integro-differenziale:

$$(1) \qquad E(u) \equiv \Delta_x^2 u(x, t) + \int_0^t \frac{\partial^2 u(x, \tau)}{\partial x_i^2} f_i(t, \tau)\, d\tau = f(x, t) \quad (3)$$

ove: $f(x, t)$ è una funzione, assegnata, definita in $\bar{A} \times T_0$ (4), che rappresenta il termine noto dell'equazione; la $u(x, t)$ è la funzione incognita (che pensiamo definita in $\bar{A} \times T_0$); Δ_x^2 rappresenta l'operatore di Laplace relativo alle sole variabili (spaziali) x_1, x_2, x_3. Alla considerazione di questa equazione, Egli era stato condotto dalla formulazione della Sua teoria dell'elasticità ereditaria, la quale ha per oggetto i problemi elastostatici ed elastodinamici dei corpi materiali, quando si tenga conto di tutta la precedente « storia delle deformazioni » dei corpi stessi. A quanto mi consta, non esiste, a tutto oggi, una teoria completa dei problemi al contorno per l'equazione (1). Non è stato, ad esempio, dimostrato un teorema d'esistenza per il problema di Dirichlet relativo alla (1) cioè il problema consistente nel dimostrare l'esistenza di una $u(x, t)$, soluzione della (1), convenientemente « regolare », in $\bar{A} \times T_0$, e che si annulli nei punti di $T_0 \times \mathfrak{F}A$. Gli unici risultati, a me noti, aventi carattere generale, relativi all'equazione (1), sono dovuti allo stesso Volterra e consistono nella dimostrazione di un teorema d'unicità per l'anzi-

(*) Nella seduta del 19 novembre 1960.

(1) Cfr. [3] p. 207. I numeri in parentesi [ ] si riferiscono alla bibliografia.

(2) Cfr. [10].

(3) Adottiamo la convenzione secondo cui l'indice i, ripetuto due volte, sottintende una sommazione, per i che va da 1 a 3.

(4) Con il simbolo $\bar{A}$ indichiamo la riunione di A e della sua frontiera $\mathfrak{F}A$.

detto problema di Dirichlet e nella costruzione di una soluzione fondamentale per la (1) [5].

In un lavoro in corso di pubblicazione sugli Atti della Accademia delle Scienze di Torino ho studiato il sopradetto problema di Dirichlet. Durante tale indagine ho potuto constatare come la (1), benché abbia per parte puramente differenziale un operatore di tipo ellittico, non si lasci trattare con i metodi esistenziali che d'ordinario vengono impiegati per le equazioni differenziali lineari di tipo ellittico a coefficienti reali. Ciò forse spiega il motivo per il quale il problema è rimasto per sì lungo tempo insoluto. Ho, in primo luogo, potuto constatare come, pur disponendosi della soluzione fondamentale costruita da Volterra, l'estensione al problema di Dirichlet per la (1) del classico metodo consistente nel rappresentare la soluzione cercata come somma di un potenziale di volume più uno di superficie, non sia – almeno al momento presente – attuabile. In effetti, usando della sopradetta rappresentazione, il problema di Dirichlet viene ricondotto a quello della risoluzione di un sistema di equazioni integrali singolari del quale non è ancora nota la teoria e la cui discussione, peraltro, costituisce un problema di ordine di difficoltà non inferiore a quello iniziale.

Ho, successivamente, cercato di applicare i procedimenti oggi maggiormente in uso nella teoria delle equazioni ellittiche basati su diseguaglianze integrali del tipo di quella di Gårding, il sussistere delle quali definisce, secondo una locuzione introdotta da J. L. Lions, la $\mathfrak{P}$–*ellitticità* del problema al contorno che si considera. Tale $\mathfrak{P}$–ellitticità costituisce una condizione soltanto sufficiente [6] per l'esistenza di una soluzione « generalizzata » del problema, laddove, la condizione necessaria e sufficiente – costituita dal sussistere di una certa diseguaglianza – per la esistenza di una siffatta soluzione, è stata data da G. Fichera [7]. Orbene, nel caso del problema di Dirichlet per la (1), da me considerato, si verifica la circostanza secondo la quale il problema non può essere $\mathfrak{P}$–ellittico, cioè non sussiste, come mostrerò nelle righe che seguono, la diseguaglianza del tipo di Gårding, mentre è verificata quella indicata da Fichera, come ho provato nel predetto lavoro in corso di pubblicazione.

Denotiamo con $\mathfrak{H}$ lo spazio delle funzioni reali di quadrato sommabile in $A \times T_0$ e dotate di derivate parziali prime rispetto ad x_1, x_2, x_3, deboli, di quadrato sommabile in $A \times T_0$. Indicata con λ una costante reale, diremo *soluzione semidebole* per il problema di Dirichlet relativo all'equazione

$$E(u) - \lambda u = f \tag{2}$$

con condizione omogenea su $T_0 \times \mathfrak{F}A$ [8], una funzione $u(x, t)$ che appar-

(5) Cfr. loc. cit. in (2).

(6) Cfr. [5] p. 73; [8], [9].

(7) Cfr. [5] p. 71.

(8) Usiamo qui il termine « soluzione semidebole » seguendo una locuzione introdotta da G. FICHERA (cfr. [5] p. 68). Altri Autori adottano il termine « soluzione debole ». Noi

tenga ad $\mathcal{H}$, per quasi tutti i t di T_0 abbia « traccia » [9] nulla su $\mathfrak{F}A$, e verifichi le equazioni:

$$(3) \qquad B(u, v) + \lambda \int_{A \times T_0} u(x, t)\, v(x, t)\, dx\, dt = - \int_{A \times T_0} f(x, t)\, v(x, t)\, dx\, dt$$

in corrispondenza ad ogni $v(x, t)$ della classe $\mathfrak{V}$ costituita dalle funzioni continue in $\bar{A} \times T_0$ assieme alle loro derivate prime e seconde rispetto ad x_1, x_2, x_3 e nulle su $T_0 \times \mathfrak{F}A$, ove con $B(u, v)$ si è indicata la « forma bilineare » associata all'operatore integro-differenziale E:

$$B(u, v) = \int_{A \times T_0} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x_i} \left[\frac{\partial v(x, t)}{\partial x_i} + \int_t^{t_0} \frac{\partial v(x, \tau)}{\partial x_i} f_i(\tau, t)\, d\tau \right] dx .$$

L'anzidetta soluzione esiste se il problema è $\mathfrak{V}$-ellittico [10] se cioè è verificata per ogni v di $\mathfrak{V}$ la seguente diseguaglianza (del tipo di Gårding):

$$(4) \qquad B(v, v) \geq K \int_{A \times T_0} |\operatorname{grad}_x v(x, t)|^2\, dx\, dt - \lambda \int_{A \times T_0} |v(x, t)|^2\, dx\, dt \ [11] ,$$

$K > 0$.

Tale diseguaglianza, in generale, non è vera. Assumiamo infatti $f_i(t, \tau) \equiv -1$ $(i = 1, 2, 3)$ e $t_0 = 3$. Si tratta allora di dimostrare che, assunto comunque λ, non sussiste la diseguaglianza:

$$K \int_{A \times T_0} |\operatorname{grad}_x v(x, t)|^2\, dx\, dt \leq \int_{A \times T_0} \left[|\operatorname{grad}_x v(x, t)|^2 - \frac{\partial v(x, t)}{\partial x_i} \int_t^{t_0} \frac{\partial v(x, \tau)}{\partial x_i}\, d\tau \right] dx\, dt$$

$$+ \lambda \int_{A \times T_0} |v(x, t)|^2\, dx\, dt .$$

preferiamo indicare, con quest'ultima locuzione, le soluzioni generalizzate definite mediante la « formula integrale di Green » (cfr. [5] p. 26), ed usare invece il termine « semidebole » per indicare quelle soluzioni generalizzate per la definizione delle quali si fa ricorso alla « semiformula integrale di Green ». In genere, ogni soluzione semidebole è anche soluzione debole, mentre non è vero il viceversa (cfr. [5] p. 67).

(9) La nozione di *traccia* è qui intesa in un senso introdotto da G. FICHERA nel 1949 (cfr. [2]) e adoperata successivamente da molti Autori. Per la bibliografia sull'argomento, si può vedere [1].

(10) Cfr. [5] p. 73.

(11) Con il simbolo $\operatorname{grad}_x v(x, t)$ indichiamo il vettore a tre componenti:

$$\frac{\partial v(x, t)}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial v(x, t)}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial v(x, t)}{\partial x_3} .$$

Se questa diseguaglianza fosse vera, assumendo una $v(x,t)$ indipendente da t, si avrebbe, per ogni $v(x)$ continua con le sue derivate prime e seconde in $\bar{A}$ e nulla su $\mathfrak{F}A$:

$$K t_0 \int_A |\operatorname{grad} v(x)|^2 \, dx \leq t_0 \int_A |\operatorname{grad} v(x)|^2 \, dx - \frac{t_0^2}{2} \int_A |\operatorname{grad} v(x)|^2 \, dx + t_0 \lambda \int_A v^2(x) \, dx$$

donde, per $t_0 = 3$:

$$\left(K + \frac{1}{2}\right) \int_A |\operatorname{grad} v(x)|^2 \, dx \leq \lambda \int_A v^2(x) \, dx$$

con $K > 0$, e ciò è assurdo.

Introdotto in $\mathcal{H}$ il prodotto scalare $(u, v)_{\mathcal{H}} = \int_{A \times T_0} \left[u(x,t) v(x,t) + \frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i} \frac{\partial v(x,t)}{\partial x_i} \right] dx \, dt$ e detta $\overline{\mathfrak{V}}$ la chiusura di $\mathfrak{V}$ in $\mathcal{H}$, esiste una trasformazione lineare continua di $\overline{\mathfrak{V}}$ in sé: $T_\lambda(v)$, tale che, per ogni coppia $u, v \in \mathfrak{V}$ si ha:

$$B(u, v) + \lambda \int_{A \times T_0} u(x,t) v(x,t) \, dx \, dt = (u, T_\lambda(v))_{\mathcal{H}} .$$

La condizione necessaria e sufficiente per la esistenza della anzidetta soluzione semidebole è la seguente:

$$(5) \qquad \int_{A \times T_0} |v(x,t)|^2 \, dx \, dt \leq H \| T_\lambda(v) \|^2_{\mathcal{H}} \qquad , \quad v \in \mathfrak{V} .$$

Ho dimostrato il sussistere della (5) per ogni $\lambda \geq 0$. Pertanto, il problema da me considerato *costituisce un esempio di problema al contorno per il quale sussiste la* (5) *e non la* (4).

La dimostrazione della (5) per gli anzidetti valori di λ è perfettamente equivalente alla dimostrazione della seguente diseguaglianza:

$$\int_{A \times T_0} |v(x,t)|^2 \, dx \, dt \leq H \sum_{k=0}^{\infty} \left| \int_{T_0 \times A} \lambda u_k(x,t) v(x,t) + \frac{\partial u_k(x,t)}{\partial x_i} \left| \frac{\partial v(x,t)}{\partial x_i} \right. \right.$$
$$\left. \left. + \int_i^{t_0} \frac{\partial v(x,\tau)}{\partial x_i} f_i(\tau, t) \, dt \right] dx \right|^2 ,$$

ove $\{u_k(x,t)\}$ è un sistema di funzioni ortonormale e completo in $\overline{\mathfrak{V}}$. Ritengo che questa diseguaglianza abbia interesse a sé stante, perché costituisce una generalizzazione della classica diseguaglianza di Poincaré, che si ritrova facendo: $\lambda = 0$, $f_i(t, \tau) \equiv 0$, ed assumendo funzioni v dipendenti solo da x.

Limitandomi a considerare il caso di maggior interesse, $\lambda = 0$, che corrisponde al problema posto da Volterra, i risultati ai quali sono giunto, nel sopradetto lavoro, relativi alla esistenza ed unicità della soluzione ed alla regolarizzazione di essa, si possono riassumere al modo seguente: *se* $f(x, t)$ *è una funzione di quadrato sommabile in* $A \times T_0$, *esiste una ed una sola soluzione semidebole* [12] *dell'equazione* (1) *con dato al contorno omogeneo* [13] *cioè esiste una sola funzione* $u(x, t)$ *verificante le seguenti condizioni:*

1° $u(x, t)$ *appartiene ad* $\mathcal{H}$;

2° *per quasi tutti i* t *di* T_0 *la* $u(x, t)$ *è dotata di traccia nulla su* $\mathfrak{F}A$ [14];

3° *per ogni* $v \in \mathfrak{V}$, *verifica la* (3) *con* $\lambda = 0$.

Inoltre $u(x, t)$ gode anche delle seguenti proprietà:

4° *per ogni* $v \in \mathfrak{V}$ *riesce*:

$$\int_{\bar{A} \times T_0} u(x, t)\, E^*[v(x, t)]\, dx\, dt = \int_{\bar{A} \times T_0} v(x, t)\, f(x, t)\, dx\, dt$$

ove:

$$E^*(v) \equiv \Delta_x^2 v(x, t) + \int_t^{t_0} \frac{\partial^2 v(x, \tau)}{\partial x_i^2} f_i(\tau, t)\, d\tau$$

cioè $u(x, t)$ *è soluzione debole* [15] *del problema in questione;*

5° *se* $f(x, t)$ *è continua assieme alle sue derivate parziali prime e seconde rispetto ad* x_1, x_2, x_3 *in* $\bar{A} \times T_0$, *la* $u(x, t)$ *è continua in* $A \times T_0$ *assieme alle sue derivate prime e seconde rispetto ad* x_1, x_2, x_3 *ed in ogni punto di* $A \times T_0$ *verifica l'equazione* (1).

La regolarizzazione della soluzione semidebole, di cui al punto 5°, è stata ottenuta mostrando, dapprima, che ogni soluzione semidebole è soluzione debole [15] ed impiegando quindi una tecnica per la regolarizzazione delle soluzioni deboli dei problemi al contorno per equazioni differenziali, la quale prescinde dal sussistere della (4) [16] e che mi è stato possibile estendere alla equazione integro-differenziale (1).

BIBLIOGRAFIA.

[1] L. DE VITO, *Sulle funzioni ad integrale di Dirichlet finito*, «Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa», ser. III, vol. XII (1958).

[2] G. FICHERA, *Sull'esistenza e sul calcolo delle soluzioni dei problemi al contorno relativi all'equilibrio di un corpo elastico*, «Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa», ser. III, vol. IV (1950), Pubblicazione dell'I.N.A.C., n. 248 (1949).

(12) Cfr. nota [8].

(13) Ci siamo limitati a considerare il teorema di esistenza per dati omogenei al contorno. È facile dare condizioni sufficienti perché il problema generale si riduca a questo.

(14) Cfr. nota (9).

(15) Cfr. nota (8).

(16) Cfr. [4] pp. 530 sgg.

[3] G. FICHERA, *Alcuni recenti sviluppi della teoria dei problemi al contorno per le equazioni alle derivate parziali lineari*. Atti del Convegno di Trieste sulle equazioni alle derivate parziali. Ediz. Cremonese, 1955.

[4] G. FICHERA, *Sull'esistenza delle forme differenziali armoniche*. « Rend. Sem. Matem. Padova », vol. XXIV (1955).

[5] G. FICHERA, *Premesse ad una teoria generale dei problemi al contorno per le equazioni differenziali*, Ist. Alta Matematica, Roma 1958.

[6] G. FICHERA, *Sul concetto di problema « ben posto » per una equazione differenziale*, « Rend. di Matem. », vol. 19, Roma 1960.

[7] L. GÅRDING, *Dirichlet's problem for linear elliptic partial differential equations*, « Math. Scandinavica », vol. I (1953).

[8] J. L. LIONS, *Problèmes aux limites en théorie des distributions*, « Acta Math. », 1955.

[9] J. L. LIONS, *Sur les problèmes aux limites du type derivée oblique*, « Ann. of Math. », 1955.

[10] V. VOLTERRA, *Sur les équations intégro–différentielles et leurs applications*, « Acta Math. », vol. 35 (1912).

Analisi matematica. — *Nuove ricerche di calcolo delle variazioni basate sul concetto di punti di concentrazione dovuto al Picone.* Nota di ANDRÁS KÓSA, presentata (*) dal Socio M. PICONE.

In una Memoria del Picone [1] si trova un nuovo metodo di calcolo delle variazioni, con l'aiuto del quale si possono ottenere le condizioni necessarie relative non soltanto ai punti interni, ma anche ai punti di frontiera della curva che fornisce un minimo. In ultima analisi questo metodo consiste nell'introduzione del concetto di punto di concentrazione. Nella Nota presente interpretiamo convenientemente il concetto di punto di concentrazione per una certa classe di funzionali di ordine n e presentiamo, senza dimostrazione, alcune condizioni necessarie che si possono ottenere con questo metodo. L'importanza del metodo si manifesta anche nel fatto che nell'esame del problema che sarà considerato in seguito, otteniamo fra l'altro come condizione necessaria un sistema di equazioni differenziali che deve sussistere per le curve minimanti anche nei punti di frontiera (ved. teorema 5).

Siano dati:

α) un insieme chiuso E dello spazio ad $n+2$ dimensioni $(x, y, y_1, \cdots, y_n)$;

β) una funzione reale $f(x, y, y_1, \cdots, y_n)$ continua in E;

γ) un insieme Γ di funzioni reali $y(x)$, ciascuna definita in un certo intervallo $a \leq x \leq b$, di classe $HK^{(n)}$ (1), verificante la condizione seguente:

$$(x, y(x), y'(x), \cdots, y^{(n)}(x)) \in E \qquad \text{per} \quad a < x < b.$$

Dalle ipotesi β) e γ) segue che per ogni curva $y = y(x) \in \Gamma$ è definito il funzionale

$$I[y(x)] = \int_a^b f(x, y(x), y'(x), \cdots, y^{(n)}(x))\, dx. \tag{1}$$

Diciamo che la curva $y = y_0(x) \in \Gamma$ è una minimante per il funzionale (1), se sussiste la relazione $I[y(x)] \geq I[y_0(x)]$ per tutte le curve $y = y(x) \in \Gamma$.

Introduciamo ora il concetto di punto di concentrazione nel modo seguente: fissati i numeri reali $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$; $p > 0$, un punto $(x_0, y(x_0))$ della curva $y = y(x) \in \Gamma$ si dice punto di concentrazione a destra (2) per l'insieme Γ coi valori $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ dei primi parametri e col p del secondo parametro, se esiste un numero $\bar{\varepsilon}$ $(0 < (p+1)\bar{\varepsilon} < b - x_0)$ tale che, appartiene

(*) Nella seduta del 19 novembre 1960.

(1) Cfr. [1], pp. 1.

(2) In modo analogo si definisce il punto di concentrazione a sinistra.

sempre all'insieme Γ ogni curva $y = y_\varepsilon(x)$ $(0 < \varepsilon < \bar{\varepsilon})$, con la seguente definizione di $y_\varepsilon(x)$:

$$(2)\quad y_\varepsilon(x) = \begin{cases} y(x_0) + \sum_{l=1}^{n} \frac{\lambda_l}{l!}(x - x_0)^l & \text{per } x_0 \le x \le x_0 + \varepsilon, \\ y(x) + k(\varepsilon)(x - x_0 - \varepsilon - p\varepsilon) & \text{per } x_0 + \varepsilon \le x \le x_0 + \varepsilon + p\varepsilon, \\ y(x) & \text{negli altri punti dell'intervallo } a \le x \le b, \end{cases}$$

dove, a causa della continuità della funzione $y_\varepsilon(x)$ anche nel punto $x_0 + \varepsilon$, $k(\varepsilon)$ soddisfa alla relazione, che la definisce,

$$(3)\quad y(x_0) + \sum_{l=1}^{n} \frac{\lambda_l}{l!}\varepsilon^l = y(x_0 + \varepsilon) - k(\varepsilon)\, p\varepsilon.$$

In base a questa definizione si può dimostrare il

TEOREMA 1. – *Se $y = y(x)$ è una curva minimante per il funzionale (1), in ogni suo punto di concentrazione a destra per l'insieme Γ coi valori $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ dei primi parametri e col p del secondo parametro, sussiste la relazione*

$$(4)\quad f(x, y(x), \lambda_1, \cdots, \lambda_n) - (p+1) f(x, y(x), y'(x+0), \cdots, y^{(n)}(x+0)) + p f(x, y(x), y'(x+0) - \frac{\lambda_1 - y'(x+0)}{p}, y''(x+0), \cdots, y^{(n)}(x+0)) \ge 0\ ^{(3)}.$$

Il teorema 1 può essere dimostrato in maniera analoga alla dimostrazione del teorema I di [1], ma si deve applicare anche l'uguaglianza (3).

La disuguaglianza (4) che si riferisce a un n arbitrario $(n = 1, 2, \cdots)$ è analoga dal punto di vista formale alla disuguaglianza (7) di [1], la quale è valida soltanto per il caso $n = 1$. Lo stesso si deve dire anche per il successivo teorema 3. I seguenti tre teoremi si deducono dal teorema 1, facendo variare i parametri e facendo inoltre alcune ipotesi sulla differenziabilità della funzione f.

TEOREMA 2. – *Se il punto $(x_0, y(x_0))$ della curva minimante $y = y(x)$ è un punto di concentrazione a destra per l'insieme Γ con un valore fisso p del secondo parametro e coi valori $\lambda_1 = y'(x_0 + 0)$ [4], $\lambda_2, \cdots, \lambda_n$ dei primi parametri, dove i parametri λ_i possono variare in certi intorni dei valori $y^{(i)}(x_0 + 0)$ $(i = 2, \cdots, n)$, se la funzione $f(x_0, y(x_0), y'(x_0 + 0), y_2, \cdots, y_n)$ è dotata di derivate parziali del primo ordine rispetto a $y_2, \cdots, y_n$ nel punto $(y_2, \cdots, y_n) = (y''(x_0 + 0), \cdots, y^{(n)}(x_0 + 0))$, sussistono le relazioni*

$$(5)\quad f_{y_i}(x_0, y(x_0), y'(x_0 + 0), \cdots, y^{(n)}(x_0 + 0)) = 0 \qquad \text{per } i = 2, \cdots, n\ ^{(5)}.$$

(3) Questo teorema è stato comunicato al II Congresso dei Matematici Ungheresi (Budapest, 24–31 agosto 1960).

(4) La condizione $\lambda_1 = y'(x_0 + 0)$ può essere sostituita con la seguente: esiste un numero positivo δ tale che λ_1 sia mantenuto nell'intervallo $y'(x_0 + 0) - \delta < \lambda_1 < y'(x_0 + 0)$ oppure nell'intervallo $y'(x_0 + 0) < \lambda_1 < y'(x_0 + 0) + \delta$.

(5) In particolare ved. [2] pp. 28 e [3] pp. 329.

TEOREMA 3 (Condizione di Weierstrass). – *Se il punto* $(x_0, y(x_0))$ *della curva minimante* $y = y(x)$ *è un punto di concentrazione a destra per l'insieme* Γ *coi valori fissi* $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ *dei primi parametri e col secondo infinitamente grande, se la funzione* $f(x_0, y(x_0), y_1, y''(x_0+0), \cdots, y^{(n)}(x_0+0))$ *è dotata di derivata rispetto a* y_1 *nel punto* $y_1 = y'(x_0+0)$, *sussiste la disuguaglianza*

$$(6)\quad f(x_0, y(x_0), \lambda_1, \cdots, \lambda_n) - f(x_0, y(x_0), y'(x_0+0), \cdots, y^{(n)}(x_0+0)) - (\lambda_1 - y'(x_0+0)) f_{y_1}(x_0, y(x_0), y'(x_0+0), \cdots, y^{(n)}(x_0+0)) \geq {}^{(6)}.$$

TEOREMA 4. (Condizione di Legendre). – *Se il punto* $(x_0, y(x_0))$ *della curva minimante* $y = y(x)$ *è un punto di concentrazione a destra per l'insieme* Γ *coi valori* $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ *dei primi parametri variabili in certi intorni dei valori* $y'(x_0+0), \cdots, y^{(n)}(x_0+0)$ *e col secondo infinitamente grande, se la funzione* $f(x_0, y(x_0), y_1, \cdots, y_n)$ *è dotata di derivate parziali continue del second'ordine rispetto a* $y_i y_j$ $(i, y = 1, \cdots, n)$ *nell'intorno del punto* $(y_1, \cdots, y_n) = (y'(x_0+0), \cdots, (y^{(n)}(x_0+0))$, *allora la forma quadratica*

$$(7)\quad \sum_{i,j=1} f_{y_i y_j}(x_0, y(x_0), y'(x_0+0), \cdots, y^{(n)}(x_0+0))\, \sigma_i \sigma_j$$

riesce semidefinita positiva (7).

Dal teorema 1 oltre le precedenti si possono ottenere anche altre condizioni necessarie, per esempio le analoghe dei teoremi delle pp. 14–15 di [1].

Come esempio di applicazione dei sopradetti teoremi può essere conveniente di esaminare il problema seguente che si avvicina molto alla trattazione ordinaria del funzionale di ordine n (8).

Sia D un dominio del piano (x, y) definito dalle limitazioni:

$$x_1 \leq x \leq x_2 \quad , \quad l_1(x) \leq y \leq l_2(x),$$

essendo le funzioni $l_1(x)$ e $l_2(x)$ di classe $\mathrm{HK}^{(n)}$ nell'intervallo $x_1 \leq x \leq x_2$ e $l_1(x) < l_2(x)$ per $x_1 \leq x \leq x_2$. Consideriamo ora l'insieme $\mathrm{R}(x, y, y_1, \cdots, y_n)$ definito nel modo seguente:

$$\mathrm{R} = \{(x, y) \in \mathrm{D}, -\infty < y_i < +\infty, i = 1, \cdots, n\}.$$

Si dice che la funzione $y(x)$, definita in un certo intervallo $a \leq x \leq b$, è ammissibile, se essa soddisfa le due seguenti ipotesi:

1° $y(x) \in \mathrm{HK}^{(n)}$, per $a \leq x \leq b$;

2° $(x, y(x)) \in \mathrm{D}$, per $a \leq x \leq b$.

Sia poi la funzione $f(x, y, y_1, \cdots, y_n)$ continua nell'insieme R. Diciamo che la funzione ammissibile $y_0(x)$ $(a \leq x \leq b)$ fornisce un minimo debole per il funzionale $\mathrm{I}[y] = \int_a^b f(x, y, y', \cdots, y^{(n)})\, dx$, se esiste un numero $\rho > 0$

(6) In particolare ved. [2] pp. 44 e [3] pp. 330.
(7) In particolare ved. [2] pp. 47 e [3] p. 330.
(8) Cfr. [2] e [3].

tale che la disuguaglianza $I[y(x)] \geq I[y_0(x)]$ sussiste per ogni funzione ammissibile, la quale soddisfa le relazioni:

$$y^{(i)}(a) = y_0^{(i)}(a) \quad , \quad y^{(i)}(b) = y_0^{(i)}(b) , \qquad i = 0, 1, \cdots, n-1;$$

$$|y^{(i)}(x \pm 0) - y_0^{(i)}(x \pm 0)| < \rho \qquad \text{per} \quad a < x < b , \qquad i = 0, 1, \cdots, n.$$

Si possono definire con facilità gli insiemi $E \subset R$ e Γ rispettivi per ogni funzione che fornisce un minimo debole al funzionale considerato. Dopo questo si può stabilire semplicemente, di ogni punto (che può essere punto interno o punto di frontiera dell'insieme D) della curva che fornisce un minimo debole, con quali valori dei parametri può essere considerato punto di concentrazione. Per questo problema sussistono teoremi analoghi ai teoremi 2, 3 e 4. Ci limitiamo a enunciare il seguente, analogo al teorema 2:

Teorema 5. – *Se la funzione ammissibile* $y(x)$ $(a \leq x \leq b)$ *fornisce un minimo debole per il funzionale* $I[y] = \int_a^b f(x, y, y', \cdots, y^{(n)})\, dx$, *se la funzione* $f(x, y, y_1, \cdots, y_n)$ *è dotata di derivate parziali del primo ordine rispetto a* $y_2, \cdots, y_n$ *nell'insieme* R, *allora la funzione* $y(x)$ *soddisfa il sistema di equazioni differenziali*

$$f_{y_i}(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0 \qquad (i = 2, \cdots, n)$$

in ogni punto dell'intervallo $a \leq x \leq b$.

Bibliografia.

[1] M. Picone, *Sulle condizioni necessarie per un estremo, nel calcolo delle variazioni*, «Memorie Acc. Naz. Lincei», *4*, fasc. 4 (1954).

[2] A. Kósa, *Notwendinge Bedingungen für die discontinuierlichen Lösungen von den Variationsproblemen n-ter Ordung*, «Acta Math. Sci. Hung.», Tom. 11, fasc. 1–2, pp. 23–48 (1960).

[3] A. Kósa, *Conditions nécessaires se rapportant aux problèmes discontinus d'orde supériur dans le calcul des variations*, «Atti Acc. Naz. Lincei», *28*, fasc. 3, pp. 328–331 (1960).

Analisi matematica. — *Un teorema di unicità per il problema di Cauchy relativo alla equazione differenziale* $x^{(n)} + a_1(t)\,x^{(n-1)} + \cdots + a_n(t)\,x = f(t, x, x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(n-1)})$. Nota di LUIGI MERLI, presentata (*) dal Socio G. SANSONE.

1. Generalizzando un risultato di A. Wintner (1) relativo alla equazione

$$x^{(n)} = f(t, x) \tag{1}$$

abbiamo recentemente dimostrato che *se si considera l'equazione*

$$x^{(n)} = f(t, x, x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(n-1)}) \tag{2}$$

ed è S *l'insieme dei punti* $(t, x, x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(n-1)})$, *definiti per* $0 < t \leq a$, $-b_i \leq x^{(i)} \leq b_i$, $b_i > 0$, $i = 0, 1, 2, 3, \cdots, n-1$, *e si indica con* S_0 *l'insieme dei punti* S *con l'aggiunta del punto* $(t, x, x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(n-1)}) = (0, 0, \cdots, 0)$, *nell'ipotesi che* $f(t, x, x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(n-1)})$ *sia continua in* S_0 *e soddisfacente alla condizione*

$$|f(t, x_1, x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, \cdots, x_1^{(n-1)}) - f(t, x_2, x_2^{(1)}, x_2^{(2)}, \cdots, x_2^{(n-1)})| \leq \tag{3}$$

$$\leq L_n \frac{|x_1 - x_2|}{t^n} + L_{n-1} \frac{|x_1^{(1)} - x_2^{(1)}|}{t^{n-1}} + \cdots + L_1 \frac{|x_1^{(n-1)} - x_2^{(n-1)}|}{t},$$

quando $(t, x_1, x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, \cdots, x_1^{(n-1)})$ *e* $(t, x_2, x_2^{(1)}, x_2^{(2)}, \cdots, x_2^{(n-1)})$ *appartengono ad* S *e le costanti* $L_1, L_2, L_3, \cdots, L_n$ *sono tali che*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{L_k}{k!} \leq 1, \tag{4}$$

esiste un $t_0 > 0$ *avente la proprietà che l'equazione* (2), *con le condizioni iniziali*

$$x(0) = x^{(1)}(0) = \cdots = x^{(n-1)}(0) = 0, \tag{5}$$

non può avere più di una soluzione in $0 \leq t \leq t_0$, (2).

Scopo di questa Nota è lo studio della equazione

$$x^{(n)} + a_1(t)\,x^{(n-1)} + \cdots + a_n(t)\,x = f(t, x, x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(n-1)}), \tag{6}$$

(*) Nella seduta del 13 novembre 1960.

(1) A. WINTNER, *On local uniqueness of the initial value problem of the differential equation* $x^{(n)} = f(t, x)$, « Boll. U.M.I. », ser. III, vol. XI, pp. 496–498 (1956).

(2) L. MERLI, *Sul teorema di unicità per il problema di Cauchy relativo all'equazione differenziale* $x^{(n)} = f(t, x, x^{(1)}, \cdots, x^{(n-1)})$, « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, vol. XXII, pp. 580–586 (1957).

che è la (2) con l'aggiunta della parte lineare $\sum_{k=1}^{n} a_k(t)\, x^{(n-k)}$ nel primo membro ($x^{(0)} = x$). Relativamente a tale equazione noi dimostreremo nel numero 2 il seguente *teorema.*

Sia S *l'insieme dei punti* $(t, x, x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(n-1)})$, *definiti per* $0 < t \leq a$, $-b_i \leq x^{(i)} \leq b_i$, $b_i > 0$, $i = 0, 1, 2, \cdots, n-1$ *e indichi* S_0 *l'insieme dei punti di* S *con l'aggiunta del punto* $(t, x, x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(n-1)}) = (0, 0, 0, \cdots, 0)$ *e risultino continue in* S_0 *le* $a_k(t)$ *e la* $f(t, x, x^{(1)}, \cdots, x^{(n-1)})$ *che supporremo soddisfi alla condizione*

$$(7) \qquad |f(t, x_1, x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, \cdots, x_1^{(n-1)}) - f(t, x_2, x_2^{(1)}, x_2^{(2)}, \cdots, x_2^{(n-1)})| \leq$$

$$\leq L_n \frac{|x_1 - x_2|}{t^n} + L_{n-1} \frac{|x_1^{(1)} - x_2^{(1)}|}{t^{n-1}} + \cdots + L_1 \frac{|x_1^{(n-1)} - x_2^{(n-1)}|}{t},$$

quando $(t, x_1, x_1^{(1)}, \cdots, x_1^{(n-1)})$ *e* $(t, x_2, x_2^{(1)}, \cdots, x_2^{(n-1)})$ *appartengono ad* S, *con le costanti* $L_1, L_2, \cdots, L_n$ *tali che risulti*

$$(8) \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{L_k}{k!} = \rho < 1$$

e, posto

$$(9) \qquad M_k(t) = t^{-k} \int_0^t (t-s)^{k-1} |\alpha_k(s)|\, ds, \qquad (t > 0),$$

con

$$\alpha_k(t) = a_k(t)\, t^k$$

risulti

$$(10) \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{\max_{0 < t \leq a} M_k(t)}{(k-1)!} \leq 1 - \rho,$$

allora esiste un $t_0 > 0$, *avente la proprietà che la* (6) *con le condizioni iniziali*

$$(11) \qquad x(0) = x^{(1)}(0) = \cdots = x^{(n-1)}(0) = 0,$$

non può avere più di una soluzione in $0 \leq t \leq t_0$.

Prima di procedere alla dimostrazione del teorema osserviamo che sarà evidentemente applicabile alla (6) il teorema di unicità in principio ricordato, relativo alla equazione (2), qualora la funzione

$$(12) \qquad \varphi(t, x, x^{(1)}, \cdots, x^{(n-1)}) = f(t, x, x^{(1)}, \cdots, x^{(n-1)}) - \sum_{k=1}^{n} a_k(t)\, x^{(n-k)},$$

con le $a_k(t)$ continue in S_0, soddisfi alle (3) e (4). Noi, invece, nell'enunciato del teorema da dimostrare, abbiamo supposte soddisfatte le condizioni (7) e (8) solamente sulla $f(t, x, x^{(1)}, \cdots, x^{(n-1)})$ che compare nel secondo membro della (6), con la condizione (10) sulle $a_k(t)$. Naturalmente se, anziché la (10), fosse soddisfatta la condizione

$$(13) \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{\max_{0 < t \leq a} |\alpha_k(t)|}{(k-1)!} \leq 1 - \rho,$$

ne seguirebbe dalla (12), tenuto conto delle (7) e (8),

$$|\varphi(t, x_1, x_1^{(1)}, \cdots, x_1^{(n-1)}) - \varphi(t, x_2, x_2^{(1)}, \cdots, x_2^{(n-1)})| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} L_k \frac{|x_1^{(n-k)} - x_2^{(n-k)}|}{t^k} + \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k(t)| \frac{|x_1^{(n-k)} - x_2^{(n-k)}|}{t^k},$$

ed essendo

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{L_k + |\alpha_k(t)|}{k!} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{L_k + \max_{0 < t \leq a} |\alpha_k(t)|}{k!} \leq 1,$$

sarebbe applicabile il teorema ricordato relativo alla equazione (2). Invece la condizione (10) è relativa alle medie (9) delle $|\alpha_k(t)|$ e *mentre le* (13) *implicano le* (10), *non ne segue necessariamente il viceversa.*

2. Diamo ora la dimostrazione del teorema. Tenuto conto delle condizioni iniziali (5), la (6) può essere scritta nella forma integrale

$$(14)\quad x(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-s)^{n-1} \left[f(s, x(s), x^{(1)}(s), \cdots, x^{(n-1)}(s)) - \sum_{k=1}^{n} a_k(s) x^{(n-k)} \right] ds,$$

e se $x_1(t)$ e $x_2(t)$ sono due eventuali soluzioni dell'equazione data ad essa soddisfacenti in $0 \leq t \leq t^0$, si ha:

$$(15)\quad |x_1(t) - x_2(t)| = \frac{1}{(n-1)!} \left| \int_0^t (t-s)^{n-1} \left\{ [f(s, x_1(s), x_1^{(1)}(s), \cdots, x_1^{(n-1)}(s)) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - f(s, x_2(s), x_2^{(1)}(s), \cdots, x_2^{(n-1)}(s))] - \left[\sum_{k=1}^{n} a_k(s) (x_1^{(n-k)}(s) - x_2^{(n-k)}(s)) \right] \right\} ds \right|$$

e quindi, tenuto conto della (7)

$$(1)\quad |x_1(t) - x_2(t)| \leq \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-s)^{n-1} \left| L_n \frac{|x_1(s) - x_2(s)|}{s^n} + L_{n-1} \frac{|x_1^{(1)}(s) - x_2^{(1)}(s)|}{s^{n-1}} + \cdots \right.$$

$$\left. \cdots + L_1 \frac{|x_1^{(n-1)}(s) - x_2^{(n-1)}(s)|}{s} + \sum_{k=1}^{n} |a_k(s)| s^k \frac{|x_1^{(n-k)}(s) - x_2^{(n-k)}(s)|}{s^k} \right| ds.$$

ed anche:

$$(2)\quad |x_1^{(1)}(t) - x_2^{(1)}(t)| \leq \frac{1}{(n-2)!} \int_0^t (t-s)^{n-2} \left| L_n \frac{|x_1(s) - x_2(s)|}{s^n} + L_{n-1} \frac{|x_1^{(1)}(s) - x_2^{(1)}(s)|}{s^{n-1}} + \cdots \right.$$

$$\left. \cdots + L_1 \frac{|x_1^{(n-1)}(s) - x_2^{(n-1)}(s)|}{s} + \sum_{k=1}^{n} |a_k(s)| s^k \frac{|x_1^{(n-k)}(s) - x_2^{(n-k)}(s)|}{s^k} \right| ds,$$

.....

$$(n-1)\quad |x_1^{(n-2)}(t) - x_2^{(n-2)}(t)| \leq \frac{1}{1!} \int_0^t (t-s) \left[L_n \frac{|x_1(s) - x_2(s)|}{s^n} + L_{n-1} \frac{|x_1^{(1)}(s) - x_2^{(1)}(s)|}{s^{n-1}} + \cdots \right.$$

$$\left. \cdots + L_1 \frac{|x_1^{(n-1)}(s) - x_2^{(n-1)}(s)|}{s} + \sum_{k=1}^{n} |a_k(s)| s^k \frac{|x_1^{(n-k)}(s) - x_2^{(n-k)}(s)|}{s^k} \right] ds,$$

$$(15_n)\qquad |x_1^{(n-1)}(t)-x_2^{(n-1)}(t)| \le \int_0^t \left[L_n \frac{|x_1(s)-x_2(s)|}{s^n} + L_{n-1}\frac{|x_1^{(1)}(s)-x_2^{(1)}(s)|}{s^{n-1}} + \cdots \right.$$

$$\left. \cdots + L_1 \frac{|x_1^{(n-1)}(s)-x_2^{(n-1)}(s)|}{s} + \sum_{k=1}^{n} |a_k(s)|\, s^k \frac{|x_1^{(n-k)}(s)-x_2^{(n-k)}(s)|}{s^k} \right] ds .$$

Moltiplicando le $(15_1), (15_2), \cdots, (15_n)$ rispettivamente per

$$t^{-n}, t^{-(n-1)}, \cdots, t^{-1}, \qquad (t>0),$$

e sommando membro a membro si ottiene

$$(16)\qquad \frac{|x_1(t)-x_2(t)|}{t^n} + \frac{|x_1^{(1)}(t)-x_2^{(1)}(t)|}{t^{n-1}} + \cdots + \frac{|x_1^{(n-1)}(t)-x_2^{(n-1)}(t)|}{t} \le$$

$$\le \int_0^t \left[\frac{L_n t^{-n}(t-s)^{n-1} + t^{-n}s^n |a_n(s)|}{(n-1)!} + \frac{L_{n-1}t^{-(n-1)}(t-s)^{n-2} + t^{-(n-1)}s^{n-1}|a_{n-1}(s)|}{(n-2)!} + \cdots \right.$$

$$\left. \cdots + \frac{L_1 t^{-1} + t^{-1}s\,|a_1(s)|}{0!} \right] \left[\frac{|x_1(s)-x_2(s)|}{s^n} + \cdots + \frac{|x_1^{(n-1)}(s)-x_2^{(n-1)}(s)|}{s} \right] ds$$

e posto per semplicità

$$K(t,s) = \frac{L_n t^{-1}(t-s)^{n-1} + t^{-n}s^n |a_n(s)|}{(n-1)!} + \cdots + \frac{L_1 t^{-1} + t^{-1}s\,|a_1(s)|}{0!},$$

e

$$y(t) = \frac{|x_1(t)-x_2(t)|}{t^n} + \frac{|x_1^{(1)}(t)-x_2^{(2)}(t)|}{t^{n-1}} + \cdots + \frac{|x_1^{(n-1)}(t)-x_2^{(n-1)}(t)|}{t},$$

si avrà, per $0 \le t \le t^0$,

$$y(t) \le \int_0^t K(t,s)\, y(s)\, ds,$$

con

$$\int_0^t K(t,s)\, ds = \int_0^t \left[\frac{L_n t^{-n}(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{L_n t^{-(n-1)}(t-s)^{n-2}}{(n-2)!} + \cdots + L_2 t^{-1} \right] ds +$$

$$+ \int_0^t \left[\frac{t^{-n}(t-s)^{n-1}|a_n(s)|s^n}{(n-1)!} + \frac{t^{-(n-1)}(t-s)^{n-2}|a_{n-1}(s)|s^{n-1}}{(n-2)!} + \cdots + \frac{t^{-1}|a_1(s)|s}{0!} \right] ds \le$$

avendo tenuto conto delle (8), (9) e (10).

Allora, per un lemma di cui abbiamo fatto uso nel lavoro precedentemente ricordato [3], esisterà un $t_0 \le t^0$ tale che, per $0 \le t \le t_0$, sarà $y(t) \equiv 0$. Ne risulterà quindi anche $x_1(t) \equiv x_2(t)$, per $0 \le t \le t_0$. c.v.d.

(3) Cfr. loc. cit. in (2), p. 581.

Geometria. — *Su una generalizzazione dei piani di Hughes*. Nota di LUIGI ANTONIO ROSATI presentata (*) dal Corrisp. G. ZAPPA.

In un lavoro in corso di pubblicazione [1], per dimostrare che i piani di Hughes sono autoduali, ho dato di essi una nuova definizione.

In questo lavoro do prima di tutto la costruzione di quasicorpi associativi infiniti aventi per centro un campo e di rango due sopra di esso. Mostro poi come, preso un qualunque quasicorpo associativo infinito, R, avente per centro un campo e di rango due sopra di esso, si possa, con la definizione data in [1], costruire a partire da R un piano proiettivo infinito, determinando così una nuova classe di piani proiettivi.

In alcuni casi i ragionamenti da farsi saranno perfettamente analoghi a quelli fatti in [1] e allora dei teoremi per lo più saranno riportati soltanto gli enunciati, mentre saranno svolte dettagliatamente le parti nuove.

1. Verifichiamo prima di tutto l'esistenza di quasicorpi associativi infiniti, R, aventi per centro un campo, F, e di rango 2 sopra F, tali cioè che, fissato un elemento qualunque, t, dell'insieme R — F degli elementi di R non appartenenti ad F e preso un elemento qualsiasi, α, di r, risultano determinati univocamente due elementi di F, a, a_1, tali che $\alpha = a + a_1 t$. Chiameremo a, a_1 le componenti di α secondo t e le scriveremo sempre nell'ordine ora usato.

Consideriamo una successione $n_1, n_2, \cdots, n_i, \cdots$ di interi dispari maggiori di uno. Presa una qualsiasi potenza p^h (h intero ≥ 1) di un numero primo dispari p, si ponga $q_1 = p^h$, $q_{i+1} = q_i^{n_i}$ ($i = 1, 2, \cdots$). Siano poi $\overline{K}_1, \overline{K}_2, \cdots, \overline{K}_i, \cdots$ campi di Galois d'ordini rispettivi $q_1^2, q_2^2, \cdots, q_i^2, \cdots$. Per ogni i vogliamo costruire un isomorfismo, φ_i, di $\overline{K}_i$ in $\overline{K}_{i+1}$: in $\overline{K}_{i+1}$ prendiamo gli elementi il cui periodo (nel gruppo moltiplicativo) divide $q_i^2 - 1$. Sia K_i^* l'insieme formato da tali elementi e dallo zero e siano a, b due elementi di K_i^*. Tenuto conto di una nota identità si ha $(a+b)^{q_i^2-1} = (a+b)^{q_i^2} : (a+b) = \left(a^{q_i^2} + b^{q_i^2}\right) : (a+b) = (a+b) : (a+b) = 1$. Pertanto K_i^* è un campo di Galois d'ordine q_i^2 e quindi è isomorfo a $\overline{K}_i$. Un isomorfismo di $\overline{K}_i$ su K_i^* è anche un isomorfismo di $\overline{K}_i$ in $\overline{K}_{i+1}$.

Prendiamo ora il limite diretto della successione di campi $\overline{K}_1, \overline{K}_2, \cdots, \overline{K}_i, \cdots$ relativo agli isomorfismi φ_i (1). Esso è un campo $K = \bigcup_i K_i$, con K_i isomorfo a $\overline{K}_i$ e si ha $K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset K_i \subset \cdots$.

(*) Nella seduta del 19 novembre 1960.

(1) Per evitare l'uso del postulato di Zermelo possiamo costruire i campi $\overline{K}_i$ e gli isomorfismi φ_i usando il seguente procedimento. Si considera un campo di Galois K_1 d'ordine q_1^2 e se ne ordinano gli elementi mediante i numeri $0, 1, \cdots, q_1^2 - 1$, ponendo l'elemento

Sia ω_i $(i = 1, 2, \cdots)$ un generatore qualunque del gruppo moltiplicativo, $K_i^\times$, di K_i. L'indice di $K_i^\times$ in $K_{i+1}^\times$ è dato da $x = q_i^{2(n_i-1)} + q_i^{2(n_i-2)} + \cdots + q_i^2 + 1$ ed è un numero dispari perché n_i e q_i sono dispari. Ogni generatore di $K_i^\times$ è dato allora da ω_{i+1}^{kx}, con k numero primo con l'ordine $q_i^2 - 1$ di $K_i^\times$, quindi dispari. Essendo ω_i un particolare generatore di $K_i^\times$, è $\omega_i = \omega_{i+1}^{\bar{k}x}$, con $\bar{k}$ dispari; quindi $h = \bar{k}x$ è dispari. Pertanto, comunque si scelgano un generatore ω_i di $K_i^\times$ e uno ω_{i+1} di $K_{i+1}^\times$, ω_i è potenza di ω_{i+1} ad esponente dispari (esponente determinato a meno di multipli del numero pari $q_1^{2n_i} - 1$). Analogamente, per ogni $j > i$, sarà $\omega_i = \omega_j^l$, con l dispari. Se ora α è un qualunque elemento di K diverso da zero e K_i, K_j $(j > i)$ sono due dei sottocampi $K_1, K_2, \cdots$ che lo contengono, si ha $\alpha = \omega_i^{d_i} = \omega_j^{d_j}$, essendo d_i, d_j interi determinati rispettivamente mod $(q_i^2 - 1)$ e mod $(q_j^2 - 1)$. Allora $\omega_j^{ld_i} = \omega_j^{d_j}$, e perciò $ld_i \equiv d_j \pmod{(q_j^2 - 1)}$. Siccome l è dispari, d_i e d_j avranno la stessa parità. Diremo α di classe pari se, per ogni i, d_i è pari, di classe dispari nel caso contrario.

Osserviamo ora che, se β è un qualunque elemento di K e se K_i è il primo dei sottocampi $K_1, K_2, \cdots$ che contiene β, si ha $\beta^{q_i} = \beta^{q_{i+1}}$. Ciò è manifesto se $\beta = 0$; se $\beta \neq 0$ la cosa risulta dal fatto che il periodo di β divide $q_i^2 - 1$ e d'altronde si ha $q_{i+1} = q_i^{n_i}$, $q_i^{n_i} \equiv q_i \pmod{(q_i^2 - 1)}$ (si ricordi che n_i è dispari). Pertanto, se β è anche elemento di K_j $(j > i)$, si ha $\beta^{q_j} = \beta^{q_i}$.

Diciamo ora quasicorpo associativo (destro) un sistema, R, con doppia composizione definito dalle seguenti proprietà:

1° gli elementi di R, rispetto all'addizione, formano un gruppo abeliano;

2° gli elementi non nulli di R formano, rispetto alla moltiplicazione, un gruppo; inoltre, qualunque sia a in R, si ha $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$;

3° qualunque siano a, b, c in R, si ha $a(b + c) = ab + ac$.

Sulle coppie ordinate di elementi di K vogliamo ora definire una nuova operazione θ, indicando con $\alpha \circ \beta$ l'elemento di K che si ottiene operando sulla coppia α, β mediante θ: porremo per definizione $\alpha \circ \beta = 0$, se $\alpha = 0$; $\alpha \circ \beta = \alpha\beta$, se α è di classi pari; $\alpha \circ \beta = \alpha\beta^{q_i}$, se α è di classe dispari e K_i è uno qualsiasi dei sottocampi $K_1, K_2, \cdots$ contenente β. È facile verificare che gli elementi di K, composti mediante θ e mediante le regole di addizione in K,

nullo al primo posto. Si stabilisce un ordinamento θ nei polinomi in una indeterminata a coefficienti in $\bar{K}_1$ associando a ciascuno il numero in base q_1^2 (che chiameremo indice del polinomio) che ha per cifre gli ordini dei suoi coefficienti in $\bar{K}_1$ e disponendo gli indici in ordine crescente. Evidentemente detti polinomi si succederanno in ordine crescente di grado. Si amplia $\bar{K}_1$ mediante un'indeterminata $\bar{t}_i$ $(i = 2, 3, \cdots)$ che sia radice del primo polinomio di grado $n_1 n_2 \cdot \ldots \cdot n_{i-1}$ irriducibile in K_1 (tale polinomio sicuramente esiste [2]), ottenendo un campo di Galois $\bar{K}_i$ d'ordine $q_i^2 = q_1^{2n_1 n_2 \cdot \cdots \cdot n_{i-1}}$ $(i = 2, 3, \cdots)$. Fra tutti gli isomorfismi di $\bar{K}_i$ in $\bar{K}_{i+1}$ consideriamo l'isomorfismo φ_i che porta il primo elemento, a, di $\bar{K}_i$ nel primo elemento di $\bar{K}_{i+1}$ (ogni elemento di $\bar{K}_{i+1}$ o di $\bar{K}_i$ è un polinomio a coefficienti in $\bar{K}_1$) che provenga da a per mezzo degli isomorfismi di $\bar{K}_i$ in $\bar{K}_{i+1}$, seguitando in modo ovvio quando di tali isomorfismi ve ne sia più di uno.

costituiscono un quasicorpo associativo (destro), R. Intanto costituiscono un gruppo abeliano rispetto all'addizione (il gruppo additivo di K). Poi, rispetto a θ e alla solita operazione di addizione, gli elementi di K_i ($i = 1, 2, \cdots$) costituiscono un quasicorpo associativo (destro), R_i, d'ordine q_i^2 avente per centro il campo, F_i, d'ordine q_i contenuto in K_i [3]. Quindi rispetto a θ gli elementi diversi da zero di K costituiscono un gruppo dove il prodotto di due elementi coincide col prodotto degli stessi elementi negli R_i che li contengono entrambi. Allora vale la proprietà distributiva $\gamma \circ (\alpha + \beta) = \gamma \circ \alpha + \gamma \circ \beta$, essendo α, β, γ elementi qualunque di K e si ha anche $0 \circ \alpha = \alpha \circ 0 = 0$.

Il centro di R è il campo $F = \cup F_i$ (si riconosce subito che $F_1 \subset F_2 \subset \cdots \cdots \subset F_i \subset \cdots$): infatti, presi un qualunque elemento di F e un qualunque elemento di R, essi appartengono entrambi ad un R_i; perciò sono permutabili in R_i e quindi anche in R. D'altra parte ogni elemento del centro di R è permutabile con ogni elemento di un qualunque R_i che lo contenga; quindi appartiene al centro F_i di R_i e perciò anche a $F = \bigcup_i F_i$.

Si vede immediatamente che se t è un qualunque elemento di $R - F$, ogni elemento α di R si lascia esprimere in uno ed un sol modo nella forma $\alpha = a + bt$, con a, b elementi di F. Infatti, se R_i contiene α e t, risultano determinati due elementi a, b di F_i e quindi di F tali che $\alpha = a + bt$. Infatti al variare di a, b in F_i, $a + bt$ fornisce q_i^2 elementi di R_i a due a due distinti, e quindi tutti gli elementi di R_i. Ed è chiaro che a e b non dipendono da i, perché, se in R_j si ha $\alpha = \bar{a} + \bar{b}t$, con $\bar{a}, \bar{b}$ elementi di F_j, e se per esempio $j > i$, allora R_j contiene R_i e quindi anche a, b, e per l'unicità della decomposizione di α in R_j, si ha $\bar{a} = a$, $\bar{b} = b$.

2. D'ora in avanti il prodotto di a per b in un quasicorpo R lo indicheremo col solito simbolo ab. Come in [1] possiamo dimostrare i seguenti lemmi (il terzo di essi in [1] è enunciato in forma equivalente ma diversa).

Lemma 1. – *Sia* R *un quasicorpo associativo destro avente per centro il campo* F. *Allora, se* t *è un elemento di* $R - F$ *e* l, l_1, m, m_1 *sono elementi di* F, *da*

$$l + mt + (m_1 + l_1 t)t = 0$$

segue

$$l + m_1 t + (m + l_1 t)t = 0$$

e viceversa.

Lemma 2. – *Sia* R *un quasicorpo associativo avente per centro il campo* F *e di rango 2 sopra* F. *Sia poi* t *un elemento di* $R - F$ *e siano* x, y, z, u, v, w *elementi di* R *di componenti rispetto a* t *ordinatamente uguali a* $p, p_1; q, q_1; r, r_1; a, a_1; b, b_1; c, c_1$. *Allora, se vale una delle due uguaglianze*

$$(1) \qquad ax + by + cz + (a_1 x + b_1 y + c_1 z)t = 0$$

$$(2) \qquad pu + qv + rw + (p_1 u + q_1 v + r_1 w)t = 0,$$

vale anche l'altra (per il medesimo t) e valgono le analoghe uguaglianze ottenute in corrispondenza dei vari valori di t in R — F.

Da questo lemma segue che, fissati in R u, v, w non tutti nulli, l'insieme delle terne ordinate di elementi di R non tutti nulli x, y, z che verificano la (1) dipende unicamente da u, v, w, cioè non varia se, variando t in R — F, variano conseguentemente a, a_1, b, b_1, c, c_1 in F. Date allora le due terne di elementi di R x, y, z e u, v, w, siano verificate le (1), (2). Diremo che le due terne sono incidenti.

Lemma 3. – *Se x, y, z e u, v, w sono incidenti, lo sono anche hx, hy, hz e ku, kv, hw, qualunque siano h, k diversi da zero.*

Diremo ora che la terna x, y, z è proporzionale alla terna $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ se è $\bar{x} = kx$, $\bar{y} = ky$, $\bar{z} = kz$ con $k \neq 0$. Si vede subito che tale relazione di proporzionalità è riflessiva, simmetrica e transitiva, perciò le terne di elementi non tutti nulli di R si possono suddividere in classi complete di terne equivalenti.

Ad ogni classe completa di terne equivalenti associamo ora due enti astratti, uno chiamato « punto » e indicato col simbolo (x, y, z), ove x, y, z è una terna della classe, l'altro chiamato retta e indicato col simbolo $[x, y, z]$. Un punto (x, y, z) e una retta $[u, v, w]$ verranno detti incidenti se tali sono le terne x, y, z e u, v, w. In base al lemma 3, la relazione d'incidenza tra punto e retta non dipende dalle particolari terne scelte per rappresentare il punto e la retta.

I punti (x, y, z) e le rette $[u, v, w]$ con le suddette relazioni d'incidenza costituiscono un insieme che diremo Π. Vogliamo dimostrare che

Teorema 1. – Π *è un piano proiettivo.*

Tenuto conto della dualità delle definizioni di punto e di retta di Π e delle relazioni d'incidenza, ci basterà riconoscere che due rette distinte hanno uno ed un solo punto in comune. Osserviamo prima di tutto che una sostituzione lineare a coefficienti in F sulle variabili x, y, z di determinante diverso da zero fornisce una trasformazione di Π in sè che muta i punti di una retta in punti di una retta e che chiameremo una proiettività: infatti, se S è una tale sostituzione e

$$x' = d_{11}x + d_{12}y + d_{13}z$$

$$y' = d_{21}x + d_{22}y + d_{23}z$$

$$z' = d_{31}x + d_{32}y + d_{32}z$$

sono le equazioni di S^{-1} si ha che, se S muta (x', y', z') in (x, y, z), muta anche (kx', ky', kz') in (kx, ky, kz). Inoltre, se (x', y', z') appartiene a $[u', v', w']$ si ha

$$ax' + by' + cz' + (a_1x' + b_1y' + c_1z')t = 0,$$

dove $a + a_1t = ku'$, $b + b_1t = kv'$, $c + c_1t = kw'$ e k è un qualunque elemento di R diverso da zero; quindi per il trasformato (x, y, z) di (x', y', z')

mediante S si ottiene

$$(ad_{11} + bd_{21} + cd_{31})\,x + (ad_{12} + bd_{22} + cd_{32})\,y + (ad_{13} + bd_{23} + cd_{33})\,z +$$
$$+ [(a_1 d_{11} + b_1 d_{21} + c_1 d_{31})\,x + (a_1 d_{12} + b_1 d_{22} + c_1 d_{32})\,y + (a_1 d_{13} + b_1 d_{23} + c_1 d_{33})\,z] = 0\,,$$

vale a dire $(x\,,\,y\,,\,z)$ appartiene a

$$[d_{11}ku' + d_{21}kv' + d_{31}kw'\,,\; d_{12}ku' + d_{22}kv' + d_{32}kw'\,,\; d_{13}ku' + d_{23}kv' + d_{33}kw']\,,$$

cioè a

$$[d_{11}u' + d_{21}v' + d_{31}w'\,,\; d_{12}u' + d_{22}v' + d_{32}w'\,,\; d_{13}u' + d_{23}v' + d_{33}w']\,.$$

In altre parole S muta $[u', v', w']$ in $[d_{11}u' + d_{21}v' + d_{31}w'\,,\; d_{12}u' + d_{22}v' + d_{32}w'\,,\; d_{13}u' + d_{23}v' + d_{33}w']$.

Siano allora $[u\,,\,v\,,\,w]$, $[u'\,,\,v'\,,\,w']$ due rette distinte di Π. Siccome i punti e le rette di Π a coordinate proporzionali ad elementi di F sono, come si vede subito, gli elementi di un piano desarguesiano e poiché inoltre due rette di Π a coordinate proporzionali ad elementi di F non possono avere a comune un punto le cui coordinate non siano proporzionali ad elementi di F, ci basterà supporre che per esempio $u\,,\,v\,,\,w$ non siano proporzionali ad elementi di F. Allora se la (1) è un'equazione a cui soddisfano i punti di $[u\,,v\,,w]$, $a_1\,,b_1\,,c_1$ non sono tutti nulli, né proporzionali (secondo un elemento di F) ad $a\,,\,b\,,\,c$. Quindi esiste una sostituzione lineare a coefficienti in F e di determinante diverso da zero che muta la forma $y + xt$ nella forma $ax + by + cz + (a_1 x + b_1 y + c_1 z)\,t$, cioè una proiettività di Π che muta $[t\,,\,1\,,\,0]$ (cioè la retta i cui punti soddisfano l'equazione $y + xt = 0$) in $[u\,,\,v\,,\,w]$. Allora la proiettività inversa muta $[u\,,\,v\,,\,w]$ in $[t,\,1\,,\,0]$ e muterà $[u', v', w']$ in $[\bar{u}\,,\,\bar{v}\,,\,\bar{w}]$. Siccome $\bar{u}\,,\,\bar{v}\,,\,\bar{w}$ sono determinati a meno d'un fattore appartenente ad R, possiamo supporre che $\bar{v}$ appartenga ad F. Ne viene che, posto $\bar{u} = a + a_1 t$, $\bar{v} = b$, $\bar{w} = c + c_1 t$ (t elemento qualunque di R — F; $a\,,\,a_1\,,\,b\,,\,c\,,\,c_1$ elementi di F), i punti di $[\bar{u}\,,\,\bar{v}\,,\,\bar{w}]$ soddisfano l'equazione

$$ax + by + cz + (a_1 x + c_1 z)\,t = 0\,, \tag{3}$$

e ci sarà sufficiente dimostrare che il sistema dell'equazione (3) e dell'equazione $y + xt = 0$ ammette, a meno di un fattore sinistro appartenente ad R, una ed una sola soluzione.

Notiamo che $[\bar{u}\,,\,\bar{v}\,,\,\bar{w}]$ e $[t\,,\,1\,,\,0]$ sono distinte perché, se queste due rette coincidessero, coinciderebbero anche $[u\,,\,v\,,\,w]$ e $[u'\,,\,v'\,,\,w']$, perché una proiettività, come abbiamo visto, muta rette coincidenti in rette coincidenti. Dall'equazione (3) e dall'equazione $y + xt = 0$ abbiamo

$$x\,(a - bt) + cz + (a_1 x + c_1 z)\,t = 0\,. \tag{4}$$

Ebbene questa permette di ricavare in modo unico $x\,,\,z$ (e quindi y), a meno d'un fattore sinistro. La cosa è evidente per $c_1 = 0$, perché allora la (4) dà

$$x\,(a - bt + a_1 t) + cz = 0\,,$$

che non è indeterminata perché, se fosse $a = c = 0$, $a_1 = b$, $[\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}]$ e $[t, 1, 0]$ coinciderebbero. Se $c_1 \neq 0$, posto $a_1 x + c_1 z = Z$, si ha $z = c_1^{-1}(Z - ax)$ e quindi dalla (4) si ottiene

$$x(a - cc_1^{-1}a_1 - bt) + Z(cc_1^{-1} + t) = 0.$$

Neanche questa può essere indeterminata e permette di ricavare in modo unico x e Z a meno di un fattore sinistro. Sempre poi a meno dello stesso fattore sinistro si possono ricavare in modo unico y e z.

Da [1] risulta che, se R è finito, allora Π coincide col piano di Hughes relativo a R.

Siano Π e Π' due dei piani ora costruiti e siano R e R' i quasicorpi ad essi relativi. Ebbene, analogamente a quanto fatto in [1], si mostra che

Teorema 2. – *Se* Π *e* Π' *sono isomorfi, lo sono anche* R *e* R'.

Teorema 3. – Π *è autoduale e ammette la polarità che porta* (x, y, z) *in* $[x, y, z]$ *e* (u, v, w) in $[u, v, w]$, *essendo* (x, y, z) *e* $[u, v, w]$ *un punto e una retta qualunque di* Π.

Terminiamo mostrando come un qualunque quasicorpo associativo R avente per centro un campo F e di rango 2 sopra F sia atto a costruire anche un piano di traslazione. Basterà dimostrare che, se a, b, e $a \neq b$ sono elementi qualunque di R. l'equazione in x

$$-ax + bx = c \tag{5}$$

ammette una e una sola soluzione. Detto t un qualunque elemento di R — F, poniamo $x = p + p_1 t$. La (5) diventa

$$-a(p + p_1 t) + b(p + p_1 t) = c,$$

cioè

$$p(-a + b) + p_1(-at + bt) = c,$$

o anche

$$p + p_1(-a + b)^{-1}(-at + bt) = (-a + b)^{-1} c.$$

Quindi l'unica soluzione della (5) è l'elemento di R che ha per componenti secondo t le componenti di $(-a + b)^{-1} c$ secondo $(-a + b)^{-1}(-at + bt)$.

Bibliografia.

[1] L. A. Rosati, *Unicità e autodualità dei piani di Hughes*, « Rend. Sem. Mat. Univ. Padova », vol. XXX, pp. 316–327 (1960).

[2] B. Segre, *Lezioni di Geometria Moderna*, Zanichelli, Bologna 1948.

[3] H. Zassenhaus, *Uber endliche Fästkörper*, « Abh. Math. Sem. Hamburg. Univ. », *11*, pp. 187–220 (1935),

Fisica matematica. — *Onde di discontinuità ed elasticità asimmetrica*. Nota di GIUSEPPE GRIOLI, presentata (*) dal Corrisp. A. TONOLO.

Di recente ho stabilito le equazioni generali della Meccanica dei continui elastici nell'ipotesi che le caratteristiche di tensione possano risultare asimmetriche (1).

Non mi è sembrato superfluo il farlo giacché anche nell'ambito dei fenomeni puramente meccanici e in assenza di momenti di massa, dovuti eventualmente a circostanze di natura elettromagnetica, possono presentarsi dei casi in cui il problema ha tale natura da implicare necessariamente asimmetria nelle caratteristiche di tensione (2), mentre se queste si suppongono simmetriche nascono singolarità certamente non plausibili nella soluzione del corrispondente problema analitico.

Una trattazione dell'argomento, fondata su considerazioni termodinamiche, mostra che l'*energia libera termodinamica* la cui conoscenza permette di stabilire le equazioni costitutive che legano lo *stress* e l'*entropia* alla deformazione e alla temperatura, necessariamente viene a dipendere oltre che dalle caratteristiche di deformazione e dalla temperatura, anche dalla rotazione locale, ma da quest'ultima *solo per tramite delle sue derivate prime*.

Una teoria con caratteristiche di tensione asimmetriche in assenza di momenti di massa implica necessariamente l'idea che le forze di contatto che si trasmettono attraverso un elemento superficiale interno ad un continuo siano riducibili ad una forza applicata in un punto dell'elemento ed ad una coppia.

L'esistenza di tali momenti superficiali porta a ritenere che il continuo, quale schema di un corpo naturale, si debba pensare come costituito da *particelle elementari* a contatto che, se pure molto piccole, non possono ritenersi evanescenti e le cui dimensioni dipendono dai valori dei coefficienti intervenienti nelle equazioni costitutive fondamentali.

Stabilire quale sia tale dipendenza non è facile se si considera il problema in tutta generalità, nell'ambito della teoria delle deformazioni finite. La questione si presenta in veste più semplice, invece, nel caso di corpi poco deformabili (caso lineare), omogenei ed isotropi, se si fonda la sua risoluzione su una ipotesi di natura fisica.

Precisamente, dato che una teoria dei corpi elastici in cui si ammetta asimmetria delle caratteristiche di tensione ha interesse e motivo di esistere sopratutto con lo scopo di eliminare nelle soluzioni quelle poco plausibili singolarità che si presentano in determinati problemi (3), mi sembra fisicamente

(*) Nella seduta del 19 novembre 1960.

(1) GIUSEPPE GRIOLI, *Elasticità asimmetrica*, « Annali di Matematica pura ed applicata » (IV), vol. L, pp. 389–418 (1960).

(2) E. REISSNER, *Note on the theorem of the symmetry of the stress tensor*, « Journal of Mathematics and Physics », vol. XXIII, p. 192 (1944).

(3) Vedi esempio in loco cit. in nota (1).

accettabile ritenere che l'ammissione dell'esistenza di momenti superficiali interni e la conseguente asimmetria delle caratteristiche di tensione *non debba* alterare la velocità di propagazione delle onde di discontinuità.

Le equazioni generali, dedotte quale prima approssimazione di una teoria di deformazioni finite e valide per corpi elastici poco deformabili, omogenei ed isotropi, dipendono oltre che dai coefficienti di Lamé da un terzo coefficiente. Si vedrà come esso risulti legato in modo molto semplice alla grandezza delle particelle elementari di cui si deve pensare costituito il corpo e come la sua conoscenza – da dedursi mediante esperienze di statica – permetta di determinarne le dimensioni.

Equazioni generali delle piccole trasformazioni isoterme. – Rispetto ad un riferimento trirettangolo levogiro $Oy_1 y_2 y_3$, siano u_r le componenti dello spostamento a partire da una configurazione di equilibrio naturale, Y_{rs} le caratteristiche lagrangiane di tensione, λ_{rs} le corrispondenti caratteristiche dei momenti superficiali. Posto

$$Y_{rs} + Y_{sr} = 2\,T_{rs}\,, \tag{1}$$

$$\varepsilon_{rs} = \frac{1}{2}(u_{r,s} + u_{s,r}) \quad , \quad \mu_{rs} = \frac{1}{2}(u_{r+2,r+1} - u_{r+1,r+2})_{,s}\,, \tag{2}$$

ove la virgola denota derivazione rispetto alle y, nel caso lineare ed isotropo risulta [4]

$$T_{rs} = \frac{\partial W}{(\delta_{rs} - 2)\,\partial \varepsilon_{rs}} \quad , \quad \lambda_{rs} = -\frac{\partial W}{\partial \mu_{rs}}\,. \tag{3}$$

Nelle (3) δ_{rs} è il simbolo di Kronecker, $W(\varepsilon_{rs}, \mu_{pq})$ il potenziale elastico isotermo, esprimibile in base all'uguaglianza

$$W(\varepsilon_{rs}, \mu_{pq}) = W_1(\varepsilon_{rs}) + W_2(\mu_{pq})\,. \tag{4}$$

Nella (4) W_1 coincide con la nota forma quadratica nelle ε_{rs} che esprime il potenziale elastico nel caso simmetrico classico, mentre risulta

$$W_2 = \frac{B}{2}\sum_{r,s}\mu_{rs}^2\,, \qquad B \geq 0. \tag{5}$$

Nel caso lineare isotermo, per la determinazione di tutte le diciotto Y_{rs}, λ_{pq} alle uguaglianze (1), (3) occorre aggiungere le ulteriori

$$Y_{r+1\,r+2} - Y_{r+2\,r+1} = \sum_m \lambda_{rm,m} - M_r\,, \tag{6}$$

ove le M_r denotano le componenti degli eventuali momenti di massa.

Le equazioni indefinite di equilibrio per le piccole trasformazioni isoterme sono [5]

$$\sum_m T_{rm,m} + \frac{1}{2}\sum_s (\lambda_{r+2\,s,r+1} - \lambda_{r+1\,s,r+2})_{,s} = F_r + \frac{1}{2}(M_{r+2,r+1} - M_{r+1,r+2})\,, \tag{7}$$

(4) Loco cit. in nota (1), p. 412.

(5) Loco cit. in nota (1).

con evidente significato delle F_r, mentre il lavoro delle forze interne per ogni deformazione infinitesima a partire dallo stato attuale è espresso, per l'elemento dC^*, da

$$(8) \qquad dC^* \, \delta l^{(i)} = \sum_{r,s} (T_{rs} \, \delta\varepsilon_{rs} + \lambda_{rs} \, \delta\mu_{rs}) \, dC^*.$$

Avendo di mira unicamente lo studio della propagazione di onde di discontinuità, si possono porre uguali a zero nelle (6), (7) le forze e i momenti di massa ($F_r = M_r = 0$) ma occorre tenere conto delle forze d'inerzia, introducendo anche un'*inerzia rotatoria*.

Ciò implica l'introduzione di un ulteriore coefficiente caratteristico.

Siano μ^* la densità, ω la velocità angolare locale e dC^* il volume della generica particella elementare. Si dovrà tener conto oltre che della sua forza d'inerzia di componenti $-\mu^* dC^* \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}$, anche del suo momento delle quantità di moto rispetto al suo baricentro che nel caso isotropo non può che avere l'espressione

$$(9) \qquad \mu^* \, \mathbf{K} \, dC^* = \mu^* \, \rho^2 \, \boldsymbol{\omega} \, dC^*,$$

ove ρ è un coefficiente il cui significato è evidente ma il cui valore non può per ora essere fissato.

I termini d'inerzia rotatoria di cui occorre tener conto sono quindi

$$(10) \qquad -\mu^* \dot{K}_r = -\mu^* \rho^2 \dot{\omega}_r = -\mu^* \frac{\rho^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} [u_{r+2,r+1} - u_{r+1,r+2}]$$

ed essi implicano – oltre a $-\mu^* \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}$ – i termini

$$(11) \qquad -\mu^* \frac{\rho^2}{4} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\sum_s u_{s,sr} - \Delta_2 u_r \right],$$

nei secondi membri delle (7).

Tenuto conto di (2), (3), (4), (5) da (7) si ottengono le equazioni dinamiche che in assenza di forze e di momenti di massa sono, pertanto,

$$(12) \qquad \nu \Delta_2 u_r + (\gamma + \nu) \sum_s u_{s,sr} + \frac{B}{4} \Delta_2 \left[\sum_s u_{s,sr} - \Delta_2 u_r \right] =$$

$$= \mu^* \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\{ \frac{\rho^2}{4} \left[\sum_s u_{s,sr} - \Delta_2 u_r \right] + u_r \right\},$$

ove $\nu > 0$ e γ denotano i coefficienti di Lamé.

SULLA PROPAGAZIONE DELLE ONDE DI DISCONTINUITÀ. – È ben noto che nel caso simmetrico ($B = 0$, $\rho = 0$) sono possibili onde irrotazionali con velocità di propagazione $V = \sqrt{\frac{\gamma + 2\nu}{\mu^*}}$ e solenoidali con velocità $V' = \sqrt{\frac{\nu}{\mu^*}}$.

Nel caso asimmetrico, se si considerano onde irrotazionali il gruppo dei termini del quarto ordine nelle (12) va a zero e si ritrova lo stesso risultato del

caso simmetrico, com'era, del resto, prevedibile, dato che gli spostamenti irrotazionali non implicano asimmetria delle caratteristiche di tensione [6].

Invece, per le onde solenoidali si deve porre

$$\text{(13)} \qquad \operatorname{div} \boldsymbol{u} = \sum_s u_{s,s} = 0$$

e le (12) divengono

$$\text{(14)} \qquad \Delta_2 \left[\nu u_r - \frac{B}{4} \Delta_2 u_r \right] = \mu^* \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[u_r - \frac{\rho^2}{4} \Delta_2 u_r \right].$$

Sulle (14) si riconosce che *si ha possibilità di propagazione con la medesima velocità del caso simmetrico allora e solo allora che risulti*

$$\text{(15)} \qquad \rho = \sqrt{\frac{B}{\nu}} .$$

Per convincersene basta osservare che la (15) è condizione necessaria e sufficiente affinché la (14) possa porsi nella forma

$$\text{(16)} \qquad \left(1 - \frac{B}{4\nu} \Delta_2 \right) \left(\Delta_2 u_r - \frac{\mu^*}{\nu} \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} \right) = 0 ,$$

dalla quale solo può discendere una velocità di propagazione uguale a $\sqrt{\nu/\mu^*}$.

La (15) dà il preannunziato legame tra il coefficiente B e il giratore di dC^* rispetto al suo baricentro. Ciò è evidentemente sufficiente per individuare, nel caso isotropo, le dimensioni delle particelle elementari di cui si deve pensare costituito il corpo. Ad esempio, se si suppone che esse siano dei cubetti di lato uguale ad l, in base a (9), (15), risulta

$$\text{(17)} \qquad l = 2 \sqrt{\frac{3B}{\nu}} .$$

(6) Loco cit. in nota (1).

Idrodinamica. — *Sul moto uniforme turbolento delle correnti liquide* (*). Nota I di ENRICO MARCHI, presentata (**) dal Corrisp. G. SUPINO.

1. Le ricerche sul moto uniforme turbolento delle correnti liquide, iniziate nel secolo scorso con esperienze eseguite per la maggior parte su canali a pelo libero (ricordiamo in particolare gli studi di Bazin), hanno poi trovato un soddisfacente inquadramento teorico, ad opera di Prandtl, Kármán, Taylor, ecc. (1), soltanto nel campo delle correnti in pressione entro condotti circolari (o nel campo concettualmente analogo del moto piano bidimensionale). Le classiche esperienze di Nikuradse su tubi omogeneamente scabri e di Colebrook su tubi con scabrezza naturale eterogenea, confermando le interpretazioni teoriche, hanno chiarito il fenomeno (medio temporale) del moto nei condotti circolari e definito in questo campo le leggi di distribuzione della velocità e le leggi di resistenza.

Più arretrato è rimasto invece l'analogo studio nei condotti di sezione diversa dalla circolare e, in generale, nei canali. In questi casi, la mancanza di quella particolare simmetria che caratterizza le correnti circolari esclude il semplice trasferimento della stessa impostazione teorica.

A partire dal 1954 ho eseguito in maniera sistematica una ricerca sperimentale sul moto uniforme di correnti a pelo libero con differenti sezioni trasversali. L'osservazione sperimentale ha confermato una sostanziale analogia di comportamento fra queste correnti e quelle circolari in pressione per quanto riguarda la dipendenza del coefficiente di attrito dal $n°$ di Reynolds e dalla scabrezza relativa, ma contemporaneamente ha messo in evidenza la non trascurabile influenza della forma della sezione. Un'indagine in questa direzione appare quindi essenziale per lo studio del moto nei canali.

Per questo mi sono proposto di affrontare il problema del movimento uniforme turbolento di un fluido incomprimibile entro condotti di sezione generica. I risultati, messa in conto (almeno globalmente) l'influenza del pelo libero, possono trasferirsi alle sezioni aperte, cioè al moto uniforme nei canali.

Nella presente Nota I tratteremo il caso della sezione circolare. Una revisione di questo studio si è resa necessaria dopo che le misure sperimentali ci avevano rivelato una sensibile differenza fra la pendenza dei profili della velocità adimensionale lungo le normali al contorno nelle sezioni non circolari (con valori 6,5–7,0 sia nelle sezioni chiuse che in quelle aperte) e il valore

(*) Ricerca eseguita nell'Istituto di Idraulica di Bologna con il contributo del C.N.R.
(**) Nella seduta del 19 novembre 1960.

(1) Per una chiara esposizione degli studi sulla turbolenza di parete e per le relative indicazioni bibliografiche si veda C. FERRARI, *Turbolenza di parete*, lezioni tenute a Varenna per il C.I.M.E. dal 1–10 settembre 1957. Libr. Univ. Levrotto e Bella, Torino, p. 171.

5,75 assegnato da Nikuradse nelle circolari. Constatato che ciò non dipende dalla forma della sezione, perché la stessa variazione si presenta anche nei singoli profili rilevati nelle sezioni circolari, dimostreremo per quest'ultime che la legge puramente logaritmica con pendenza 5,75 può giustificarsi solo come espressione semplificata di una più complessa legge di distribuzione della velocità. Proveremo però che tale semplificazione risulta corretta agli effetti della deduzione delle leggi di resistenza.

Nella Nota II, trattando il caso specifico delle sezioni non circolari, mostreremo la possibilità di sviluppare, con l'introduzione di nuove ipotesi di lavoro, un analogo inquadramento teorico.

Richiamo delle leggi del moto entro condotti circolari.

2. Ci riferiamo al moto turbolento di una corrente liquida in un tubo di sezione circolare [2] e indichiamo con U la velocità media nella sezione, con τ_0 la tensione tangenziale sul contorno (costante), con y_0 il raggio della sezione ($R = y_0/2$ = raggio idraulico), con i la pendenza motrice e con λ il coefficiente di resistenza definito dall'equazione

$$(1_1) \qquad i = \frac{\lambda}{4R} \cdot \frac{U^2}{2g} \ .$$

Poniamo inoltre $\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = u_*$ (velocità di attrito). Per ragioni di equilibrio e per la (1_1) si ha

$$(2_1) \qquad u_* = \sqrt{Rig} = U\sqrt{\frac{\lambda}{8}} \ .$$

La legge logaritmica di distribuzione delle velocità u (con valore massimo u_m), lungo una normale al contorno, in funzione della distanza y dalla parete, è

$$(3_1) \qquad \frac{u - u_m}{u_*} = \frac{1}{k} \ln \frac{y}{y_0} = b \log \frac{y}{y_0} \qquad \left(b = \frac{2{\cdot}303}{k}\right) .$$

La costante k, detta di Prandtl–Kármán, è stata determinata per via sperimentale. Ponendo $k = 0{,}40$, secondo le indicazioni di Nikuradse, si ha

$$(4_1) \qquad \frac{u - u_m}{u_*} = 5{,}75 \log \frac{y}{y_0} \ .$$

La (4_1) assume forme particolari tenendo conto delle condizioni al contorno [3]. Così, nel caso di *pareti lisce*, la legge di distribuzione della velocità diventa

$$(5_1) \qquad \frac{u}{u_*} = a_l + 5{,}75 \log\left(\frac{y u_*}{\nu}\right)$$

(2) Le considerazioni che seguono possono trasferirsi inalterate anche al moto piano bidimensionale, purché si indichi con y_0 la semidistanza fra i piani paralleli (in tal caso è $R = y_0$).

(3) Le trasformazioni sono riportate dettagliatamente in diversi trattati. Ved. ad esempio Bakhmeteff, *The Mechanics of Turbulent Flow*. Princeton U. P., 1936.

con $a_l = 5{,}5$, secondo Nikuradse [4]. Nel caso di *pareti scabre* in regime di moto assolutamente turbolento (λ indipendente dal n^o di Reynolds N), si ha

$$\frac{u}{u_*} = a_r + 5{,}75 \log\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) \tag{6_1}$$

con $a_r = 8{,}5$, in base alle esperienze ancora di Nikuradse [5] su tubi aventi scabrezza omogenea di altezza ε.

3. La legge logaritmica di distribuzione della velocità è stata assegnata per la prima volta da v. Kármán [6]. Il procedimento più semplice per dedurre la (3_1) è dovuto però sostanzialmente a Prandtl [7] e si fonda sull'ipotesi che la « lunghezza di mescolamento » – intesa modernamente anche come macroscala della turbolenza – sia proporzionale, nella regione vicina alla parete (esterna allo strato laminare), alla relativa distanza y. Esso la giustifica quindi in questa regione ma non in tutto il campo del moto, al quale invece la (4_1) viene spesso arbitrariamente estesa.

Nella regione centrale del condotto la distribuzione della velocità è stata interpretata, più recentemente, con una legge di tipo parabolico, derivata dall'ipotesi che la lunghezza di mescolamento sia in quel campo costante.

Qui possiamo fare due osservazioni:

I) I *profili sperimentali della velocità* adimensionale u/u_*, in funzione di log y, non confermano, presi singolarmente, il valore 5,75 della pendenza b, eccetto che per $y/y_0 < 0{,}15$. Nella regione ben più importante che va da $y/y_0 \cong 0{,}15$ a $y/y_0 \cong 0{,}85$ la pendenza dei profili varia fra 6,5–7,0. In vicinanza dell'asse del tubo i profili piegano rapidamente, diminuendo di pendenza, fino a raggiungere tangente orizzontale per $y = y_0$. Si vedano, a titolo di esempio, i risultati sperimentali, di Nikuradse [8] e di Dönch [9] riportati nella fig. 1.

II) Nella deduzione delle *leggi di resistenza* non si tiene conto di una differente distribuzione della velocità nella regione vicina alla parete e nella regione centrale del tubo, e si ammette senz'altro valida la (4_1), con le con-

(4) J. NIKURADSE, *Gesetzmässigkeiten der turbulenten Stromung in glatten Rohren*, « V.D.I., Forschungsheft 356 », 1932.

(5) J. NIKURADSE, *Strömungsgesetze in rauhen Rohren*, « V.D.I. Forschungsheft 361 », 1933.

(6) Ved. TH. KÁRMÁN, *Mechanische Aehnlickeit und Turbulenz.*, 3° Int. Kongress Tech. Mech. Stoccolma 1930; *Turbulens and Skin Friction*, « J. Aeron. Sciences », I (1934).

(7) L. PRANDT, *Bericht über Untersuchungen zur ausgebildeten Turbulenz*, « Z.A.M.M. », Bd. 5 (1925); *Zur turbulenten Strömung in Rohren und längs Platten*, « Ergebn. Aerod. Vers. Göttingen », *4* (1932); *Neue Ergebnisse der Turbulenzforschung*, « Z.V.D.I. », Bd. 77, n. 5 (1933).

(8) Ved. note (4) e (5).

(9) F. DÖNCH, *Divergente und Konvergente turbulente Strömungen mit kleinen Offnungswinkeln*, « V.D.I. Forschungsarb. 282 », 1926.

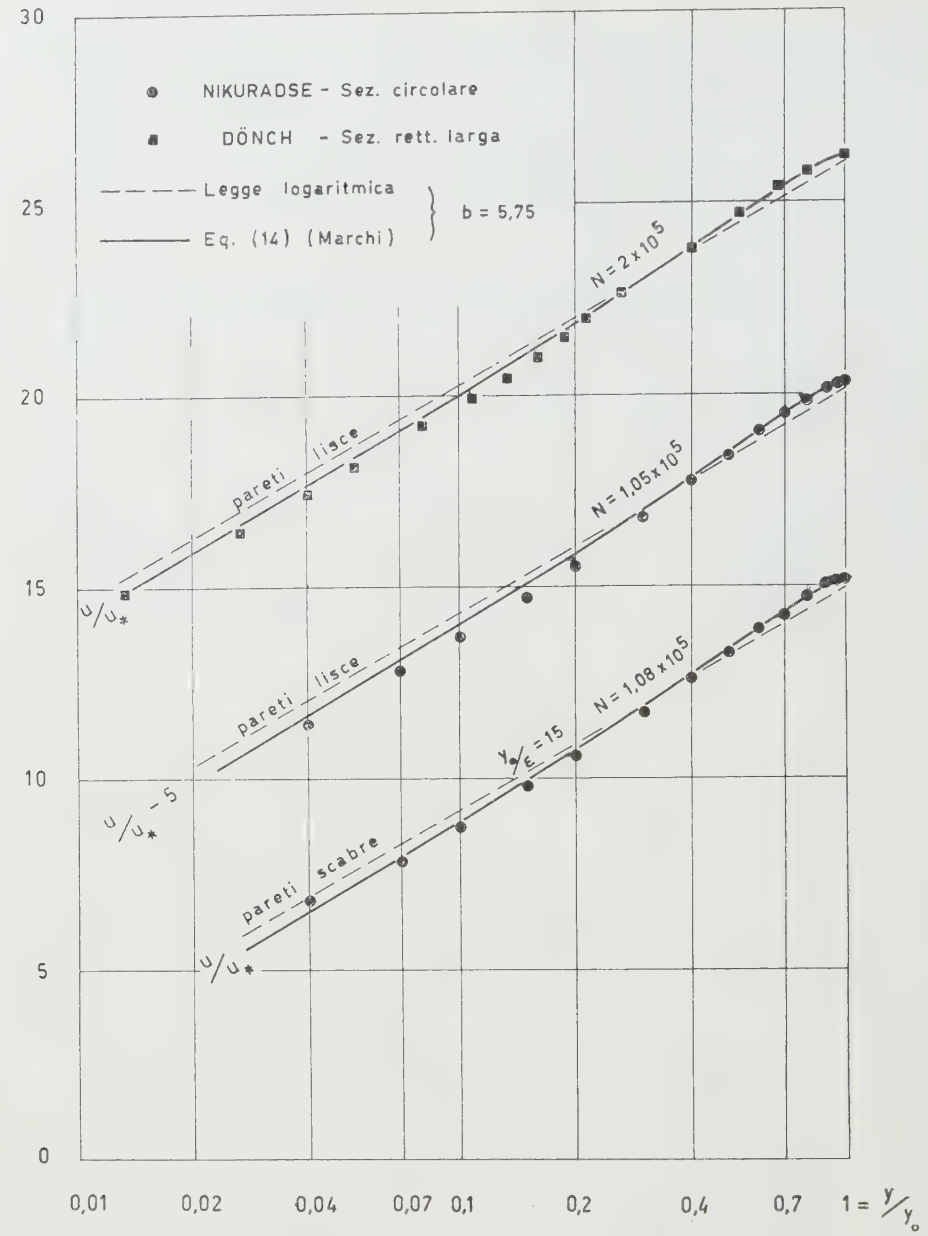


Fig. 1.

seguenti (5_1) e (6_1), in *tutta* la sezione. I risultati ottenuti con questo procedimento:

(7_1) $\quad \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = A_l + B \log (N \sqrt{\lambda})$ $\quad$ per i condotti *lisci* $\left(\text{con } N = \frac{4RU}{\nu}\right)$

e

(8_1) $\quad \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = A_r + B \log \left(\frac{4R}{\varepsilon}\right)$ $\quad$ per i condotti *scabri* in regime assolutamente turbolento

sono stati pienamente verificati dalle esperienze di Nikuradse [8], che hanno precisato i valori delle costanti $A_l = -0{,}80$, $A_r = 1{,}14$ e $B = 2{,}0$. Essi sono in soddisfacente accordo anche con i valori numerici che si ricavano attraverso la (2_I) mediando le leggi (5_I) e (6_I) in tutta la sezione (tenuto conto dei valori indicati per le costanti a_l e a_r). In particolare si ottiene

$$B = \frac{b}{\sqrt{8}} = \frac{5{,}75}{\sqrt{8}} = 2{,}03.$$

UNA NUOVA LEGGE DI DISTRIBUZIONE DELLA VELOCITÀ NEI CONDOTTI CIRCOLARI.

4. Le osservazioni precedenti si contraddicono per quanto riguarda la legge di distribuzione della velocità nella sezione. Infatti, mentre la prima conferma che la distribuzione logaritmica non può essere accettata in *tutta* la sezione, se non in via approssimata e con un valore di b sensibilmente maggiore di 5,75, la seconda giustifica la sua corretta assunzione proprio con $b = 5{,}75$.

La contraddizione scompare se si introduce nelle leggi di distribuzione della velocità (5_I) e (6_I) un termine funzione soltanto di y/y_0. In tal modo è possibile rispettare la distribuzione sperimentale della velocità assumendo $b = 5{,}75$ e conservare nello stesso tempo al coefficiente B delle leggi di resistenza il valore $5{,}75/\sqrt{8}$. Basta osservare che il contributo di una funzione di y/y_0 – mediata sulla sezione – o è nullo o si riduce ad una costante.

Per precisare questa funzione abbiamo ripreso il procedimento di Prandtl, assegnando alla lunghezza di mescolamento la seguente espressione, valida in tutta la sezione (escluso lo strato laminare).

(9_I) $$l = k y e^{-y/y_0}.$$

Essa ci è stata suggerita dai rilievi sperimentali, e dalle indicazioni qualitative che abbiamo premesso. La curva (9_I) segue fedelmente quella sperimentale di Nikuradse ponendo $K = 0{,}38$ [10], e si discosta poco da essa anche con $K = 0{,}40$ (fig. 2).

Dalla nota relazione

(10_I) $$\tau = \rho l^2 \left(\frac{du}{dy}\right)^2,$$

tenuto conto che la tensione tangenziale varia linearmente dal valore τ_0 alla parete al valore nullo in asse, segue per la (9_I)

(11_I) $$\frac{\tau_0}{\rho}\left(1 - \frac{y}{y_0}\right) = K^2 y^2 e^{-2y/y_0}\left(\frac{du}{dy}\right)^2.$$

(10) Un valore di K minore di 0,40, addirittura $K = 0{,}36$, è stato proposto da DEISSLER sulla base delle sue ricerche sperimentali sul moto di una corrente d'aria entro condotti circolari: *Analytical and experimental investigations of adiabatic turbulent flow in smooth tubes*, « Nat. Advisory Comm. Aeronaut. », Tech. Note 2138 (1950).

I risultati di queste esperienze sono in buon accordo anche con le misure eseguite su correnti d'aria fra piani lisci paralleli da W. G. SCHLINGER e B. H. SAGE, *Velocity distribution between parallel plates*, « Ind. Eng. Chem. », vol. 45, n. 12, p. 2636 (1953).

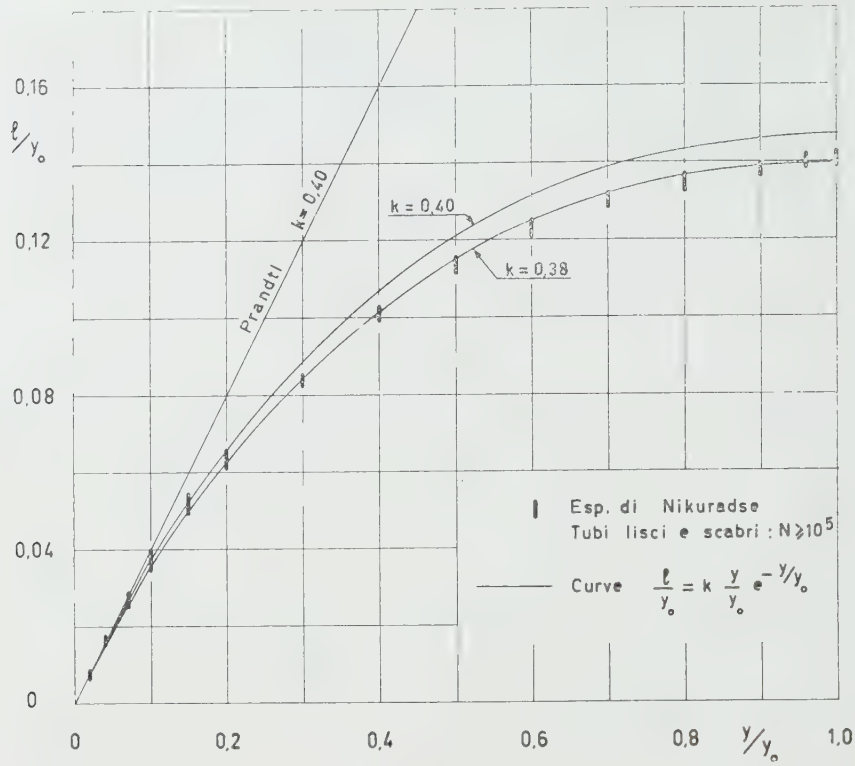


Fig. 2.

Integrando si ha, con le solite indicazioni,

$$(12_1) \qquad \frac{u}{u_*} = \frac{u_m}{u_*} \frac{1}{K} \ln \frac{y}{y_o} + \frac{1}{K} \int_{y_o}^{y} \frac{e^{y/y_o} \sqrt{1 - y/y_o} - 1}{y} \, dy .$$

Posto

$$(13_1) \qquad \Phi\left(\frac{y}{y_o}\right) = \int_1^{y/y_o} \frac{e^{y/y_o} \sqrt{1 - y/y_o} - 1}{y/y_o} \, d\left(\frac{y}{y_o}\right),$$

la legge di distribuzione della velocità diventa

$$(14_1) \qquad \frac{u}{u_*} = \frac{u_m}{u_*} + b \log\left(\frac{y}{y_o}\right) + \frac{1}{K} \Phi\left(\frac{y}{y_o}\right).$$

La funzione $\Phi\left(\frac{y}{y_o}\right)$, della quale riportiamo nella Tabella I alcuni valori, calcolati numericamente con passo $2 \cdot 10^{-3}$, rappresenta (divisa per K) il termine correttivo di cui si è detto inizialmente.

Assumendo K = 0,38 il valore del coefficiente b dovrebbe essere modificato da 5,75 a 6,0. La correzione migliorerebbe un poco la concordanza con le misure sperimentali di velocità, ma lascerebbe praticamente inalterata

la verifica delle leggi di resistenza. Appunto per questo, allo stato attuale delle cose, non ci sembra opportuna una variazione che si rifletterebbe su coefficienti ormai abituali nelle formule per il calcolo di λ.

TABELLA I.

y/y_0	$\Phi(y/y_0)$	y/y_0	$\Phi(y/y_0)$	y/y_0	$\Phi(y/y_0)$
0	— 0,2166	0,15	— 0,1433	0,70	+ 0,0520
0,01	— 0,2166	0,20	— 0,1198	0,80	+ 0,0595
0,02	— 0,2066	0,30	— 0,0751	0,90	+ 0,0480
0,04	— 0,1967	0,40	— 0,0340	0,95	+ 0,0311
0,07	— 0,1819	0,50	+ 0,0021	1,00	0
0,10	— 0,1673	0,60	+ 0,0316		

Con $b = 5{,}75$, imponendo le condizioni al contorno, si ricavano subito dalla (14_1) le leggi particolari

$$(15_1) \qquad \frac{u}{u_*} = a_l' + 5{,}75 \log\left(\frac{y u_*}{\nu}\right) + 2{,}5\,\Phi\left(\frac{y}{y_0}\right)$$

per i condotti *lisci*, e

$$(16_1) \qquad \frac{u}{u_*} = a_r' + 5{,}75 \log\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) + 2{,}5\,\Phi\left(\frac{y}{y_0}\right)$$

per i condotti *scabri* (in regime assolutamente turbolento).

I valori a_l' ed a_r' sono ancora costanti ma differiscono un poco da quelli di Nikuradse: precisamente $a_l' = 5{,}7$ ed $a_r' = 8{,}7$. La fig. 1 mette in evidenza la buona concordanza dei nostri risultati con i precedenti profili sperimentali [11]. Per quanto riguarda le leggi di resistenza, esse restano inalterate rispetto a quelle ricavate a partire dalla distribuzione puramente logaritmica della velocità, perché il valore medio nella sezione circolare di $2{,}5\,\Phi(y/y_0)$ è $-0{,}195$ ed è quindi compensato sia nei condotti lisci che in quelli scabri dall'aumento del coefficiente a_l o rispettivamente del coefficiente a_r.

5. La nuova espressione della distribuzione della velocità, che abbiamo ricavato al n. 4, si presta ad alcune considerazioni.

In primo luogo, oltre ad una generale migliore concordanza con i risultati sperimentali, rispetto alla legge di Prandtl–Kármán, essa presenta in

(11) Altri confronti saranno riportati in una prossima pubblicazione su « L'Energia Elettrica ». In essa sarà dato particolare rilievo alla parte sperimentale.

asse del tubo un massimo effettivo della velocità. La condizione teorica $(du/dy) = 0$ per $y = y_0$ è infatti soddisfatta dalla (11_1).

In secondo luogo si osserva, come avevamo premesso, che la legge logaritmica (4_1) può considerarsi una semplificazione della nostra (14_1). Tale semplificazione è solo approssimativamente verificata, in tutto il campo del moto turbolento, dai profili sperimentali della velocità, perché la loro pendenza nel tronco più importante $(0{,}15 \leq y/y_0 \leq 0{,}85)$ vale circa 6,5–7,0 anziché 5,75, ma è perfettamente accettabile se viene utilizzata per ricavare con processo deduttivo le leggi di resistenza.

Meccanica. — *Sui problemi di meccanica delle terre relativi alla Torre di Pisa e su un modo per stabilizzare la Torre stessa.* Nota di FERNANDO TERRACINA, presentata (*) dal Socio G. KRALL.

La storia del campanile di Pisa è stata vista soprattutto in termini di strapiombi e di eccentricità dei carichi; la presente Nota è intesa a prospettare la storia del terreno sottostante e a trarre da essa alcune conseguenze riguardo alla stabilità del Monumento e al modo di migliorarla.

Il movimento del campanile può essere considerato il risultante di un abbassamento verticale medio di circa 2 metri e di una rotazione della base anulare (diametro esterno m 19,70), la quale, orizzontale in origine, presenta oggi un dislivello di circa 1,80 tra i lembi nord e sud.

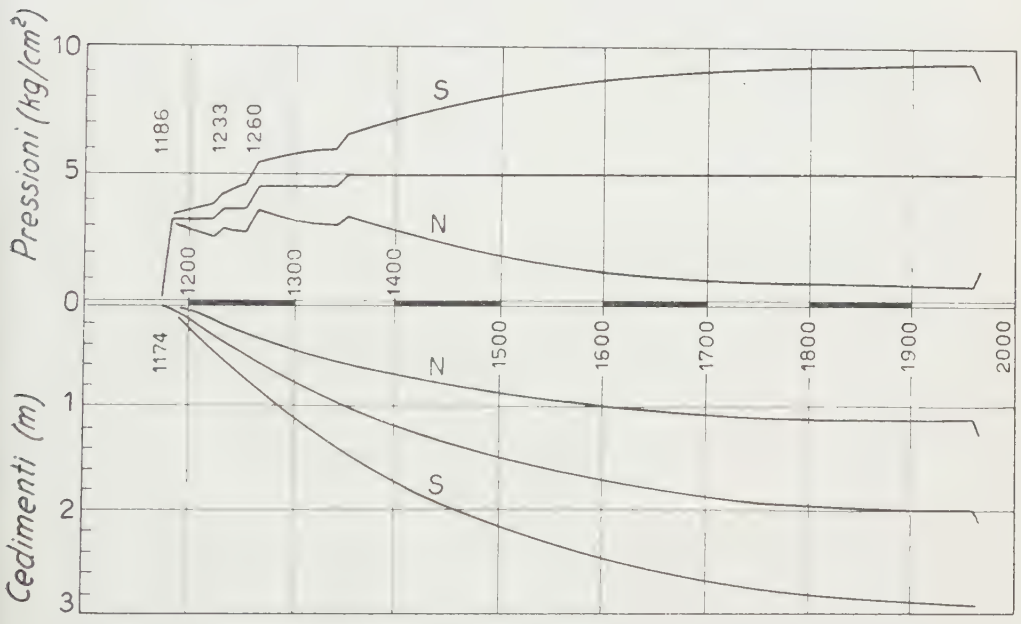


Fig. 1. – Campanile del Duomo di Pisa. Andamento delle pressioni teoriche sul terreno e dei cedimenti ai lembi nord e sud della fondazione e dei valori medi.

La velocità della rotazione e quella dell'abbassamento medio, si sono andate attenuando grandemente nel tempo come può vedersi nella parte inferiore del diagramma di fig. 1, dedotta dalle inclinazioni attuali dei piani via via costruiti orizzontali e da osservazioni precedenti. Il lembo nord è praticamente fermo; il movimento di rotazione invece, per quanto attenuato,

(*) Nella seduta del 19 novembre 1960.

non accenna a scomparire. L'inclinazione è cresciuta in totale negli ultimi 150 anni di 0,007, di cui 0,0015 negli ultimi 50 anni.

La verticale baricentrica della torre ha raggiunto una eccentricità di m 2,25 rispetto alla fondazione, una posizione cioè non tanto lontana dal contorno del nocciolo di inerzia della fondazione, che ha un raggio di m 2,60.

La fondazione della torre è attualmente alla profondità media di circa m 3,50 sotto la superficie della piazza; il terreno sottostante è costituito per circa 7 m da strati alternati di argille e di sabbie argillose; inferiormente fin oltre i 30 m vi è il banco di argille marine più o meno limose; sotto il piano di fondazione il terreno è sempre saturo di acqua.

Nel considerare le condizioni del terreno nelle varie parti dello spazio interessato, occorre tener ben distinti i movimenti di assestamento accompagnati da addensamento e quindi portanti il terreno a stati di maggiore resistenza, da quelli dovuti essenzialmente a scorrimenti che generalmente portano a condizioni di minor resistenza e quindi al pericolo di disastro; e così pure distinguere le situazioni del passato da quelle attuali e future.

Le caratteristiche del terreno, la situazione idrogeologica, l'andamento dei movimenti, impongono l'ipotesi che nel terreno si sia verificato essenzialmente un *consolidamento* lento del materiale fine saturo del tipo classico di Terzaghi–Fröhlich.

Fenomeni di allontanamento delle particelle solide trascinate da correnti d'acqua sono per molte buone ragioni da escludere dal novero delle cause essenziali del cedimento e della sua disuniformità; per quei fenomeni ci si è riferiti soprattutto alle conseguenze del supposto aggottamento all'epoca della costruzione; a questo riguardo però è da notare che la parte inferiore della fondazione è in pietrame senza malta, ciò che fa pensare che essa sia stata gettata senza aggottamento; è probabile anzi che sia stato il desiderio di eseguire la fondazione regolarmente su tutta la superficie, la insufficienza dei mezzi di aggottamento e la mancanza di una sicura malta idraulica per lo zoccolo a sconsigliare l'esecuzione di una palificata, del resto di dubbio rendimento; e non è da escludere che siano stati considerati proprio i pericoli inerenti a un prolungato aggottamento.

Nonostante l'imponenza dei cedimenti plastici non ci troviamo di fronte a *insufficiente resistenza* nel senso in cui questa deve intendersi per i terreni e altri materiali e cioè di resistenza allo scorrimento; l'assestamento è stato certamente accompagnato da scorrimenti locali in vario senso ma non vi è stata insufficiente resistenza allo scorrimento lungo le superfici di possibile rottura generale; un simile movimento sarebbe stato accompagnato da notevoli rigonfiamenti in superficie e avrebbe fatto avvicinare rapidamente la Torre a situazioni di grande pericolo.

Data l'eterogeneità verticale del terreno, dato che non è stato possibile individuare la differenza che causò l'inclinazione, né le differenze attuali, data l'insufficienza delle teorie a riguardo, una sicura verifica della stabilità del terreno non può essere istituita; occorrerebbe inoltre una buona conoscenza delle vere resistenze a taglio *in sito*.

Volendo tuttavia procedere ad una prima approssimazione si deve tener presente innanzi tutto che la forma tubolare, gli spessori dei muri e soprattutto il grande sviluppo verticale del Monumento conferiscono alla sua base un'assoluta rigidità; un movimento di rottura del terreno deve essere quindi compatibile con la conservazione della forma di tutta la superficie di contatto: queste considerazioni, unite al grado di assestamento certamente assai progredito, consentono di considerare pericoloso solo lo slittamento di tutta una grande massa di terreno secondo superfici del tipo classico e di approssimare quindi la realtà mediante le espressioni del carico di rottura dedotte dalle relative teorie.

Circa le resistenze al taglio effettive, se ne può conseguire una conoscenza approssimata ma utile se si adottano le seguenti ipotesi semplificative:

1° che il consolidamento inerente al carico sia pressoché completo e cioè che in tutti i punti del terreno interessato le pressioni efficaci intergranulari siano pressoché uguali a quelle totali e che le compattezze siano prossime a quelle finali;

2° che le resistenze al taglio non siano minori di quelle che si constatano nei materiali consolidati previo rimaneggiamento completo e quindi, come è noto, salvo rarissime eccezioni, non minori della metà delle pressioni normali di consolidamento.

Da queste due ipotesi segue che, per le pressioni di consolidamento, le resistenze allo scorrimento non sono minori di quelle che si avrebbero in un mezzo di coesione nulla e angolo di attrito interno pari a arctg $1/2 = 26°$.

Se si assumono allora seguendo Prandtl come superfici di probabile rottura quelle secondo spirali logaritmiche con opportune condizioni ai limiti e si tien conto del forte attrito tra fondazione e terreno, la pressione (uniforme) sopportabile in superficie sarebbe per una base circolare (Terzaghi)

$$q = 0{,}3\ \gamma_2\ N_\gamma\ d$$

in cui γ_2 è la densità del terreno sottostante (1,6 ton/m^3), d il diametro della base (m 19,70) ed N_γ una funzione di φ.

Per $\varphi = 26°$ è $N_\gamma = 10$ e quindi

$$q = 0{,}3 \times 1{,}6\ \text{ton/m}^3 \times 19{,}70\ \text{m} \times 10 = 9{,}45\ \text{Kg/cm}^2.$$

Per il caso come il nostro di risultante eccentrica si può far riferimento alle proposte e alle esperienze di Mayerhof [1] secondo le quali la pressione di sfondamento (media) va ridotta di una frazione pari al rapporto eccentricità/raggio, 23 % nel nostro caso, col risultato di 7,3 Kg/cm^2.

Va però aggiunto il contributo relativo alla profondità della fondazione, contributo che sulla prudente base di una profondità di 2,50 m, di $\varphi = 20°$ e di $\gamma_1 = 1{,}3$ ton/m^3, risulta secondo la formula di Prandtl di 2,10 Kg/cm^2.

(1) *Bearing capacity of foundations under eccentric and inclined loads*, Atti Congr. intern. Meccanica Terre, Zurigo 1953.

Si raggiunge così un totale di 9,4 Kg/cm², abbastanza rassicurante se confrontato con la pressione media di circa 5 Kg/cm², pur avendo presente l'inesattezza delle ipotesi che di necessità si sono dovute introdurre.

È tenendo dunque conto della rigidità della struttura e del consolidamento del terreno che si riesce a spiegare il « miracolo » della Torre; sono quelle le circostanze che consentono di riportare l'equilibrio della Torre a quello del complesso del terreno sottostante e laterale; per quel che riguarda il terreno deve dirsi, in sintesi, che il grande movimento della Torre pur essendo conseguenza di reazioni inadeguate, ha dato tuttavia luogo, non differentemente da ciò che avviene durante le deformazioni elastiche, a *reazioni crescenti con la deformazione*, sia pure lentissimamente nel tempo, e inoltre a *un forte accrescimento del carico limite*.

Al movimento in corso non si accompagna quindi un'insufficiente resistenza del terreno nel significato tecnico dell'espressione; ciò non toglie che esso conduca a posizioni sempre meno stabili del Campanile.

Conviene distinguere le circostanze che hanno determinato il movimento di inclinazione della Torre nel modo seguente:

una originaria, e cioè, escludendo l'asportazione di materiale, la maggior compressibilità, in strati tuttora non individuati, del terreno a sud rispetto al terreno a nord;

l'altra derivata, la maggior pressione dalla parte sud conseguente all'eccentricità della verticale baricentrica rispetto alla fondazione.

La seconda circostanza si è sempre accentuata e, se non si riesce a provvedere, non può che aggravarsi in avvenire.

Se si considerano le pressioni di contatto alla base della fondazione, si può dire che vi sono buone ragioni per ritenere che esse vadano crescendo dal centro verso la periferia, conforme, nonostante gli imponenti assestamenti irreversibili, i suggerimenti della teoria del semispazio elastico; quel che interesserebbe veramente sarebbe poi la ripartizione delle tensioni nella massa del suolo sottostante e prossimo alla torre. Comunque le pressioni superficiali calcolate come si usa fare in base all'ipotesi della linearità dei diagrammi non debbono essere considerate come effettive, e tanto meno come decisive per la stabilità del Monumento, per la quale è invece decisiva la risultante delle resistenze allo scorrimento lungo determinante superfici; le pressioni ai lembi corne sopra calcolate vanno considerate piuttosto come *indici della dissimmetria* delle tensioni nel sottosuolo rispetto al piano verticale est–ovest; esse sono 0,6 Kg/cm² al lembo nord, 9,6 Kg/cm² al lembo sud. È interessante l'andamento di questi indici nel tempo, che è stato rappresentato nella parte superiore del diagramma 1, quale si può dedurre in base a ragionevoli interpolazioni dalla storia della costruzione e dalla storia della inclinazione rappresentata nella parte inferiore dello stesso diagramma.

La pressione massima e (con velocità doppia) la differenza fra la massima e la minima continuano naturalmente a crescere, come le analoghe

pressioni con molta maggiore verosomiglianza calcolabili, relative alle sezioni orizzontali della struttura muraria.

Esaminate così le conseguenze dell'eccentricità del carico passiamo a considerare la circostanza originaria dell'inclinazione, circostanza che ha subìto anche essa un'evoluzione; questa però risulta di tipo diverso anzi opposto, ove si tenga presente il fatto ben accertato che con l'addensamento dei terreni si raggiungono via via stati di sempre minore deformabilità per compressione (nonché di maggiore resistenza agli sforzi di taglio).

Dal diagramma si vede che la pressione (teorica) al lembo nord è giunta al valore attuale di 0,6 Kg/cm² da un massimo di circa 3,5 Kg/cm² raggiunto all'epoca del compimento della costruzione, mentre la pressione al lembo sud è cresciuta dai 6 Kg/cm² della stessa epoca fino ai circa 10 Kg/cm² attuali, raggiungendo già valori di 8 Kg/cm² da almeno quattro secoli. Pur ammettendo che dalla parte sud il consolidamento non sia ancora totale, bisogna necessariamente concludere che se la circostanza che originariamente determinò la rotazione della torre fu la maggiore compressibilità dal lato sud, *essa è scomparsa per dar luogo a una situazione opposta.* Il pericolo oggi ha una causa tutta diversa: se un tempo la torre si inclinò verso sud in conseguenze della maggior compressibilità del terreno da quella parte, oggi continua ad inclinarsi nonostante la sua minore compressibilità.

Se oggi si costruisse sulla stessa area una torre verticale essa si inclinerebbe verso nord; e si può dire che questa inversione di situazione si è verificata ad una precisa data, probabilmente entro il XVI secolo.

Le differenze attuali di stato del terreno nelle sue diverse parti sono le conseguenze degli addensamenti verificatisi, diversi da punto a punto a seconda delle tensioni e delle caratteristiche del terreno, una situazione di fatto che è impossibile e del resto sarebbe poco utile conoscere completamente; per verificare quanto sopra affermato appare sufficiente o per lo meno assai significativo un accertamento che non presenta difficoltà: quello di differenze sistematiche da indagarsi su campioni o meglio *in sito*, ad esempio lungo due verticali presso i lembi nord e sud della fondazione.

La struttura del campanile si può dire intatta; la rotazione del complesso non ha causato lesioni.

La disuniformità dei cedimenti verificatisi conferma peraltro la giustezza del limite molto più basso, in cui debbono essere contenuti i carichi dovuti a edifici di tipo normale; è evidente infatti che disuniformità di quel genere avrebbero condotto alla rovina ogni altro edificio. Il Campanile ha invece dimostrato di poter sopportare ottimamente lente rotazioni della base senza che si verifichino deformazioni pericolose; indipendentemente dalla flessibilità longitudinale della struttura tubolare, è evidente che le imponenti sezioni verticali garantiscono la conservazione praticamente assoluta della forma sia della base, che di tutte le sezioni orizzontali.

Si è visto come la rigidità della struttura sia la chiave del « miracolo » della torre; si deve aggiungere che essa influisce sul giudizio che

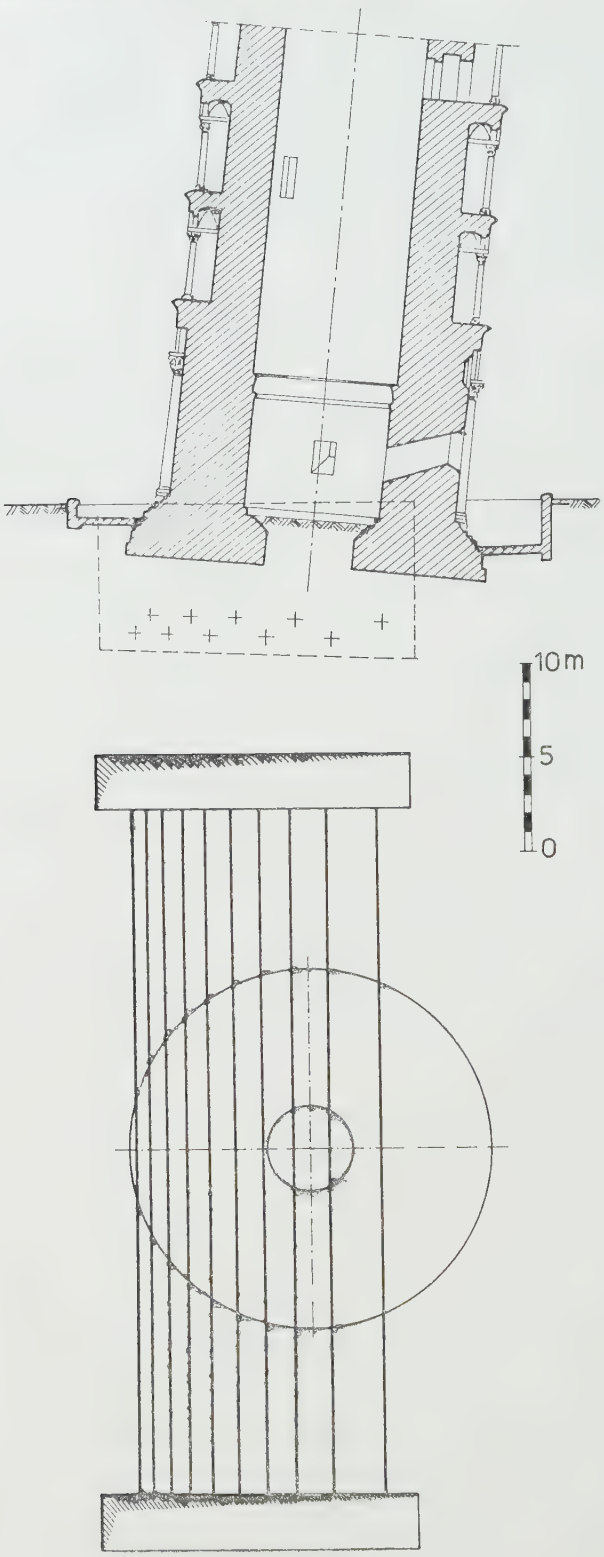


Fig. 2. – Stabilizzazione del Campanile di Pisa mediante trivellazioni. Schema A.

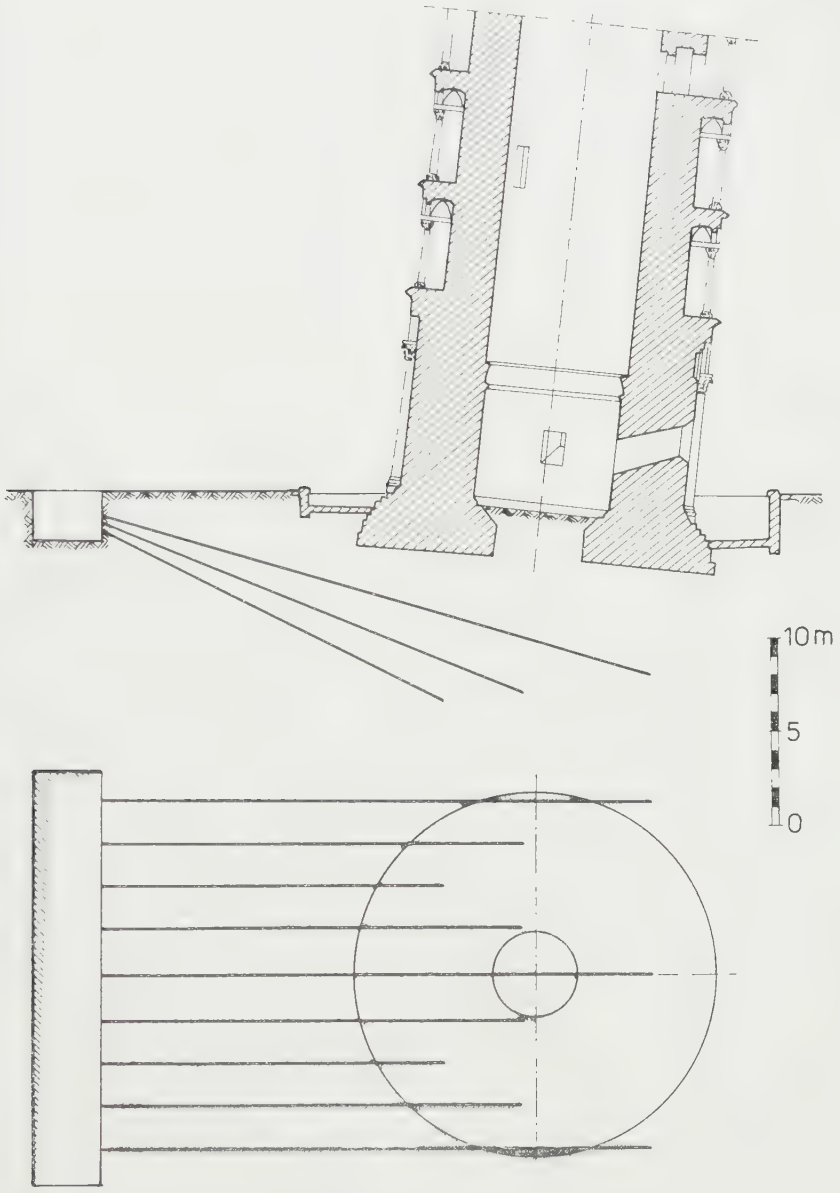


Fig. 3. – Stabilizzazione del Campanile di Pisa mediante trivellazioni. Schema B.

deve darsi sull'ammissibilità delle pressioni sul terreno anche in altro modo.

La lenta e potente azione di assestamento esercitata attraverso superficie indeformabile, oltre che stabilizzare sistematicamente come si è visto le resistenze in senso compensativo della dissimmetria delle depressioni, ha certamente attenuato la loro variabilità accidentale, attraverso scorrimenti e adattamenti plastici che hanno avuto il modo di svolgersi nel tempo;

e ciò consente *una riduzione del margine di sicurezza* che è da esigersi rispetto alla resistenza tipica in un terreno, in considerazione della sua variabilità casuale da punto a punto. Un'analoga conseguenza è da trarre anche dalla simmetria radiale (geometrica e strutturale) della Torre, nei riguardi della ordinaria incertezza circa la regolarità di ripartizione delle tensioni nella struttura e alla sua base. Si è così accennato a un altro ordine di ragioni da aggiungersi ai precedenti, per cui il giudizio sulla stabilità del terreno sottostante alla torre è ben lungi da poter esaurirsi in semplici confronti tra la pressione superficiale massima (teorica) e le pressioni massime di regola consigliabili nella zona.

Dalle considerazioni precedenti segue che per portare la Torre in una *situazione tranquillizzante* per molti anni è necessario e sufficiente farla ruotare di opportuna misura in senso inverso a quello della rotazione in corso: si otterrebbe una riduzione di tutte le pressioni al lato sud, quindi una migliore stabilità e del terreno e della Torre.

La riduzione dell'angolo di inclinazione di 0,001 rad. ($\sim 3'$) corrispondente ad una riduzione di circa 2 cm del dislivello nord–sud della base della fondazione, riporterebbe l'inclinazione della Torre e le pressioni di contatto, a quelle che erano circa 30 anni fa; dato però l'assestamento subìto è probabile che il ritorno all'inclinazione attuale richiederebbe un tempo molto maggiore, almeno 50 anni.

Si avrebbe in questo periodo un ulteriore assestamento del terreno, e un abbassamento medio di cm. 1, ma l'inclinazione finale sarebbe quella di oggi.

Un raddrizzamento più spinto, ad esempio una riduzione di 20 cm del suddetto dislivello, riducendo la pressione teorica al lembo sud di circa 0,5 Kg/cm^2, riportandola cioè al valore che aveva 300 o 400 anni fa, condurrebbe certamente a un radicale rallentamento dell'aumento di inclinazione, se non addirittura al suo arresto; quest'ultimo si verificherebbe nel caso molto probabile in cui le densità già raggiunte corrispondano a quelle di assestamento definitivo relativo alla pressione ridotta. Tutto ciò è conforme le ben accertate leggi generali del consolidamento delle terre argillose; ma potrà essere meglio indagato e previsto quantitativamente per il terreno dello spazio interessato, sulla base dei risultati di prove edometriche in sito e in laboratorio, con le quali si possono come è noto sperimentare in poche ore o giorni gli stessi cicli che sotto la Torre hanno richiesto o richiederanno decenni o secoli.

Il desiderabile movimento di rotazione conviene naturalmente che sia realizzato consentendo l'abbassamento del lato nord.

Unico modo semplice di sicura efficacia è quello della asportazione di terreno sotto la Torre dal lato settentrionale; *l'effetto sarebbe sostanzialmente indipendente dalla natura del terreno, dal suo stato, dalla sua compressibilità, impermeabilità, resistenza, ecc.*: né potrebbe essere accompagnato da *modifiche dello stato del terreno e del regime delle acque freatiche*. L'asportazione

di terreno può farsi in modo da evitare ogni pericolo mediante trivellazioni rotative con sonde a tubo o con trivelle elicoidali opportunamente disposte. Le figg. 2 e 3 mostrano due possibili schemi di distribuzione delle trivellazioni; opportuni zavorramenti o altri artifici si renderanno necessari per assicurare le reazioni di spinta.

Per avere un'idea dell'ordine di grandezza del materiale da asportare si consideri che l'abbassamento di un lembo della fondazione di 2 cm, fermo restando l'altro, corrisponde a un volume di spostamento di circa tre metri cubi, quindi teoricamente richiede l'asportazione di pari volume di terra, ottenibile ad esempio mediante 1500 metri lineari di sondaggi del diametro di 5 cm, o 400 metri di sondaggi del diametro di 10 cm.

È evidente che variando numero, diametro, lunghezza, posizione, inclinazione, velocità di avanzamento e soprattutto di estrazione delle sonde, così come pure la distribuzione del lavoro nel tempo, si potrebbe ottenere tutta la desiderabile gradualità dell'abbassamento e soddisfare ogni prudente esigenza che il rispetto verso l'eccezionale Monumento impone.

Il materiale estratto potrà essere esattamente misurato e quindi potranno essere calcolati con buona approssimazione i cedimenti massimi possibili. Potrà contemporaneamente acquisirsi una esatta conoscenza del terreno sottostante, specie se all'avanzamento delle sonde si accompagnerà l'uso di carotiere non rotative.

È molto importante il fatto che il procedimento proposto potrà essere prima sperimentato in scala ridotta e *in corpore vili* sotto blocchi, serbatoi, costruzioni da demolire, ecc.; facile ed opportuno sarebbe provare il procedimento su una delle costruzioni a torre, dritte o inclinate, di modeste dimensioni e prive di valore monumentale, che abbondano nella regione. Anche nella sua applicazione al Campanile il procedimento consente, per sua natura, che ne sia modificato il programma man mano che siano accertati i risultati delle fasi precedenti.

Astronomia (Astrofisica). — *Sui fattori di correzione per il passaggio da area apparente ad area corretta dei brillamenti cromosferici in radiazione di idrogeno.* Nota di Maria Cristina Ballario, presentata (*) dal Corrisp. G. Righini.

In due Note precedenti [1] [2] sono stati considerati i valori delle aree apparenti A_p e delle aree corrette A_c di circa 2.500 brillamenti in radiazione di idrogeno e si è dedotto che la relazione: $A_c^* = A_p \sec \vartheta$ è valida soltanto per ϑ compreso tra 0° e 50°, mentre per $\vartheta > 50°$ è necessario applicare una correzione C inferiore a sec ϑ. Lo ϑ è l'angolo eliocentrico che definisce la posizione del br. sulla superficie solare.

Ricordiamo che i 2.500 br. presi in esame sono stati suddivisi in tanti sottogruppi a seconda del valore di ϑ e della loro importanza. Per ciascun sottogruppo sono stati calcolati i valori medi dell'area apparente, indicati con $A_{p,1}$, $A_{p,2}$. Con questi valori si è ottenuta una curva media che rappresenta la variazione dell'area apparente del brillamento medio, costante su tutta la superficie solare, al variare di ϑ. Dalla curva media è stata dedotta la correzione C (riportata in Nota [1]), e da questa i limiti tra i quali deve variare l'area apparente di un br. per poter essere classificato di importanza 1, 2, 3. (Tabella I).

Ci proponiamo in questa Nota di controllare la validità della correzione C.

Facendo un esame critico del metodo seguìto si deve notare che:

a) la suddivisione dei br. in nove sottogruppi a seconda del valore dell'angolo ϑ (I sottogruppo: $0° \leq \vartheta \leq 10°$, II sottogruppo: $11° \leq \vartheta \leq 20°$ ecc.) non influisce sui risultati finali se il numero dei br. è sufficientemente elevato;

b) la suddivisione secondo l'importanza agisce, invece, in modo determinante sui risultati stessi. Infatti passando un certo numero di br. da una classe di importanza ad un'altra, i rispettivi valori medi aumentano o diminuiscono contemporaneamente e quindi l'andamento di A_p in funzione di ϑ è diverso. In altre parole si possono ottenere quante si vogliano curve che dànno la variazione di A_p medio al variare di ϑ e quindi quante si vogliano correzioni tali che applicate alle A_p per $\vartheta > 50°$ (per $\vartheta \leq 50°$ è sempre valida la correzione sec ϑ) diano dei valori medi dell'area corretta costanti su tutta la superficie solare.

D'altra parte non è possibile calcolare le medie delle aree apparenti dei br. 1—, 1, 2, 3 insieme. Nei lavori sopracitati sono stati esclusi i br. 3 perché scarsi e quindi mal distribuiti sul disco. Si è però anche ritenuto indispensabile tenere separati i br. 1 dai br. 2 e dagli 1— per evitare che un possibile effetto di scelta influisse sui risultati. Infatti mentre è logico ritenere che il numero dei br. 2 si debba mantenere circa costante in ogni intervallo di ϑ, non è altret-

(*) Nella seduta del 19 novembre 1960.

tanto sicuro che questo accada per i br. 1, che possono venire trascurati o declassati a 1— per alti valori di ϑ. In tal caso le aree apparenti dei br. 2 avrebbero maggior peso sulle medie complessive per i sottogruppi con alto valore di ϑ e le medie stesse risulterebbero falsamente più elevate. Questo fatto si può facilmente verificare con i valori contenuti nelle tabelle di una Nota precedente [2].

La parte più delicata dei nostri lavori già pubblicati è stata proprio l'attribuzione della importanza ai brillamenti con $\vartheta > 50°$, cioè quando non è più valida la correzione sec ϑ e quindi la A_z^* non risponde più allo scopo. L'attribuzione dell'importanza è stata eseguita attraverso un esame molto attento del materiale, valutando opportunamente tutti gli elementi a nostra disposizione. Tuttavia, per quanto si è detto sopra, è indispensabile sottoporre la correzione C ad un adeguato controllo.

TABELLA I.

Limiti tra i quali deve variare l'area apparente, A_p, *di un brillamento, per la classificazine della importanza.*

$\vartheta°$	Brillamenti di importanza 1	Brillamenti di importanza 2
50° – 52°	1°,3 ≤ A_p ≤ 3°,3	3°,4 ≤ A_p ≤ 7°,9
53 – 55	1 ,3 » 3 ,1	3 ,2 » 7 ,5
56 – 58	1 ,2 » 3 ,0	3 ,1 » 7 ,1
59 – 61	1 ,1 » 2 ,8	2 ,9 » 6 ,7
62 – 64	1 ,0 » 2 ,6	2 ,7 » 6 ,2
65 – 67	1 ,0 » 2 ,4	2 ,5 » 5 ,8
68 – 70	0 ,9 » 2 ,2	2 ,3 » 5 ,3
71 – 73	0 ,8 » 2 ,0	2 ,1 » 4 ,8
74 – 76	0 ,7 » 1 ,8	1 ,9 » 4 ,4
77 – 79	0 ,7 » 1 ,7	1 ,8 » 4 ,0
80 – 82	0 ,6 » 1 ,5	1 ,6 » 3 ,6
83 – 85	0 ,5 » 1 ,3	1 ,4 » 3 ,2
86 – 88	0 ,5 » 1 ,2	1 ,3 » 2 ,8
89 – 90	0 ,4 » 1 ,0	1 ,1 » 2 ,5

È ovvio che adottando, per qualsiasi altro materiale, purché sufficientemente abbondante, i limiti di importanza imposti da Tabella I ed applicando

alle A_p la correzione C, si ottengono valori medi dell'area corretta costanti per qualunque intervallo di ϑ.

Questo però prova soltanto che la correzione C è una soluzione del problema. La dimostrazione che la correzione C è la più rispondente alla realtà fisica del fenomeno non è altrettanto agevole.

Il modo più diretto ci è apparso quello di confrontare l'importanza dei brillamenti dedotta applicando i limiti di Tabella I, che chiameremo importanza calcolata I_c, con l'importanza data dall'osservatore, che chiameremo importanza osservata I_o, nell'ipotesi che per alti valori di ϑ la I_o sia stata attribuita non più in base alla sola estensione, ma tenendo presenti sopratutto le altre caratteristiche del fenomeno: forma, evoluzione, intensità e durata del brillamento.

Per questo confronto è stato scelto il materiale comunicato dall'Osservatorio di Good Hope e pubblicato in «Compilations of Solar–Geophysical Data (Boulder–Colorado)». Esso presenta i seguenti vantaggi:

a) il materiale è molto omogeneo, accurato e sufficientemente abbondante: 671 brillamenti osservati nel periodo 1° marzo 1958–31 maggio 1960;

b) gli osservatori hanno applicato la relazione $A_c^* = A_p \sec \vartheta$ per qualunque valore di ϑ, secondo le disposizioni dell'U. A. I. Per alti valori di ϑ hanno però omesso, nella maggioranza dei casi, di dare il valore dell'area corretta. Ciò rivela il disagio, sentito anche a Good Hope, nel dover comunicare dei dati evidentemente privi di significato, in quanto la correzione sec ϑ si rivela, anche ad un superficiale esame, troppo forte per alti valori di ϑ;

c) è stata adottata la scala d'importanza A. G. I.:

sub–brillamenti	$2{,}0 > A_c$
brillamenti di importanza 1:	$2{,}0 \leq A_c \leq 5{,}0$ gradi quadrati
brillamenti di importanza 2:	$5{,}0 \leq A_c \leq 12{,}0$ gradi quadrati
brillamenti di importanza 3:	$12{,}0 \leq A_c$ gradi quadrati

fino a $\vartheta = 70°$ circa. Per $\vartheta > 70°$ manca, come abbiamo detto, il valore dell'area corretta per gran parte dei brillamenti e questo prova che l'importanza dei br. stessi è stata attribuita unicamente in base alle altre caratteristiche fisiche del fenomeno, come è strettamente richiesto dalla nostra ipotesi di lavoro.

Premettiamo che indicheremo con:

A_c l'area corretta data da Good Hope;
A_c^* l'area corretta data dalla relazione $A_c^* = A_p \sec \vartheta$;
A_c^{**} l'area corretta dedotta dalla correzione C.
($A_c^{**} = A_c^*$ per $\vartheta \leq 50°$).

Il materiale prescelto è stato trattato nel modo seguente:

1° dalla posizione del br. si è dedotto il valore di ϑ;

2° i br. sono stati suddivisi in nove sottogruppi a seconda del valore di ϑ;

3° i br. di ogni sottogruppo sono stati suddivisi a seconda della loro importanza in base ai limiti imposti da Tabella I. Per ϑ variabile tra 0° e 50°

l'accordo tra A_c e A_c^*, e quindi tra I_o e I_c, è ottimo. Solo una diecina di valori I_o sono stati corretti perché non corrispondevano ai limiti A. G. I. Riteniamo che tali deviazioni dalla scala A. G. I. siano dovute, in maggioranza, al fatto che nella stima di I_o è stato tenuto anche conto dell'intensità del fenomeno e della sua vita, mentre in questo lavoro se ne considera soltanto l'estensione.

TABELLA II.

Gruppi / Medie	0°–10	11°–20°	21°–30°	31°–40°	41°–50°	51°–60°	61°–70°	71° 80°	81°–90°	N° totale di brillamenti
,1—	—	1,50 3)	1,60 (1)	1,20 (4)	1,14 (8)	1,09 (8)	0,86 (14)	0,54 (9)	0,26 (10)	57
medio . .	—	17°	23°	36°	46°	56°	67°	78°	88°	
** ,1—	—	1,57	1,74	1,48	1,62	1,80	1,74	1,54	1,16	
,1	3,12 (6)	2,78 (35)	2,70 (74)	2,47 (65)	2,13 (64)	1,74 (77)	1,41 (76)	1,05 (64)	0,76 (52)	507
medio . .	7°	15°	25°	35°	46°	57°	66°	76°	87°	
* ,1	3,15	2,89	3,00	3,03	3,02	2,94	2,94	3,04	3,16	
,2	6,93 (4)	6,09 (8)	6,24 (8)	5,83 (11)	5,50 (16)	3,65 (8)	3,41 (12)	2,31 (11)	1,65 (17)	95
medio . .	9°	15°	25°	36°	46°	57°	68°	76°	87°	
,2	7,00	6,30	6,88	7,17	7,76	6,09	7,52	6,54	6,83	
,3	—	—	12,30 (1)	11,60 (2)	14,50 (2)	8,00 (2)	7,00 (2)	—	5,87 (3)	12
medio . .	—	—	23°	37°	43°	59°	65°	—	87°	
* ,3	—	—	13,36	14,36	19,50	14,28	13,48	—	23,77	

Per $\vartheta > 50°$ abbiamo portato alcune correzioni per lo stesso motivo e tutte quelle variazioni che sono imposte dall'applicazione dei limiti di Tabella I.

In particolare osserviamo:

VI sottogruppo: $51° \leq \vartheta \leq 60°$. – Si ha una sola correzione da 1+ a 2 e una variazione da 2 a 1, che praticamente si equivalgono, e sette variazioni da 1 a 1—. Queste sette variazioni appaiono giustificate e perciò vengono incluse nelle correzioni. È stato infatti sicuramente provato nelle Note precedenti [1] [2] che la correzione sec ϑ è valida fino a $\vartheta = 50°$,

mentre per $\vartheta > 50°$ è necessario applicare una correzione inferiore a sec ϑ. È perciò logico che i br. con area corretta A_c^* uguale o molto prossima al limite inferiore di ciascuna classe di importanza (2°,0 e 5°,0) siano declassati. Questo, a più forte ragione, avviene nei sottogruppi seguenti.

VII sottogruppo: $61° \leq \vartheta \leq 70°$. – Si hanno tre correzioni, una variazione da 3 a 2, due variazioni da 2 a 1, sette correzioni da 1 a 1— e sette variazioni da 1 a 1—.

VIII sottogruppo: $71° \leq \vartheta \leq 80°$. – Si incominciano a notare in questo sottogruppo alcune discordanze nell'attribuzione di I_o nel senso che br. aventi la stessa area e lo stesso angolo ϑ sono, a volte, classificati di importanza diversa. Per omogeneità abbiamo portato le seguenti correzioni:

tre br. di importanza 1 e 1+ sono stati portati a 2
tre br. di importanza 2 e 1+ sono stati portati a 1.

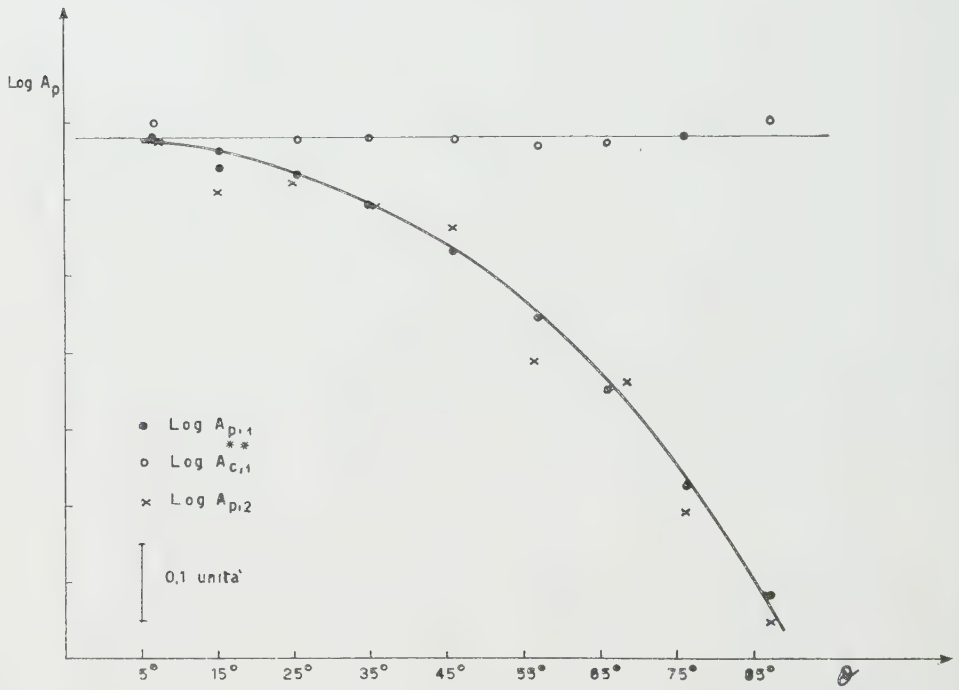


Fig. 1.

Queste correzioni non portano a sostanziali differenze nelle medie. Si ha poi una correzione da 1 a 1— ($A_c^* = 2°,10$), mentre otto br. di importanza 1 sono stati declassati a 1—.

Notiamo infine che per il 34 % dei br. di questo sottogruppo, Good Hope non fornisce il valore di A_c, mentre per il 50 % dei br. che hanno questo valore, l'importanza è stata declassata.

IX sottogruppo: $81° \leq \vartheta \leq 90°$. Manca, in generale, il valore dell'area corretta (79 %) e in tutti i casi (tranne due) in cui compare A_c il valore di I_o è stato declassato. In questo sottogruppo si nota un maggior numero di discordanze e per omogeneità abbiamo portato parecchie correzioni. Le variazioni sono invece in numero limitato. I br. di importanza 1 che sono stati declassati sono sei. Un br. di importanza 2 è stato portato a 3 e un br. 1 è stato classificato di importanza 2.

4° dei br. appartenenti a ciascun sottogruppo è stato determinato il valor medio di A_p, A_c^{**} e di ϑ per ciascuna classe di importanza I_c. I valori ottenuti sono riportati in Tabella II;

5° sono stati calcolati i valori medi dell'area corretta per i br. dei primi cinque sottogruppi e si sono ottenuti i seguenti valori:

brillamenti di importanza 1: 3,00 gradi quadrati

brillamenti di importanza 2: 7,07 gradi quadrati.

Assumiamo questi valori come corrispondenti ai valori dell'area corretta al centro del disco per ciascuna classe di importanza;

6° riportando in un grafico (fig. 1) i $\log A_{p,1}$ in funzione di ϑ si è ottenuta una curva media che, come previsto, coincide con l'analoga curva ottenuta nelle Note sopracitate, mentre i $\log A^{**}_{c,1}$, si dispongono con ottima approssimazione intorno alla retta che rappresenta il logaritmo del valor medio dell'area corretta al centro del disco. In fig. 1 sono pure riportati, a meno di una costante, i $\log A_{p,2}$, ma, dato lo scarso numero di br. 2, i rispettivi valori sono più scartanti rispetto alla curva media.

CONCLUSIONE.

Sui 359 brillamenti con $\vartheta > 50$, escluse le correzioni, si hanno 28 casi in cui I_o e I_c non coincidono. Queste 28 variazioni corrispondono al 7,8 % e sono così distribuite:

VI sottogruppo: 1 %
VII sottogruppo: 10 %
VIII sottogruppo: 9,5 %
IX sottogruppo: 11 %.

Riteniamo pertanto che il controllo dei limiti da noi proposti in Tabella I e della correzione C sia soddisfacente.

Teniamo infine a precisare che i limiti di Tabella I e la correzione C valgono soltanto quando del brillamento venga misurata la sola zona di massima intensità, escludendo in modo preciso la facola circostante. Questa separazione è assai agevole quando le misure vengono eseguite sugli spettroeliogrammi, come ad Arcetri, mentre è più difficile nell'osservazione visuale fatta con il filtro interferenziale. Ciò vale specialmente per i brillamenti in prossimità del bordo. In tal caso le aree apparenti dei br. con alto valore di ϑ risultano tutte più grandi e viene a mancare l'omogeneità tra misure al centro e misure in vicinanza del bordo.

BIBLIOGRAFIA.

[1] M. C. BALLARIO, *Sulla variazione dell'area apparente dei brillamenti cromosferici in funzione della loro posizione sulla superficie solare*, « Rend. Acc. Lincei », serie VIII, vol. XXVIII, fasc. 3 – marzo 1960.

[2] M. C. BALLARIO, *Studio statistico sulle dimensioni dei brillamenti cromosferici in radiazione di idrogeno osservati ad Arcetri, Capri Svezia, Hawai, Mac Math, Mitaka, USNRL.* «Memorie S.A.I.», in corso di stampa.

Fisica. — *Scambio termico per fluidi non-Newtoniani in moto laminare in tubi circolari.* – II. *Scambio termico per variabile temperatura della parete*(*). Nota(**) di MARIO DENTE, presentata dal Socio G. NATTA.

INTRODUZIONE.

La soluzione particolare ottenuta nella Nota precedente vale per la condizione al contorno $t_w = \text{cost}$.

Molte condizioni pratiche si discostano da questo schema, ed ha interesse l'esame di condizioni al contorno diverse da quella già considerata. Le soluzioni per le nuove condizioni al contorno (temperatura della parete, o gradiente alla parete, variabili), data la linearità della equazione (2,I) (1), si estendono facilmente da quella già trovata per $t_w = \text{cost}$. Vogliamo esaminare in particolare i risultati ottenibili per temperatura della parete variabile linearmente ($t_w = t_o + C\eta$) e per flusso di calore attraverso la parete costante ($q_w = \text{cost}$).

È interessante osservare come l'uso delle trasformate di Laplace sulle due equazioni (1), (2) e la successiva eliminazione del gruppo $sT_w(s)$, corrisponde, in un certo senso, a ricondurre la condizione: gradiente alla parete noto, alla condizione: temperatura della parete nota.

A) *Espressione generale per temperatura della parete comunque variabile.*

In vista della linearità dell'equazione, per il principio di sovrapposizione [1], se $t_w(\eta)$ è la temperatura della parete, la temperatura di un punto generico (come è facile verificare) è espressa dall'integrale seguente

$$(1) \qquad t - t_o = \int_{\xi=o}^{\xi=\eta} [1 - \theta(\eta - \xi, \varphi)]\, dt_w(\xi)$$

dove θ è la soluzione (5,I) e

$$dt_w(\xi) = \frac{dt_w(\xi)}{d\xi} d\xi \text{ se } t_w \text{ è continua}$$

$$dt_w(\xi) = t_w(\xi^+) - t_w(\xi^-) \text{ dove } t_w \text{ presenta una discontinuità.}$$

Il flusso di calore alla parete è dato da

$$(2) \qquad q_w(\eta) = \frac{k}{R}\left(\frac{\partial t}{\partial \varphi}\right)_{\varphi=1} = -\frac{k}{R}\int_o^{\eta} \left[\frac{\partial \theta(\eta - \xi, \varphi)}{\partial \varphi}\right]_{\varphi=1} dt_w(\xi)$$

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Industriale del Politecnico di Milano, con il contributo della Soc. Montecatini.

(**) Pervenuta all'Accademia il 30 giugno 1960.

(1) Con la notazione I in questa Nota si vuole indicare il riferimento ad una equazione o formula della Nota I.

B) *Espressione generale quando è noto il flusso di calore alla parete.*

In questo caso il problema è risolubile in modo semplice, per mezzo delle trasformate di Laplace. Si definiscano le seguenti trasformate:

$$T(s,\varphi) = \int_0^\infty e^{-s\eta}\,(t - t_0)\,d\eta \tag{3}$$

$$(T_w(s) = T(s,1))$$

$$F(s,\varphi) = \int_0^\infty [1 - \theta(\eta,\varphi)]\,e^{-s\eta}\,d\eta \tag{4}$$

$$H(s) = -\int_0^\infty \left[\frac{\partial\theta}{\partial\varphi}(\eta,\varphi)\right]_{\varphi=1} e^{-s\eta}\,d\eta \tag{5}$$

$$Q(s) = \frac{R}{k}\int_0^\infty e^{-s\eta}\,q(\eta)\,d\eta\,. \tag{6}$$

Applicando il teorema della convoluzione alle equazioni (1) (2) si ricava:

$$T(s,\varphi) = F(s,\varphi)\,s\,T_w(s) \tag{7}$$

e

$$Q(s) = H(s)\,s\,T_w(s)\,. \tag{8}$$

Se si elimina $sT_w(s)$ tra le (7) (8) si trova

$$T(s,\varphi) = \frac{Q(s)}{H(s)}\,F(s,\varphi)\,. \tag{9}$$

Detta $g(\eta,\varphi)$ la trasformata inversa della funzione $F(s,\varphi)/H(s)$ si trova immediatamente che la distribuzione di temperatura è data dalla

$$t - t_0 = \frac{R}{k}\int_0^\eta g(\eta - \xi,\varphi)\,q(\xi)\,d\xi\,. \tag{10}$$

D'altra parte

$$g(\eta,\varphi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\iota - i\infty}^{\iota + i\infty} e^{s\eta}\,\frac{F(s,\varphi)}{H(s)}\,ds \tag{11}$$

ora dalle (4), (5) e (6,I) si ottiene facilmente

$$F(s,\varphi) = \frac{1}{s} - \sum_n \frac{C_n F_n(\varphi)}{s + \beta_n^2} \tag{12}$$

$$H(s) = -\int_0^\infty \theta'(\eta,1)\,e^{-s\eta}\,d\eta = -\sum_n \frac{C_n F'_n(1)}{s + \beta_n^2}\,. \tag{13}$$

Si indicano con $-\gamma_m^2$ $(m = 1, 2, 3, \cdots)$ $(\gamma_m^2 > 0)$ le radici della equazione $H(s) = 0$. Poiché $H(s)$ è una funzione monotonica e nei diversi intervalli $\beta_n^2 < s < \beta_{n+1}^2$ essa varia tra $\pm\infty$, ogni radice γ_m^2 cade tra i relativi β_{m-1}^2 e β_m^2.

TABELLA I.

m	j	γ_j	γ_j^2	$-1/\gamma_j^2 H_j'$	$-1/\gamma_j^4 H_j'$	α	A
2	1	5,0635	25,639	4,4050	0,17181	4,0000	0,22917
	2	9,1991	84,624	5,7308	0,067721		
	3	13,2815	176,40	6,0084	0,034061		
4	1	4,5332	20,55	3,4807	0,16938	3,0000	0,19792
	2	8,2116	67,43	3,8775	0,057504		
	3	11,8537	140,5	4,0593	0,028892		
6	1	4,3509	18,93	3,0169	0,15937	2,6667	0,18125
	2	7,8524	61,66	3,3092	0,05367		
	3	11,3620	129,1	3,4235	0,02615		
10	1	4,1557	17,27	2,6083	0,15103	2,4000	0,16369
	2	7,6072	57,87	2,8098	0,04855		
	3	10,9920	120,8	2,8931	0,02381		
∞	1	3,8315	14,68	2,0000	0,13624	2,0000	0,12500
	2	7,0140	49,197	2,0000	0,040653		
	3	10,1725	103,48	2,0000	0,019327		
	4	13,3222	177,48	2,0000	0,011269		

Nella Tabella I sono riportati diversi autovalori per i diversi casi: va notato che per il calcolo delle radici della $H(s) = 0$ si sono assunti per β_i^2, $-C_i F_i'(1)$ i valori calcolati con le (12,I), (18,I) per $i = 0, 1, 2$ e per $i \geq 3$ si sono utilizzati i valori ottenuti con le formule (43,I), (47,I) ritenendo che costituiscano una approssimazione sufficiente, almeno per $m \leq 10$. Per $m = \infty$ si sono utilizzati i valori disponibili su varie tabelle [2]. Interessa anche far notare come il valore asintotico della differenza $\gamma_m - \gamma_{m-1} = \frac{2\pi}{\tau}$

tenda ad essere raggiunto molto rapidamente. Si veda ad esempio per $m = \infty$

$$\frac{2\pi}{\varepsilon} = \pi\gamma_2 - \gamma_1 = 3{,}1825$$
$$\gamma_3 - \gamma_2 = 3{,}1585$$
$$\gamma_4 - \gamma_3 = 3{,}1497 .$$

La teoria dei residui applicata alla (12) fornisce

$$g(\eta, \varphi) = \frac{1}{H(0)} - \sum_m \frac{e^{-\gamma_m^2 \eta}}{\gamma_m^2 H'(-\gamma_m^2)} - \sum_{n,m} C_n F_n(\varphi) \frac{e^{-\gamma_m^2 \eta}}{\beta_n^2 - \gamma_m^2} . \tag{14}$$

Poniamo $H(0) = -\sum_m \frac{C_n F_n'(1)}{\beta_n^2} = 1/\alpha$.

La temperatura della parete si calcola facilmente dalla

$$g(\eta, 1) = \alpha - \sum_m \frac{e^{-\gamma_m^2 \eta}}{\gamma_m^2 H'(-\gamma_m^2)} .$$

Caso particolare: $q_w = cost.$ – In questo caso le formule scritte finora si semplificano alquanto.

Infatti la (1) diventa:

$$t(\eta, \varphi) - t_0 = \frac{q_w R}{k} \int_0^\eta \left[\alpha - \sum_m \frac{e^{\gamma_m^2 (\eta - \xi)}}{\gamma_m^2 H'(-\gamma_m^2)} - \sum_{n,m} C_n F_n(\varphi) \frac{e^{\gamma_m^2 (\eta - \xi)}}{\beta_n^2 - \gamma_m^2} \right] d\xi . \tag{15}$$

Sviluppando l'integrale si ottiene:

$$t(\eta, \varphi) - t_0 = \frac{qR}{k} \left[\alpha\eta - \sum_m \frac{1}{\gamma_m^4 H'(-\gamma_m^2)} + \Sigma - \frac{e^{-\gamma_m^2 \eta}}{\gamma_m^4 H'(-\gamma_m^2)} - \right. \tag{16}$$
$$\left. - \sum_{n,m} C_n F_n(\varphi) \frac{1 - e^{-\gamma_m^2 \eta}}{\gamma_m^2 (\beta_n^2 - \gamma_m^2)} \right] .$$

Per determinare il valore di

$$\frac{1}{\alpha} = -\sum_n \frac{C_n F_n'}{\beta_n^2} \quad \text{e} \quad 2A = -\sum_m \frac{1}{\gamma_m^4 H'(-\gamma_m^2)}$$

senza calcolare le somme (le serie convergono lentamente) si può procedere brevemente nel modo seguente. Dall'equazione (16) per $\eta \to \infty$ si deduce che

$$\frac{\partial t}{\partial \eta} = \frac{dt}{d\eta} = \text{cost} = \frac{\alpha q R}{k} . \tag{17}$$

Quando cioè il profilo di temperatura è pienamente sviluppato esso si mantiene simile a sé stesso lungo l'asse del tubo. L'equazione (5,I) diventa in queste condizioni:

$$\frac{\alpha q R}{k} = \frac{1}{\varphi(1 - \varphi^m)} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\varphi \frac{\partial t}{\partial \varphi} \right) . \tag{18}$$

Questa equazione si integra direttamente e fornisce:

$$\frac{\alpha q R}{k}\left[\frac{\varphi^2}{4} - \frac{\varphi^{m+2}}{(m+2)^2}\right] = t(\eta, \varphi) - t(\eta, 0). \tag{19}$$

Per eliminare la incognita $t(\eta, 0)$ conviene determinare attraverso la (19) la «temperatura di miscela» t_b; essa è nota, poi, attraverso un bilancio termico globale, effettuato dall'entrata del tubo fino alla sezione considerata:

$$\pi \rho c_p \bar{u} R^2 (t_b - t_0) = q \cdot 2 \pi R x.$$

Dalla (26,I) si ha

$$t_b - t_0 = 2 \frac{m+2}{m} \frac{qR}{k} \eta. \tag{20}$$

D'altra parte, ricorrendo alla definizione di t_b e dalla (19) si ricava

$$t_b = \frac{\int_0^1 t(\eta, \varphi) u \varphi \, d\varphi}{\int_0^1 u \varphi \, d\varphi} = t(\eta, 0) + \frac{\alpha q R}{k} \frac{m(m^2+6m+12)}{8(m+2)^2(m+4)}. \tag{21}$$

Sostituendo con l'espressione (20) e mettendo tutto nella espressione asintotica (19) si ottiene la seguente:

$$t(\eta, \varphi) - t_0 = \frac{qR}{k}\left[\frac{\alpha \varphi^2}{4} - \frac{\alpha \varphi^{m+2}}{(m+2)^2} + 2\frac{m+2}{m}\eta - \frac{\alpha m}{8}\frac{m^2+6m+12}{(m+2)^2(m+4)}\right]. \tag{22}$$

Questa per $\varphi = 1$ diventa

$$t(\eta, 1) - t_0 = \frac{qR}{k}\left[2\frac{m+2}{m}\eta + \frac{\alpha m(m^2+10m+20)}{8(m+2)^2(m+4)}\right]. \tag{23}$$

D'altra parte, per $\varphi = 1$, $\eta \to \infty$ (16) dà

$$t(\eta, 1) - t_0 = \frac{qR}{k}\left[\alpha\eta - \sum_m \frac{1}{\gamma_m^4 H'(-\gamma_m^2)}\right]. \tag{24}$$

Le due espressioni (24) e (23) devono essere identiche.

Dunque:

$$\alpha = 2\frac{m+2}{m} = \frac{1}{H(0)} \quad \text{e} \quad -\sum_m \frac{1}{\gamma_m^4 H'(-\gamma_m^2)} = 2A = \frac{m^2+10m+20}{4(m+2)(m+4)}.$$

Queste due espressioni permettono di semplificare notevolmente i calcoli.

C) *Calcolo del N° di Nusselt locale:*

1° *Il flusso di calore attraverso la parete è costante.*

Per definizione:

$$Nu = \frac{2 q_w R}{k(t_w - t_b)}.$$

Per q_w = cost e dalle (16) e (20) si ricava immediatamente:

$$t_w - t_b = \frac{q_w R}{k} \left| 2A + \sum_m \frac{e^{\gamma'_m \eta}}{\gamma_m^4 H' (-\gamma_m^2)} \right| . \tag{25}$$

Quindi:

$$Nu = \frac{1}{\Lambda - \sum_m \frac{e^{-\gamma_m^2 \eta}}{\gamma_m^4 H' \gamma'_m}} . \tag{26}$$

In particolare si hanno i seguenti casi estremi:

a) per valori di η molto elevati ($Gz \leq \sim 10$)

$$Nu \cong Nu_\infty = \frac{1}{\Lambda} . \tag{27}$$

Nella Tabella II sono indicati i valori Nu_∞ per diversi fluidi. Tale valore asintotico del numero di Nusselt è stato determinato anche da Grigull [3]: egli diagramma la funzione $Nu_\infty = \frac{1}{\Lambda} = f(m)$.

TABELLA II.

m	2	4	6	10	20	100	∞
Nu	4,36	5,053	5,517	6,108	6,813	7,701	8,00

Interessa notare che per valori di m molto elevati ($m = 100$) la differenza con Nu_∞ per $m = \infty$ è ancora sensibile.

b) per valori di η molto bassi ($Gz \geq 100$) e $m \leq 10$: in questo campo vale l'approssimazione di Leveque.

Perciò:

$$Nu = 1{,}4103\ \delta^{1/3}\ Gz^{1/3} . \tag{28}$$

Osservazione.

Può essere interessante esaminare la attendibilità della approssimazione rappresentata dalle espressioni da (43,I) a (47,I) applicandole alla nuova condizione al contorno e per fluidi con $m \leq 10$.

È facile dimostrare che in tale caso per la condizione q_w = cost valgono le relazioni seguenti che permettono di calcolare immediatamente i valori che interessano per questi fluidi da quelli già noti per i fluidi Newtoniani ($m = 2$).

Poiché tuttavia le espressioni di β_n, $-C_n F'_n(1)$ date dalle (43,I) a (47,I) sono attendibili per valori di $n \geq 3$ così le soluzioni (29) (30) (31) si prestano per determinare γ_i^2, $-1/\gamma_i^2 H'_i$, $-1/\gamma_i^4 H'_i$ almeno per $i \gg 3$. D'altra parte la validità delle formule (43,I), (47,I) richiede anche che α e A soddisfino alle formule (32) (33): si vede anche così che si commette un errore notevole e crescente col crescere di m.

Nella Tabella III sono riportati i valori calcolati con le (29) (30) (31) (32) (33), da confrontare con quelli della Tabella I [2].

TABELLA III.

m	j	γ_j	γ_j^2	$-1/\gamma_j^2 H'_j$	$-1/\gamma_j^4 H'_j$	α	A
	1	4,5519	20,72	3,032	0,1464		
4	2	8,2704	68,4	3,994	0,05768	2,756	0,1956
	3	11,9415	142,6	4,1350	0,02900		
	1	4,3681	19,08	2,5079	0,1315		
6	2	7,9354	62,97	3,2630	0,05182	2,278	0,1753
	3	11,4569	131,26	3,4208	0,02606		
	1	4,2143	17,76	2,0188	0,11867		
10	2	7,6577	58,64	2,6264	0,04479	1,833	0,1513
	3	11,0558	122,23	2,7536	0,02253		

(29) $$\gamma = \frac{\pi}{2\tau}(\gamma)_{\text{New.}}$$

(30) $$1/\gamma^2 H' = \left(\frac{2}{m}\right)^{1/3}\left(\frac{\pi}{2\tau}\right)^{4/3}(1/\gamma^2 H')_{\text{New.}}$$

(31) $$1/\gamma^4 H' = \left(\frac{2}{m}\right)^{1/3}\left(\frac{\pi}{2\tau}\right)^{-2/3}(1/\gamma^4 H')_{\text{New.}}$$

(32) $$\alpha = 4\left(\frac{2}{m}\right)^{1/3}\left(\frac{\pi}{2\tau}\right)^{4/3}$$

(33) $$A = \frac{11}{48}\left(\frac{2}{m}\right)^{1/3}\left(\frac{\pi}{2\tau}\right)^{-2/3}.$$

(2) Con l'indice New. si indicano i valori corrispondenti per i fluidi con $m = 2$, già calcolati [1]; i valori per il fluido considerato sono privi di indice.

2° *La temperatura della parete è variabile linearmente:* $t_w = t_o + C\eta$.

Un'altra condizione al contorno che si può talora avvicinare a casi pratici è quella di andamento lineare della temperatura della parete. La legge di variazione sia dunque:

$$t_w = t_o + C\eta$$

con C = costante generica.

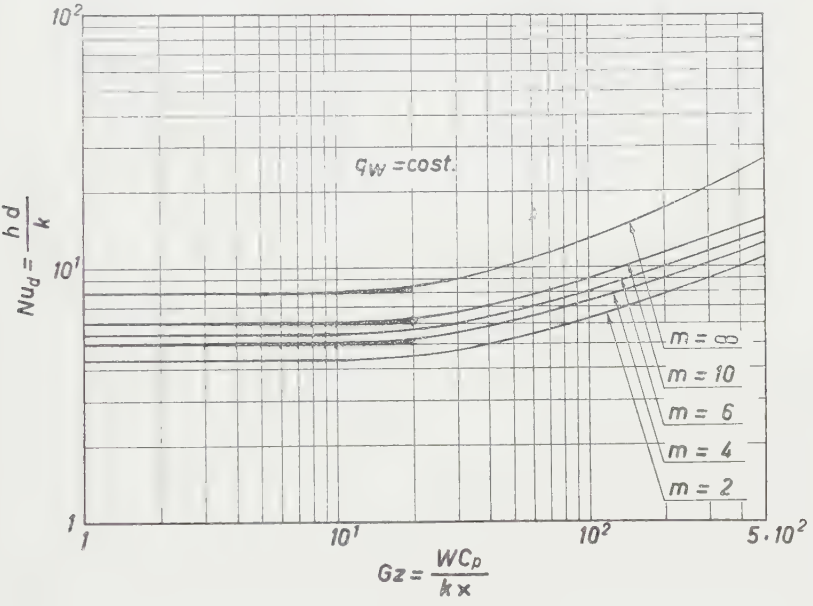


Fig. 1.

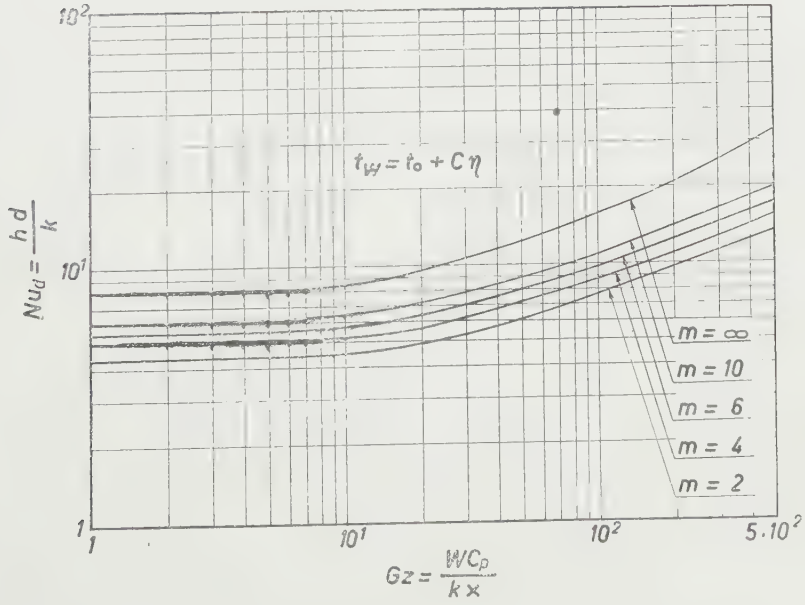


Fig. 2.

Procedendo in modo analogo al caso precedente si arriva al seguente risultato

$$\text{Nu}(\eta) = \frac{1 + \alpha \sum_n \frac{C_n F'_n(1)}{\beta_n^2} e^{-\beta_n^2 \eta}}{A + \alpha^2 \sum_n \frac{C_n F'_n(1)}{2\beta_n^4} e^{-\beta_n^2 \eta}} \tag{34}$$

dove A, α sono gli stessi del caso precedente.

Perciò anche qui i valori di $\text{Nu}_\infty = \frac{1}{A}$ sono eguali a quelli esposti nella tabella precedente [2].

Quando $\text{Gz} > 100$ e $m \leq 10$, cioè nelle condizioni di validità della approssimazione di Leveque l'espressione asintotica per il numero di Nusselt diventa:

$$\text{Nu} = 1{,}7505\, \delta^{1/3}\, \text{Gz}^{1/3}. \tag{35}$$

Nelle figure 1 e 2 sono riportati i diagrammi Nu in funzione di Gz nel campo $1 \leq \text{Gz} \leq 500$ per i fluidi con $m = 2, 4, 6, 10, \infty$ e per le due condizioni $q_w = \text{cost}$ $t_w = t_0 + C\eta$.

Nomenclatura.

Una parte della nomenclatura usata in questa Nota è la stessa della Nota I. I simboli nuovi che sono stati usati sono i seguenti:

c = costante nell'equazione (11).
$g = g(\eta, \varphi)$ = trasformata inversa, equazione (11).
m = indice dello sviluppo in serie (14).
s = variabile nella trasformazione di Laplace.
$t(\eta, 0)$ = temperatura sull'asse del condotto, equazione (19).
$t(\eta, 1) = t_w$.
A = costante dell'equazione (16).
C = costante dell'espressione $t = t_0 + C\eta$.
F (s, φ), H (s), Q (s), T (s, φ), $T_w(s)$ = trasformate di Laplace nelle equazioni (3, 4, 5, 6).
α = costante della equazione (16).
γ_m = radici della equazione $H(s) = 0$.
θ = soluzione della equazione (5,I).
ξ = variabile nella formula (1).

Bibliografia.

[1] J. R. Sellars, Myron Tribus, J. S. Klein, «Trans. A.S.M.E.», *78*, pp. 441-448 (1956).
[2] Per esempio: E. Jahnke, F. Emde, *Tables of functions*, Dover Pubblications.
[3] U. Grigull, «Chem. Ing. Techn.», *27*, 480 (1955).

Elettrochimica. — *Comportamento elettrodico di monocristalli di antimonio* (*). Nota di Guido Poli, Bruna Rivolta e Aurelio La Vecchia, presentata (**) dal Corrisp. R. Piontelli.

In continuazione alle ricerche sistematiche, intraprese in questo Laboratorio, sul comportamento elettrodico di monocristalli metallici, sono state studiate le sovratensioni dei processi di scambio ionico metallo/soluzione per monocristalli di antimonio.

L'antimonio, come il bismuto, precedentemente studiato (1), presenta struttura romboedrica. Come per il bismuto sono state, perciò, sperimentate superficie elettrodiche orientate secondo i piani cristallografici (111), ($\bar{1}$10) e (100) (riferiti ad assi pseudo–cubici), mentre ci si è dovuto limitare allo studio della soluzione di $SbCl_3$ 0,5 M, addizionata di 3 moli per litro di HCl, data la facile idrolizzabilità delle soluzioni percloriche di antimonio.

Rimandiamo per tutti i particolari sperimentali alla citata Nota sul comportamento elettrodico dei monocristalli di bismuto, ivi compreso il procedimento di depurazione galvanica dell'elettrolita, ed eccettuato il procedimento di lucidatura anodica che, nel caso dell'antimonio, è stata effettuata in soluzione contenente: H_2SO_4 300 g/l, HF 20 g/l, Sb 60 g/l; tensione di cella 8 V circa; catodo di acciaio. Dopo lucidatura l'elettrodo veniva lavato, prima con HCl 3 M, quindi con acqua bidistillata e, infine, asciugato in corrente di azoto.

I principali risultati delle presenti esperienze sono i seguenti:

1° le sovratensioni catodiche sono praticamente indipendenti dall'orientamento cristallografico della superficie dell'elettrodo;

2° le sovratensioni anodiche sono nettamente più elevate su gli elettrodi orientati secondo il piano (111), vicine fra loro per gli orientamenti secondo *l'* (100) e *l'* ($\bar{1}$10), benché ancora tendenzialmente inferiori per quest'ultimo.

Come conseguenza di tale diversità di comportamento tra processi anodico e catodico, si ha che la sovratensione anodica, a parità di densità di corrente, è nettamente superiore alla catodica per gli elettrodi orientati secondo il piano (111), e viceversa leggermente inferiore per gli altri.

Per gli elettrodi monocristallini di bismuto erano state trovate sovratensioni, tanto anodiche quanto catodiche, crescenti nell'ordine: ($\bar{1}$10) $<$ $<$ (100) $\ll$ (111). L'influenza dell'orientamento cristallografico della superficie elettrodica è, quindi, per l'antimonio, simile a quello osservato per

(*) Ricerca eseguita nell'Istituto di Chimica fisica, Elettrochimica e Metallurgia del Politecnico di Milano.

(**) Nella seduta del 19 novembre 1960.

(1) G. Poli, B. Rivolta e A. La Vecchia, questi « Rendiconti », VIII, *28*, 219 (1960).

il bismuto, limitatamente però al processo anodico. Inoltre, questa dissimmetria nel comportamento fra lato anodico e lato catodico non era stata finora osservata per nessuno dei metalli precedentemente studiati. In tutti questi casi, infatti, era risultato sempre che l'ordine delle sovratensioni era il medesimo, o che l'influenza dell'orientamento era nullo, per ambedue i sensi dello stesso processo elettrodico.

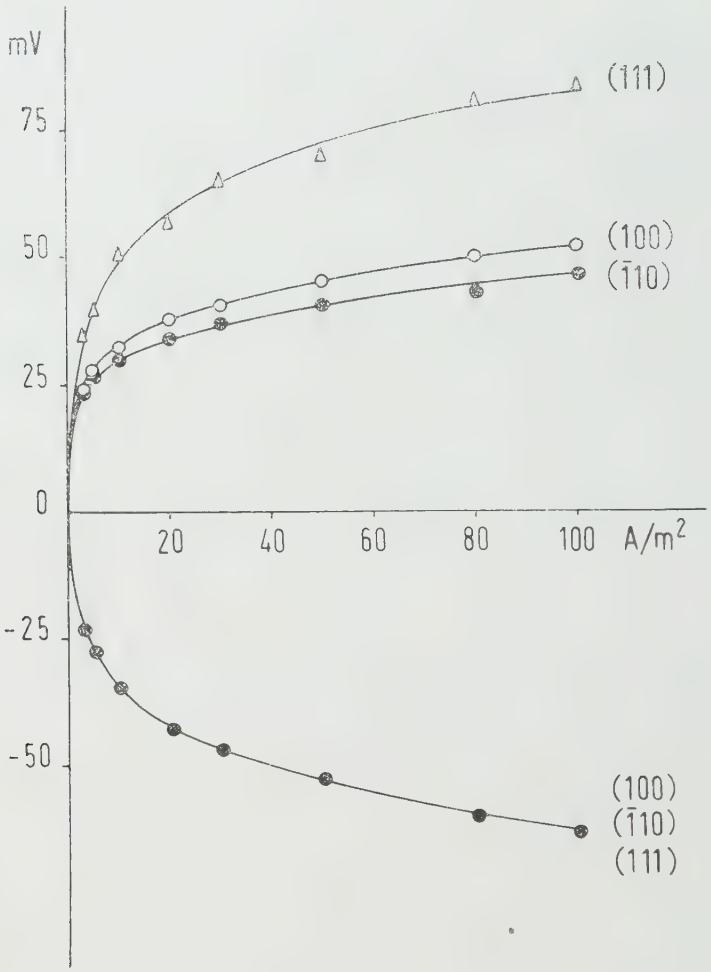
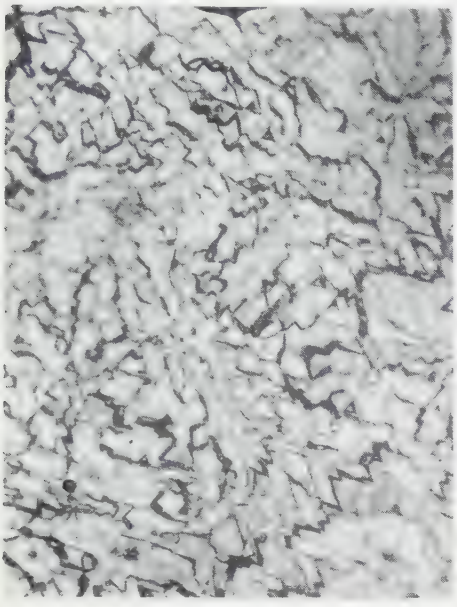
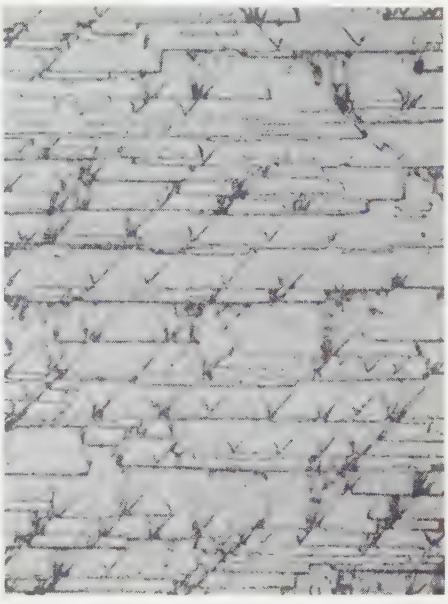


Figura 1. – Curve sovratensione–densità di corrente per gli elettrodi $Sb/SbCl_3$ 0,5 M + HCl 3 M a diverso orientamento cristallografico.

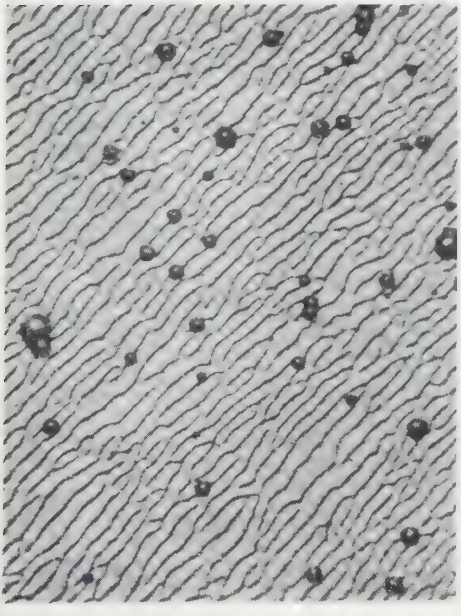
Un'interpretazione di quest'anomalia nel comportamento catodico dell'antimonio, può forse essere tratta dall'esame della struttura dei depositi sui diversi piani cristallografici. Infatti i relativi diagrammi di diffrazione elettronica indicano che i depositi catodici, nelle condizioni da noi studiate, sui piani ($\bar{1}10$) e (100) proseguono l'orientamento primitivo, mentre sul piano (111) presentano, insieme a questo, anche un altro orientamento con



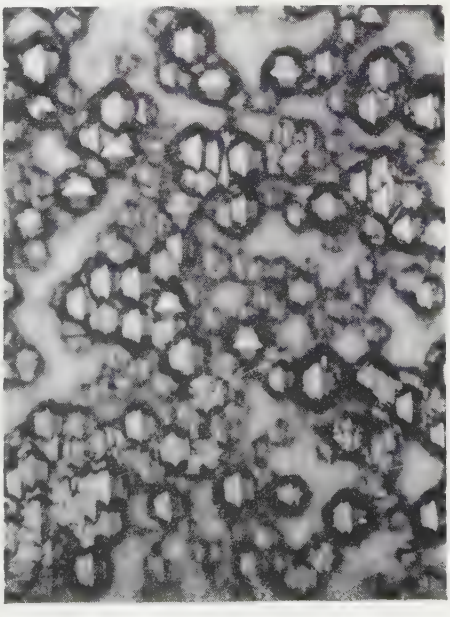
a



b



c



d

Micrografie di superficie elettrodiche.

a) (111) deposito catodico (× 300).
c) (120) deposito catodico (× 640).

b) (100) attacco anodico (× 500).
d) (100) deposito catodico (× 800).

il piano (11$\bar{1}$) parallelo al piano (111) del substrato [2]. Poiché, a differenza del sistema cubico, nel sistema romboedrico questi due piani non sono equivalenti, si ha, in questo caso, la formazione di una superficie elettrodica diversa da quella iniziale, sia riguardo la densità atomica superficiale, sia riguardo gli elementi di simmetria cristallografica [3].

Per quanto concerne gli aspetti strutturali, dal punto di vista morfologico, delle modificazioni, subite dalle superficie elettrodiche in seguito ad attacco o a deposizione catodica, l'esame al microscopio ha condotto ai seguenti risultati:

1° sul piano ($\bar{1}$10) non si osservano figure, né di attacco, né di accrescimento;

2° sul piano (100) l'attacco mette in evidenza figure a triangolo isoscele, mentre i depositi mostrano una superficie corrugata, cosparsa di cristallini delimitati da faccette;

3° sul piano (111) si osservano figure di attacco o di accrescimento triangolari.

Dal confronto dei valori di sovratensione, misurati nelle esperienze descritte nella presente Nota, con i valori di sovratensione dei processi di scambio ionico fra bismuto e soluzione cloridrica, risulta evidente il passaggio dalla quasi « normalità », in senso cinetico–elettrochimico [4], del bismuto alla più marcata « inerzia » dell'antimonio, confermando per quest'ultimo il carattere di metallo a comportamento « intermedio », già messo in evidenza in un precedente lavoro [5].

Le esperienze che formano oggetto del presente studio, sono state effettuate nel quadro delle ricerche sistematiche sul comportamento di monocristalli metallici, svolte in questo laboratorio sotto la guida del prof. Roberto Piontelli, che siamo lieti di ringraziare per i suoi suggerimenti.

(2) Queste osservazioni sono in buon accordo con quelle di L. Yang, « J. Appl. Phys. », *25*, 184 (1954). Uno studio più approfondito delle strutture dei depositi di antimonio su catodi monocristallini è in corso da parte nostra.

(3) La faccia (111) è trisimmetrica, mentre la faccia (11$\bar{1}$) è soltanto monosimmetrica come la (100).

(4) R. Piontelli, « Z. Elektrochem. », *55*, 128 (1951).

(5) R. Piontelli e G. Poli, « Gazz. Chim. ital. », *79*, 214 (1949).

Chimica. — *Cinetica di idrolisi di amidi N–sostituite.* – Parte III: *Benzanilide e derivati para–sostituiti.* Nota di Giulio Cauzzo, Ugo Mazzucato e Antonio Foffani, presentata (*) dal Corrisp. G. Semerano.

In una precedente Nota [1] sull'idrolisi di amidi alifatiche N–sostituite si è discusso l'effetto della sostituzione alchilica ed arilica all'azoto amidico della acetamide sulla velocità di scissione del legame carbamidico in ambiente acido ed alcalino.

L'esame viene ora esteso ad una semplice amide aromatica simmetrica, quale la benzanilide, confrontandone i risultati con quelli esistenti in letteratura per molecole analoghe; solo due dati isolati risultavano noti sulla velocità di idrolisi della benzanilide, rispettivamente in ambiente acido [2] e basico [3]: essi comunque erano riportati per inciso nella discussione su altre molecole e non permettevano, data anche la diversità delle fonti, un'attendibile discussione sulla reattività di questa molecola.

Riportiamo nel seguito dati sulla reazione di idrolisi acida e basica in ambiente idroalcolico per la benzanilide e alcuni suoi derivati *para*–sostituiti. L'effetto della *para*–sostituzione alla parte acida ed aminica della molecola viene discusso anche alla luce di precedenti risultati [4] sulle benzamidi.

Parte sperimentale.

a) *Materiali.*

La benzanilide era un prodotto commerciale Eastman Kodak tricristallizzato da etanolo (p. f. 168° C). Le benzanilidi *para*–sostituite ($R—C_6H_4—CO—NH—C_6H_4—R'$) vennero preparate mescolando sotto agitazione soluzioni benzeniche del cloruro dell'acido e dell'anilina (1 : 1,5) in presenza di sospensione acquosa di bicarbonato sodico. Si lavò ripetutamente il precipitato, prima con acqua acida per acido cloridrico, poi con miscela etanolo–etere; infine si cristallizzò da etanolo. Punti di fusione: $R=CH_3O$, $R'=H$ 170°; $R=CH_3$, $R'=H$ 144°–145°; $R=Cl$, $R'=H$ 194°; $R=NO_2$, $R'=H$ 210°–211°; $R=H$, $R'=CH_3$ 156,5°-158°; $R=H$, $R'=Cl$ 191°–193°; $R=H$, $R'=NO_2$, 196,5°–198°; R, $R'=NO_2$ 273°.

b) *Procedimento cinetico.*

Le misure vennero eseguite per via spettrofotometrica con uno strumento a reticolo Optica CF4 seguendo nel tempo la diminuzione di assorbimento dell'amide in un intervallo di lunghezza d'onda (variabile da 310 a 340 mμ

*) Nella seduta del 19 novembre 1960.

a seconda del composto) dove minore fosse il disturbo alla misura da parte dei prodotti di idrolisi; dove necessario si tenne conto del loro contributo all'assorbimento.

Alcune cinetiche in ambiente alcalino, quando la solubilità dell'amide lo permise, vennero ripetute seguendole per titolazione della soda in eccesso con H_2SO_4 e fenolftaleina; l'accordo con i dati spettrofotometrici risultò buono, come risulta dall'esempio di Tabella I.

Tabella I.

Costanti di velocità (litri mole^{-1} min^{-1}) *per l'idrolisi acida e basica della benzanilide in acqua–etanolo a* 90° C.

Catalizz.	Normal. cat.	% H_2O (vol.)	k_2 ($\times 10^3$)
HCl	1,22	10	1,29
	1,22	40	1,09
	1,44	31	1,03
	2,02	18	1,21
	3,60	24	1,04
	3,78	25	1,04
	4,79	31	1,17
	6,25	41	1,06
H_2SO_4	1,46	10	0,88
	3,40	10	0,86
	1,95	40	0,70
	3,16	40	0,69
KOH	0,20	26	3,15
	0,30	40	3,19
	0,09	1	3,07 (*)

(*) Per titolazione.

Le cinetiche vennero eseguite per punti in fiale chiuse, mantenute in termostato a temperatura controllata a $\pm$ 0,1°. La reazione veniva arrestata ai vari intervalli di tempo per raffreddamento delle fiale in miscela frigorifera, e la determinazione di assorbenza veniva eseguita a temperatura ambiente.

La concentrazione di amide (10^{-3}–10^{-4} M) era quella utile per le misure spettrofotometriche; la concentrazione di catalizzatore, dell'ordine di 1 N per HCl e H_2SO_4 e di 0,1 N per KOH, venne talvolta variata come specificato più oltre, rimanendo, però sempre in largo eccesso rispetto all'amide. Dalle costanti di pseudo primo ordine, calcolate in base ai dati di assorbenza, si risalì alle costanti globali di secondo ordine k_2 (litri mole^{-1} minuti^{-1}) in base alla $k_2 = \frac{k_1}{[\text{cat.}]}$. Dove necessario, dette costanti vennero opportunamente corrette per tener conto dell'esterificazione della specie catalizzante con l'etanolo. Nelle cinetiche seguite per titolazione in ambiente alcalino le concentrazioni di amide e potassa erano attorno a 0,08 M; la costante specifica k_2 venne in questo caso determinata in base alla normale equazione del secondo ordine.

c) *Risultati e discussione.*

Benzanilide.

Le Tabelle I e II riportano rispettivamente le costanti specifiche di velocità per l'idrolisi acida e basica della benzanilide in ambiente idralcolico ed i dati relativi all'effetto di temperatura per la catalisi acida.

Tabella II.

Energia di attivazione per l'idrolisi acida della benzanilide (conc. HCl $\simeq$ 1 N) *in ambiente idroalcoolico al* 90 % *di etanolo.*

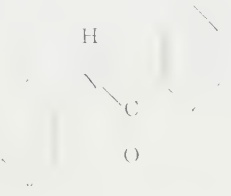
t(°C)	k_2(× 10^3)	t(°C)	k_2(× 10^3)	
75,0	0,40	89,7	1,18	
80,0	0,60	90,0	1,29	$\Delta E = 19{,}4$ kcal
85,0	0,95	95,0	2,12	$A = 3 \cdot 10^8$

La variazione di specie catalizzante in ambiente acido (HCl e H_2SO_4) ha poco effetto sulla k_2, anche per normalità di acido solforico tali da far ritenere presente una non trascurabile percentuale di forma indissociata. Cinetiche eseguite a pari contenuto d'acqua e variando la concentrazione del catalizzatore portano infatti a valori soddisfacientemente coincidenti per k_2, indicando un andamento di primo ordine con la normalità di catalizzatore, come vuole il meccanismo A–2, tipico di queste reazioni. Ciò risulta meglio evidente nel caso dell'HCl, dove la concentrazione è stata variata in un più ampio intervallo (fino a oltre 6 N).

La reazione è abbastanza nettamente accelerata in ambiente basico in accordo col comportamento generale delle amidi (ved. [1] e bibliografia

ivi riportata). La velocità specifica assume comunque nei due ambienti valori sensibilmente minori che per altre amidi semplici alifatiche e aromatiche, indicando una bassa reattività della benzanilide all'attacco idrolitico: ciò si riflette in una abbastanza alta energia di attivazione e in un basso fattore di frequenza.

Come risulta dai dati spettrali infrarossi [5], la benzanilide, i cui gruppi fenilici non possono assumere la disposizione *cis* per impedimento sterico alla planarità, si troverebbe pressoché totalmente in forma *trans* rispetto al legame C—N:



essendo la forma *cis* presumibilmente più reattiva, anche per « addizionale » impedimento sterico alla risonanza nel gruppo anilidico (ved. ad esempio il caso non dissimile della N-metil trifluoro acetanilide in [6]) la benzanilide ne risulterebbe meno facilmente idrolizzabile rispetto al caso in cui entrambe le forme isomere fossero presenti. Gli effetti sterici ordinari e la stabilizzazione del legame C—N per risonanza nella forma *trans* dovrebbero in tal caso essere predominanti, mentre la distribuzione di forme $^{(-)}O—\overset{|}{C}=N^{(+)}\diagup\!\!\diagdown$ (in altri casi più semplici valutabile dai valori della ν_{CO} infrarossa e dal momento dipolare) sono in questa molecola presumibilmente in parte compensati o comunque mascherati, in quanto le due costanti fisiche suddette hanno qui valori più bassi che in analoghe amidi più reattive, ad esempio nell'acetanilide [7].

Analogamente a quanto osservato per la sostituzione all'azoto nel caso dell'acetamide [1], anche ora dal confronto con i dati di letteratura [1, 2, 4, 8] risulta che sia la sostituzione alchilica (per cui si hanno dati solo in ambiente basico) che fenilica aumentano la stabilità della benzamide: il carattere induttivo del sostituente e la risonanza nello stato reagente del sistema provocano una complessiva diminuzione nel carattere elettrofilo del centro di reazione e quindi una maggiore resistenza all'attacco idrolitico. Si ha in definitiva che k (benzamide) $> k$ (N-metil benzamide), k (benzanilide). L'azione concomitante degli effetti mesomero e induttivo viene quindi a invalidare talvolta la regola secondo cui un'amide dovrebbe avere tanta più facilità alla scissione quanto più è forte l'acido e debole l'amina da cui proviene.

Nella sostituzione alla parte acida della molecola l'effetto rallentante permane, seppure in minore entità [ved. anche 3], sia nel caso delle amidi ($R'=H$, CH_3) che delle anilidi ($R'=C_6H_5$):

$$H—CO—NH—R' > CH_3—CO—NH—R' > C_6H_5—CO—NH—R',$$

con comportamento parallelo tanto in catalisi acida che basica, salvo il caso in precedenza discusso dell'acetanilide in mezzo acido [1].

L'effetto di solvente sull'idrolisi (ved. anche [1] per i casi dell'N–metil acetamide e dell'acetanilide) non è stato ora esaminato in dettaglio sia per ragioni di solubilità sia perché, come appare dai dati introduttivi di Tabella I in ambiente acido, l'effetto di aggiunta di acqua all'etanolo è molto piccolo e prossimo ai limiti di accuratezza delle misure; esso sembra comunque in direzione opposta a quanto verificato negli altri casi, cioè con modesta diminuzione di velocità al crescere della costante dielettrica: il fatto potrebbe attribuirsi ad una più bassa polarità del complesso attivato per minore separazione di carica al gruppo carbonilico durante l'idrolisi.

Derivati *para*-sostituiti della benzanilide.

La Tabella III riporta le costanti di velocità a 90° C per l'idrolisi acida e basica di alcune benzanilidi *para*-sostituite.

TABELLA III.

Effetto di para-*sostituzione sull'idrolisi acida e basica della benzanilide* ($R—C_6H_4—CO—NH—C_6H_4—R'$) *a* 90° C *in ambiente idroalcolico all'* 80 % *di etanolo.* (*k* in litri $mole^{-1}$ min^{-1}).

R	R′	k_{H^+} (× 10^3)	k_{OH^-} (× 10^3)
NO_2	H	1,31	31,05
Cl	H	1,36	27,60
H	H	1,21	3,15
CH_3	H	0,93	1,78
OCH_3	H	0,92	
H	NO_2	3,18	
H	Cl	1,26	10,80
H	CH_3	0,87	1,40
NO_2	NO_2	3,66	

Tanto in ambiente basico che acido i sostituenti elettron-attrattori aumentano e gli elettron-donatori diminuiscono la velocità di idrolisi. La entità dell'effetto varia però a seconda che la sostituzione in *para* abbia luogo alla parte benzoica o anilinica della benzanilide: in particolare nell'idro-

lisi basica, dove l'atto determinante la cinetica del processo è l'attacco dell'OH^- al carbonio carbonilico, la sostituzione alla parte benzoica della molecola ha un effetto molto maggiore; nella catalisi acida d'altra parte, dove l'atto più importante di reazione è l'attacco protonico all'azoto, si fa sentire maggiormente la sostituzione alla parte anilinica. È da rilevare a questo proposito il caso del composto con R=H , R′=Cl, per il quale non si ha in ambiente acido variazione apprezzabile di velocità rispetto alla benzanilide non sostituita, mentre la situazione è normale in ambiente alcalino: detto comportamento in ambiente acido rispecchia la situazione analoga osservata da Karve e Kelkar [2] per la *p*-Br acetanilide (ved. anche l'utilizzazione dei dati di questi ultimi Autori in [4]).

La sostituzione a entrambi gli anelli della benzanilide (caso del *p*, *p*′-dinitro-derivato) sembra dare un effetto essenzialmente somma di quelli dovuti alle sostituzioni singole, in analogia a quanto osservato in reazioni analoghe [ved. 9 e bibliografia ivi riportata] circa l'effetto cumulativo di sostituenti nello stesso nucleo benzenico.

Gli effetti osservati confermano ed estendono, sopratutto per la catalisi alcalina della quale mancavano finora dati sufficienti per le anilidi, i risultati di Meloche e Laidler [4] sulle benzamidi e la correttezza delle loro previsioni basate sul meccanismo generale ammesso per l'idrolisi di molecole del tipo RCOX (X=NH_2, OR′, NHR′). In accordo con detto meccanismo l'effetto di *para*-sostituzione alla parte benzoica della molecola, di natura essenzialmente induttiva, risulta essere dello stesso segno in entrambi gli ambienti acido e alcalino, analogamente a quanto si ha negli esteri e a differenza di quanto avviene con le amidi. Il fatto si può' collegare, come già illustrato [4], alla molto maggiore basicità dell'azoto amidico rispetto allo azoto delle anilidi e all'ossigeno degli esteri, per cui nell'idrolisi acida delle amidi cresce l'importanza dell'interazione H_3O^+—N nei confronti di quella H_2O—C, invertendo la situazione rispetto al caso della catalisi alcalina. I corrispondenti diagrammi di Hammett log k/σ, pur grossolanamente lineari, permettono di risalire a valori della costante di reazione ρ positivi in entrambi gli ambienti (dell'ordine di 0,4 in ambiente acido e superiore all'unità in quello alcalino): il primo di questi valori si differenzia così nel segno – come accennato sopra – rispetto al caso delle amidi [4] per le quali si hanno valori di $-0{,}15$ e $+0{,}7$, rispettivamente in ambiente acido ed alcalino.

I dati disponibili di energia d'attivazione in ambiente acido (per R=CH_3O , R′=H 20,5 *k* cal; per R=NO_2 , R′=H 18,0 *k* cal; per R=H , R′=NO_2 19,8 *k* cal; per R , R′=NO_2 21,2 *k* cal; per la benzanilide vedi Tabella II) sembrano indicare un andamento parallelo a quello delle costanti di velocità per sostituzione alla parte benzoica, mentre meno chiaro è in particolare il comportamento del *p* , *p*′-dinitro-derivato, non essendo in tal caso prevedibile un notevole effetto sterico. È da notare che anche in molecole relativamente più semplici, quali le benzamidi [4] e le formanilidi e acetanilidi [2], l'effetto di sostituente sull'energia di attivazione è notevole in catalisi acida solo per sostituzione in *orto*.

Bibliografia.

[1] U. Mazzucato, A. Foffani e G. Cauzzo, « Annali di Chimica », *50*, 521 (1960).
[2] D. D. Karve e B. W. Kelkar, « Proc. Indian Acad. Sci. », *24*, 254 (1946).
[3] J. Lichtenberger e A. M. Geyer, « Bull. Soc. Chim. », 824 (1957).
[4] I. Meloche e K. J. Laidler, « J. Am. Chem. Soc. », *73*, 1712 (1951).
[5] R. A. Russell e H. W. Thompson, « Spectrochim. Acta », *8*, 138 (1956); ved. anche H. H. Freedman, « J. Am. Chem. Soc. », *82*, 2454 (1960).
[6] S. S. Biechler e R. W. Taft Jr., « J. Am. Chem. Soc. », *79*, 4927 (1957).
[7] Per i dati di momento dipolare ved. J. E. Worsham e M. E. Hobbs, « J. Am. Chem. Soc. », *76*, 206 (1954); per i dati spettrali infrarossi ved. [5].
[8] J. Tirouflet, R. Dabard e E. Laviron, « Bull. Soc. Chim. », 570 (1957) (ved. in particolare a p. 575 per l'idrolisi alcalina di N–alchil benzamidi).
[9] B. Jones e J. Robinson, « J. Chem. Soc. », 3845 (1955).

Chimica. — *Spettri vibrazionali di alcuni tiocianati ed isotiocianati aril-alchilici.* Nota di Antonio Foffani, Ugo Mazzucato e Umberto Miotti, presentata (*) dal Corrisp. G. Semerano.

Lo studio infrarosso spettro-strutturale di tiocianati ed isotiocianati organici è stato di recente oggetto di rinnovato interesse, portando ad alcune rilevanti modifiche nell'assegnazione delle frequenze di gruppo [1] e mettendo in luce alcune notevoli regolarità nell'effetto di sostituente [2]. In particolare, semplici considerazioni sui valori delle distanze di legame e delle costanti di forza per i legami C=S e C=N separati e cumulati hanno portato ad invertire le precedenti assegnazioni per la frequenza di allungamento C—N e per quella pseudo-simmetrica del gruppo isotiocianico, assegnate ora rispettivamente nell'intorno di 1080 e 680 cm^{-1}. Il primo di questi modi è particolarmente interessante, poiché esso interviene, attraverso risonanza di Fermi, anche a determinare la struttura della banda complessa relativa alla ν_{as} (NCS) nell'intorno dei 2100 cm^{-1}; poiché d'altronde era da prevedere che esso fosse abbastanza sensibile all'introduzione di sostituenti nel residuo organico, abbiamo voluto esaminare la situazione con un gruppo di isotiocianati a nostra disposizione, e precisamente quelli di benzile, benzidrile e trifenilmetile ed alcuni loro derivati para-sostituiti. Preparazioni e caratteristiche di detti composti vengono descritte altrove [3].

Riportiamo nel seguito i risultati più salienti ottenuti, che pongono in luce alcuni effetti di un certo interesse. In Tabella I e II sono raccolti i dati (frequenze in cm^{-1}) di rilievo ai fini della presente discussione per i composti esaminati, ottenuti in soluzione di CCl_4 di concentrazione dell'ordine di 0,1-0,4 M, in dipendenza delle intensità delle bande; come strumento si usò un Perkin-Elmer mod. 21 con ottica in NaCl e, in qualche caso, un modello 112 con ottica in CaF_2, ottenendo valori di frequenza soddisfacentemente coincidenti con le due ottiche, nei limiti di accuratezza consentiti dalla forma del picco principale e delle spalle per la banda a 2100 cm^{-1} degli isotiocianati (1).

L'esame delle tabelle permette alcune osservazioni:

a) *Zona 1000-1100 cm*$^{-1}$. - Le assegnazioni di Tabella I in tale intervallo, che è di interesse per la localizzazione del modo di allungamento C—N per gli isotiocianati, sembrano ragionevolmente corrette in tutti i casi illustrati, dato che i modi benzenici di monosostituzione e bisostituzione in *para* sono ben individuati e lasciano come assegnabili alla vibrazione C—N le bande a 1058, 1061 e 1035 cm^{-1}, rispettivamente nel trifenilmetil isotiocianato e nei suoi mononitro e trinitro derivati, e quella a 1092 cm^{-1} nel composto benzilico, quest'ultima in accordo con la attribuzione di Ham e Willis [1].

(*) Nella seduta del 19 novembre 1960.

(1) Per l'aspetto di tale banda in questo ed in altri casi ved. [4] e citazioni ivi riportate.

Tabella I.

Spettri I.R. di isotiocianati aril-alchilici (R–N=C=S) *nelle zone della* ν_s (NCS), ν (C—N) *e* ν_{as} (NCS).

R / assegnazioni [a]	C_6H_5—CH_2—	p—X C_6H_4 / p—X′C_6H_4 CH—						p—X C_6H_4 / p—X′ C_6H_4—C— / p—X″C_6H_4		
		X, X′=H	X=Cl, X′=H	X=CH_3 X′=H	X=NO_2, X′=H	X, X′=Cl	X, X′=CH_3	X, X′, X″, =H	X=NO_2; X′, X″=H	X, X′, X″=NO_2
ν_s (NCS)	*682* [b] ssh	*676* msh	*676* msh	*664* vw	662 w 667 w	672 s	*667* w	667 w 678 m	*653* w	668 s 672 s
Γ_3	696 vs 717 ssh	696 vs 716 s	694 s 708 msh	693 s 710 m	698 vs 721 s	678 msh 702 wm	692 s 705 s	697 vs 735 m	697 vs 702 ssh	693 m
ω_4 monosostituzione	1003 w	1002 m	1000 w	999 w	1001 w			1002 m	1001 w	
δ_5 parasostituzione			1014 m	1020 wm	1015 m	1015 vs	1021 vs		1014 m	1012 m
δ_5 monosostituzione	1029 ms	1029 s	1030 w	1029 wm	1029 wm			1033 s	1031 m	
CH_3 rock.				1039 w			1040 m			
δ_2 monosostituzione	1073 w	1071 [c] m	1078 [c,d] wsh	1070 [c] w	1073 [c] w			1077 m	1076 wsh	
ν (C—N)	*1092* w				(1037) wsh	1072 [d] wsh	*1071* w	*1058* m	*1061* w	*1034* w
ω_4 parasostituzione			1090 s			1092 vs				1086 m
	1106 w	1109 w		1111 w			1111 m	1088 wsh		
δ_4 parasostituzione			1104 msh	1120 w	1109 m	1107 ssh	1123 s		1110 w	1110 m
rison. di Fermi di ν_{as} (NCS) e $2 \times \nu$ (C—N)	2082 vs 2177 ssh (1065) [e]	2059 vs 2154 ssh (1053)	2051 vs 2147 ssh (1050)	2070 vs 2161 ssh (1058)	2043 vs 2148 ssh (1048)	2047 vs 2150 ssh (1049)	2068 vs 2160 ssh (1057)	2046 vs 2149 ssh (1049) 2125 [f] ssh	2038 vs 2150 ssh (1047) 2127 [f] ssh	2017 vs 2142 ssh (1040)

(*a*) Notaz. secondo Kohlrausch–Maier. Circa le intensità relative: vs = molto forte, s = forte, m = media, w = debole, vw = molto debole, sh = spalla.

(*b*) I valori in corsivo corrispondono a bande implicanti il gruppo triatomico, quando ragionevolmente assegnate.

(*c*) Possibile coincidenza δ_2, ν (C—N).

(*d*) Possibile coincidenza con banda non assegnata, osservata, ad esempio, in *para*-clorotolueni.

(*e*) I dati fra parentesi sono le medie del doppietto di risonanza di Fermi.

(*f*) In alcuni casi, più chiaramente nei composti trifenilmetilici, si osservano due spalle oltre al picco principale ved. anche [4]): la scelta di tabella è quella più ragionevole per confronto con

Il caso dei composti benzidrilici è più complesso per la possibile sovrapposizione, nell'intorno dei 1075 cm^{-1}, con il modo benzenico δ_2 nei composti solo parzialmente bisostituiti in *para* (X'=H ed X=Cl, CH_3, NO_2) e, per i cloro-derivati, con la banda talvolta osservata nella stessa zona ad esempio nei para-cloro tolueni [5]. A tale riguardo è particolarmente indicativo il caso del *p,p'*-dimetil-benzidril isotiocianato, per il quale, essendo eliminate le suddette cause di incertezza, l'assegnazione della banda a 1071 cm^{-1} alla vibrazione C—N sembra del tutto ragionevole.

b) *Zona 2000-2200 cm^{-1}*. – Le assegnazioni di cui sopra per la ν (C—N) sono d'altra parte confermate dal caratteristico comportamento della banda complessa a 2000-2200 cm^{-1}. In accordo con l'interpretazione di [1] il picco principale e la spalla a frequenze maggiori sono ragionevolmente ben interpretabili come corrispondenti ad un doppietto di risonanza di Fermi tra il modo di allungamento pseudo-asimmetrico del gruppo triatomico e la seconda armonica della ν (C—N); la tipica diminuzione parallela di entrambe queste frequenze per crescente sostituzione arilica al gruppo metilico è in buon accordo con il relativo andamento della ν (C—N) stessa, tenuto conto che dei due modi vibrazionali interagenti nella risonanza di Fermi quello più sensibile ad effetti di sostituente al residuo organico dovrebbe essere chiaramente il modo corrispondente alla ν (C—N). Ciò è confermato anche dal confronto con i dati di Jesson e Thompson [6 *a*] per la ν (C≡N) in acetonitrile e suoi fenil- e cloro-derivati, dove l'effetto – pur nella stessa direzione – è molto minore, trattandosi, come per la ν_{as} (NCS), di una frequenza di gruppo relativamente isolata e stabile. I corrispondenti tiocianati si avvicinano nettamente al comportamento dei nitrili, in accordo con il fatto che in questo caso la banda a circa 2150 cm^{-1} corrisponde soltanto al modo di allungamento asimmetrico del gruppo tiocianico ed è quindi molto meno sensibile ad effetti di sostituzione al metile (ved. [1] e dati in Tabella II per metil-tiocianato e suoi mono- e di-fenil-derivati).

c) *Zona 650-750 cm^{-1}*. – Le Tabelle I e II riportano le assegnazioni probabili in tale intervallo per i tiocianati e gli isotiocianati esaminati. In questa regione vengono generalmente localizzati i modi di allungamento corrispondenti a legami singoli carbonio-solfo; come detto prima, nel caso degli isotiocianati, pur essendo i due legami del gruppo triatomico essenzialmente doppi, il modo pseudo-simmetrico cade ancora in questo intervallo per interazione dei legami C=N e C=S cumulati; nel caso del gruppo tiocianico d'altra parte è da prevedere in questa regione la presenza di due bande corrispondenti ai modi di allungamento dei legami, essenzialmente singoli, solfo-residuo organico e solfo-carbonio del gruppo triatomico.

Per il tiocianato di metile [1] rimane incerta l'assegnazione, tra i modi suddetti, delle due bande ad essi attribuite in questo intervallo; nei tiocianati qui descritti è possibile riconoscere soltanto una banda di bassa intensità a 677 ± 10 cm^{-1}: ciò può dipendere o da approssimativa coincidenza dei due modi d'allungamento C—S o da sovrapposizione di uno di essi con un modo benzenico; non è inoltre da escludere che un sensibile abbassamento

di intensità o frequenza di una delle due vibrazioni la renda difficilmente osservabile nelle condizioni di misura. Per gli isotiocianati la ν_s (NCS) è generalmente ben isolabile a 670 ± 10 cm^{-1}, come risulta dalla Tabella I, con qualche incertezza solo in pochi casi.

TABELLA II.

Spettri I.R. di tiocianati aril–alchilici (R—S—C≡N) *nelle zone della* ν_s (SCN) *e* ν_{as} (SCN

R / assegnazioni	C_6H_5—CH_2—	*p*—X C_6H_4 / *p*—X′C_6H_4 CH—					
		X, X′=H	X=Cl, X′=H	X=CH_3, X′=H	X=NO_2, X′=H	X, X=Cl	X, X′=Cl
ν_s (SCN)	671 ssh	672 ssh	679 msh	674 m	690 msh	668 m	680 w
ν (C–SCN)	679 ssh						
Γ_3	694 vs	696 vs	696 vs	693 vs	696 s	681 m	692 w
			717 m	719 s	703 msh		705 vw
ν_{as} (SCN)	*2158* m	*2153* m	*2147* m	*2153* m	*2143* mw	*2146* mw	*2153* m

d) *Effetti di sostituente e di solvente.* – Il comportamento caratteristico degli isotiocianati, prima esaminato per confronto con nitrili e tiocianati circa gli effetti di sostituzione diretta al carbonio metilico, si riflette in modo interessante, sia sul picco principale che sulla spalla della banda a 2000–2200 cm^{-1}, anche per sostituzione all'anello aromatico e per effetto del mezzo.

Mentre i nitrili aromatici ed alifatici [6] ed i tiocianati aromatici [7 *a*] [2] mostrano un effetto di sostituente relativamente debole ed implicante un aumento di frequenza per sostituzione in *para* con gruppi elettron–attrattori, i corrispondenti isotiocianati mostrano un effetto notevolmente esaltato e in direzione opposta (ved. [2, 7 *a*] e Tabella I), che si mantiene pressoché inalterato anche in soluzione di acetonitrile. Ciò è presumibilmente collegato agli effetti sopra descritti in *b*), osservati per sostituzione diretta al carbonio metilico, riflettendo ancora il fatto che uno dei due modi che intervengono nella banda a 2000–2200 cm^{-1} è notevolmente sensibile al sostituente. È da notare che per gli isotiocianati benzidrilici qui esaminati l'effetto di sostituente è circa di entità metà che negli aromatici, probabilmente per un difetto di trasmissione dell'effetto stesso attraverso il raggruppamento C—H

(2) Nel caso dei tiocianati benzidrilici di Tabella II il numero limitato di dati a disposizione rende incerta la valutazione della direzione dell'effetto, ma ne mette comunque in evidenza la modesta entità.

(ved. [8] per i casi analoghi di acetanilidi, acetofenoni e acetati di fenile). Come già osservato da altri Autori [2], si nota anche in questo caso un miglior andamento lineare dell'effetto di sostituente qualora si riportino i dati di frequenza contro le σ^+ di Brown, anziché contro le σ di Hammett.

Si è anche esaminato l'effetto di solvente sulla ν_{as} (NCS), specialmente per il caso dell'isotiocianato benzidrilico. La frequenza del picco principale, a 2059 cm^{-1} in CCl_4 e 2058 in benzene sale a 2070 in metiletil chetone, 2071 in acetonitrile e 2072 cm^{-1} in dimetilformamide: l'effetto osservato, in accordo con i dati di [7], è di entità sensibilmente maggiore che nel caso dei nitrili e dei tiocianati [6, 7 *a*] ed in senso opposto, cioè con aumento di frequenza in solventi polari, come osservato altre volte quando si abbia presenza di gruppi polari interagenti. Il comportamento singolare verso l'effetto del mezzo è – come detto sopra – da attribuire a cause analoghe a quelle che si manifestano nell'effetto di sostituente, riflettendo inoltre in questo caso una particolare sensibilità della molecola per le interazioni dipolari soluto–solvente. È anche da notare che nel passaggio dai solventi apolari a quelli polari il coefficiente di assorbimento al massimo diminuisce abbastanza regolarmente (ad esempio passando da CCl_4 ad acetonitrile si ha una diminuzione di circa il 12 %): data la forma ed il carattere complesso della banda, è tuttavia incerto se ciò corrisponda ad una effettiva variazione di intensità o soltanto ad una variazione della ampiezza di banda.

Bibliografia.

[1] N. S. Ham e J. B. Willis, « Spectrochim. Acta », *16*, 279 (1960); A. Costoulas e R. L. Werner, « Australian J. Chem. », *12*, 601 (1959).

[2] C. N. R. Rao, J. Ramachandran e S. Somasekhara, « Curr. Sci. », *27*, 474 (1958).

[3] *a*) A. Iliceto, A. Fava ed U. Mazzucato, « J. Org. Chem. », *25*, 1445 (1960); *b*) A. Iliceto, A. Fava, U. Mazzucato e P. Radici, « Gazz. Chim. », *90*, 919 (1960); *c*) A. Iliceto et al., risultati non pubblicati.

[4] U. Mazzucato, A. Foffani, A. Iliceto e G. Svegliado, Rendiconti IV Congresso di Spettroscopia Molecolare, Bologna Settembre 1959.

[5] C. Garrigou, J. M. Lebas e M. L. Josien, « Spectrochim. Acta », *12*, 305 (1958).

[6] *a*) J. P. Jesson e H. W. Thompson, « Spectrochim. Acta », *13*, 217 (1958); *b*) H. W. Thompson, G. Steel e M. R. Mander, « Trans. Far. Soc. », *52*, 1451 (1956); *53*, 1402 (1957); *c*) A. Foffani, C. Pecile e F. Pietra, « Nuovo Cimento », *13*, 213 (1959).

[7] *a*) G. L. Caldow e H. W. Thompson, « Spectrochim. Acta », *13*, 212 (1958); *b*) E. Svatek, R. Zahradnik e A. Kjär, « Acta Chem. Scandinavica », *13*, 442 (1959).

[8] D. G. O' Sullivan e P. W. Sadler, « J. Org. Chem. », *21*, 1179 (1956); H. H. Freedman, « J. Am. Chem. Soc. », *82*, 2454 (1960).

Geologia. — *La posizione stratigrafica delle marne a Pteropodi delle Langhe e della Collina di Torino ed il significato cronologico del Langhiano* (*). Nota di Maria Bianca Cita e Giulio Elter, presentata (**) dal Socio Gb. Dal Piaz.

Secondo Mayer (1877) e Sacco (1887, 1889) l'equivalente cronologico delle marne a Pteropodi delle Langhe è rappresentato nella Collina di Torino dall'inferiore dei due orizzonti di marne a Pteropodi, separato da quello superiore da una potente intercalazione di sedimenti più detritici e costieri. Se si ammette questa correlazione, la suddivisione stratigrafica del Miocene delle Langhe e della Collina di Torino fatta da Sacco appare più accettabile – nonostante il criterio su cui si basa, di distinguere l'età dei terreni a seconda della facies, sia assai discutibile – di quelle proposte da altri studiosi che avevano preso in maggiore considerazione il significato stratigrafico dei fossili. Infatti le marne a Pteropodi delle Langhe rappresentano per definizione il Langhiano inteso nel significato attribuitogli da Mayer (1868) di unità geocronologica compresa fra l'Aquitaniano e l'Elveziano; non possono perciò essere considerati altro che elveziani (come faceva Sacco) i terreni intercalati in Val Scrivia fra queste marne ed il Tortoniano delle località-tipo di Stazzano e Sant'Agata, mentre è logico attribuire con questo autore all'Aquitaniano le formazioni a cui le stesse marne passano inferiormente in una serie apparentemente continua. Per le stesse ragioni non è praticamente possibile suddividere in modo diverso da quanto faceva Sacco i terreni miocenici della Collina di Torino, se si ammette che le marne a Pteropodi inferiori di questa regione e quelle delle Langhe siano sincrone.

In realtà, come verrà dimostrato nelle righe che seguono, le marne a Pteropodi delle Langhe sono elveziane nella loro metà superiore almeno, mentre quelle attribuite al Langhiano da Sacco nella collina torinese sono, più verosimilmente, ancora aquitaniane. Da ciò deriva la necessità di un abbandono definitivo della classificazione stratigrafica di Sacco, e la constatazione che il significato cronologico generalmente attribuito al Langhiano non corrisponde all'età dello stratotipo che lo definisce.

Per Langhiano Mayer (1868) intese la suddivisione terziaria compresa fra l'Aquitaniano e l'Elveziano. Il termine era stato introdotto da Pareto (1865) ma con un altro significato. Doveva rappresentare infatti un piano compreso fra il Bormidiano ed il Serravalliano, ossia fra terreni che risultarono corrispondere in seguito all'Oligocene il primo, ai terreni compresi

(*) Lavoro eseguito con il contributo finanziario del Comitato per la Geografia, Geologia e Mineralogia del C.N.R.

(**) Nella seduta del 19 novembre 1960.

fra le marne a Pteropodi ed il Tortoniano il secondo. Nel senso di Pareto pertanto il Langhiano deve corrispondere anche all'Aquitaniano.

Il termine è stato sempre inteso in seguito con il significato cronologico attribuitogli da Mayer; si deve perciò considerare come stratotipo la formazione delle Langhe che vi aveva attribuito questo autore. Si tratta (Mayer 1874) delle « marne azzurrastre a *Cleodora pedemontana* ed altri Pteropodi e Nautilidi ed a *Solenomya gigantea* delle Langhe e della Val Scrivia ».

La formazione che corrisponde esattamente al Langhiano, indicato sui fogli al 100.000 (ril. Sacco) relativi alla parte settentrionale del bacino terziario piemontese, passa verso l'alto e verso il basso a formazioni di ambiente più costiero, attribuite da Mayer e indicate sulle carte geologiche come elveziane e aquitaniane rispettivamente.

La distribuzione dei Foraminiferi planctonici nelle marne a Pteropodi e nei terreni che le comprendono nelle Langhe è stata recentemente studiata da Cita e Premoli Silva (1960). Sono state identificate cinque zone tentative, di cui tre situate nelle marne a Pteropodi. Esse sono, dal basso in alto: la zona a *Catapsydrax* che corrisponde alla parte superiore dell'Aquitaniano; le zone a *Globoquadrina dehiscens*, a *Globigerina bollii* e a *Orbulina suturalis* nell'ordine, nelle marne a Pteropodi; la zona a *Globorotalia mayeri* nella parte inferiore della formazione attribuita da Mayer all'Elveziano.

Dei terreni costituenti la Collina di Torino (anticlinale di Gassino), quelli compresi fra lo « Stampiano » ed il « Messiniano » sono più eterogenei per litologia ed ambiente di sedimentazione di quanto non risulti dai lavori di Sacco. Anziché quattro formazioni, caratterizzate da facies alternativamente costiere e di mare aperto, ciascuna delle quali dovrebbe coincidere secondo questo autore con una unità geocronologica del Miocene (con l'Aquitaniano e l'Elveziano quelle di mare sottile, con il Langhiano ed il Tortoniano le altre) si osserva una sequenza di questo tipo, ma corrispondente a sei diverse formazioni. Pertanto il criterio di Sacco di distinguere l'età dei terreni a seconda della loro facies, partendo dal presupposto che ad ogni suddivisione cronologica abbia corrisposto nel bacino piemontese il deposito di una facies alternativamente di mare sottile e di mare aperto è in realtà inapplicabile al Miocene della Collina di Torino.

Non ci siamo occupati nelle nostre ricerche del Tortoniano. Le altre formazioni comprese fra questo e lo « Stampiano » vengono da noi distinte nel modo seguente e dall'alto in basso, per evitare l'uso di termini cronologicamente significativi:

5) formazione di Baldissero;
4) marne a Pteropodi superiori;
3) formazione di Termofourà;
2) marne a Pteropodi inferiori;
1) formazione di Superga.

Questi terreni si ricoprono l'un l'altro in concordanza e con passaggi litologici graduali. La colonna stratigrafica della fig. 1 indica le potenze

ed i caratteri litologici che si osservano nei dintorni di Superga e di Baldissero (fianco sudorientale dell'anticlinale di Gassino).

Le litofacies sono assai variabili in senso laterale e anche su brevi distanze nelle formazioni più detritiche e costiere. Non possiamo, per esigenze di spazio, attardarci in una descrizione particolareggiata dei caratteri litologici. Per lo stesso motivo rimandiamo, per le caratteristiche paleontologiche di queste formazioni, alla ricca letteratura esistente.

In base ai dati paleontologici, alle microfaune da noi esaminate ed alle litofacies le formazioni di Superga, di Termofourà e di Baldissero possono venire considerate come dei sedimenti di ambiente sublitorale interno. Il carattere costiero è più accentuato nelle prime due formazioni, e specialmente nella seconda. Nella parte superiore della formazione di Baldissero si avverte una evoluzione verso la sedimentazione di mare più aperto del Tortoniano. Entrambe le formazioni caratterizzate dalla facies « marne a Pteropodi », ed assai simili per litologia e contenuto paleontologico (i cosiddetti fossili caratteristici del Langhiano sono in realtà rappresentati anche nella formazione più recente) corrispondono ad una sedimentazione di mare aperto ma ancora neritica. Beets (1940) ha già indicato per quali ragioni non si possa considerare come un deposito di mare profondo l'inferiore di esse, come riteneva Sacco.

I Foraminiferi da noi esaminati nei campioni raccolti in corrispondenza delle sezioni del Rio Dora e della Valle di Vergnana, tra la base della parte superiore della formazione di Superga e la sommità di quella di Baldissero, appartengono a quattro distinte associazioni faunistiche.

La prima contraddistingue la parte superiore della formazione di Superga e le marne a Pteropodi inferiori, entrambe con contenuto micropaleontologico piuttosto scarso nelle zone dove sono stati raccolti i campioni. Essa è caratterizzata da *Catapsydrax dissimilis* e *Globigerina venezuelana*, accompagnate da altre Globigerine di incerta determinazione e da forme bentoniche (*Textulariidae*, *Miliolidae*, *Lagenidae*, *Nonionidae*, *Buliminidae*, *Rotaliidae*).

Nella formazione di Termofourà i Foraminiferi planctonici non sono praticamente rappresentati per le sfavorevoli condizioni ecologiche. Una seconda associazione faunistica caratterizza le sovrastanti marne a Pteropodi superiori e la parte inferiore della formazione di Baldissero. Il benthos vi è rappresentato da forme appartenenti alle famiglie delle *Lituolidae*, *Textulariidae*, *Verneulinidae*, *Lagenidae*, *Buliminidae*, *Cassidulinidae*, *Ellispoidinidae*, *Nonionidae*, *Discorbidae*, *Epistominidae*, di cui sono significative *Uvigerina barbatula*, *Siphonodosaria verneuili* e *Sphaeroidina bulloides*. Delle forme planctoniche sono caratteristiche *Globigerina bollii*, *Globigerinoides bispherica* e le forme descritte da Blow (1956) nella sequenza evolutiva *Globigerinoides bispherica–Orbulina suturalis*, ossia *Porticulasphaera transitoria*, *P. glomerosa curva* e *P. glomerosa glomerosa*. Citiamo inoltre *Globigerinoides sacculifera* e, fra le Globoquadrine, *G. quadraria*, *G. langhiana*, *G. dehiscens* e *G. altispira*.

Una terza associazione è stata da noi distinta nella formazione di Baldissero, per uno spessore equivalente a circa la metà della potenza complessiva, nella parte media. Il carattere più saliente è dato dalla presenza di *Orbulina suturalis*, accompagnata da *Porticulasphaera glomerosa circularis*. La comparsa del genere *Orbulina* avviene, secondo le nostre osservazioni, ad un livello un pò più elevato di quello indicato da Drooger (1954), ed è accompagnata dalla scomparsa di *Globigerina bollii* e da una diminuzione progressiva delle Porticulasphaere. Ricordiamo inoltre, fra le specie planctoniche più interessanti, *Globorotalia mayeri* e *Globoquadrina altispira*. Nel benthos prevalgono le *Lagenidae*; sono presenti inoltre *Verneuilinidae*, *Buliminidae*, *Chilostomellidae*, *Discorbidae*, *Anomalinidae*. Fra le specie bentoniche consideriamo di un certo significato stratigrafico *Siphonina reticulata*, *Sphaeroidina bulloides* e *Uvigerina barbatula*.

La quarta associazione faunistica caratterizza il quarto superiore circa della formazione di Baldissero. Vi si nota una grande abbondanza di *Globorotalia mayeri*. Il genere *Orbulina* è rappresentato anche dalla *O. universa*, oltre alla *suturalis*. Le Porticulasfere sono scomparse e la frequenza delle Globoquadrine è nettamente diminuita rispetto all'associazione precedente. Il benthos presenta una composizione in complesso analoga a quella della precedente associazione: segnaliamo la presenza di *Cibicides floridanus* e *Bolivina arta*.

Il fatto più notevole che risulta dalla distribuzione dei Foraminiferi planctonici nel Miocene torinese è che le prime forme di *Orbulina* sono precedute, accompagnate e seguite da associazioni identiche a quelle osservate da Cita e Premoli Silva (1960) nella sezione del Bricco della Croce, descritta come serie–tipo del Langhiano. In entrambe le serie la comparsa di *Orbulina suturalis* è per così dire preannunciata da forme della sequenza evolutiva *Globigerinoides–Orbulina* descritta da Blow. Pertanto si deve ritenere molto verosimile, data anche la distanza relativamente breve che separa le due serie confrontate, che questa comparsa sia stata contemporanea nelle Langhe e nella Collina di Torino, e riferire alle zone a *Globorotalia mayeri*, a *Orbulina suturalis* e a *Globigerina bollii* delle Langhe le associazioni delle parti superiore, media e inferiore rispettivamente della formazione di Baldissero, che presentano caratteri distintivi analoghi (ivi compresa la presenza dei markers di zona) a quelli delle zone tentative distinte nella sezione del Bricco della Croce.

Alla zona a *Globigerina bollii* sono riferibili anche le associazioni provenienti dalle marne a Pteropodi superiori della Collina di Torino. Ciò non significa necessariamente che il limite inferiore di questa formazione sia contemporaneo al limite inferiore della zona a *Globigerina bollii* delle Langhe (sezione Bricco della Croce). È infatti possibile che condizioni ecologiche sfavorevoli (formazione di Termofourà) abbiano ritardato la comparsa dell'associazione che caratterizza questa zona nel Miocene torinese. D'altra parte la formazione di Termofourà deve essere contemporanea in parte alla zona a *Globoquadrina dehiscens* delle Langhe, poiché le associazioni delle

sottostanti marne a Pteropodi inferiori e della formazione di Superga non sono confrontabili con quelle di questa zona, ma appartengono alla più antica zona a *Catapsydrax*.

In base a queste considerazioni e con riferimento alle unità litostratigrafiche ammettiamo pertanto che la metà superiore circa delle marne a Pteropodi delle Langhe ed i terreni della zona a *Globorotalia mayeri* che le ricoprono corrispondono cronologicamente alla formazione di Baldissero della Collina torinese e che la metà inferiore della stessa formazione deve equivalere da questo punto di vista alle marne a Pteropodi superiori ed alla formazione di Termofourà.

Sarebbe ragionevole in apparenza riferire al Langhiano le formazioni della Collina di Torino che in base a queste considerazioni risultano sincrone delle marne a Pteropodi delle Langhe, vale a dire del Langhiano della regione-tipo. In questo modo si attribuirebbe alla formazione di Baldissero un'età diversa da quella elveziana dimostrata come vedremo da tutti i caratteri faunistici, e ciò induce a prendere in considerazione la possibilità che, come aveva supposto Dépéret (1893) e come confermano le indicazioni di Trevisan sul Lessico Stratigrafico Internazionale non esista corrispondenza cronologica fra Langhiano e Burdigaliano, nel senso che il primo può corrispondere in parte all'Elveziano. Pertanto nell'interpretazione cronologica delle correlazioni locali da noi stabilite ci riferiremo all'età dei terreni della Collina di Torino anziché a quella delle formazioni delle Langhe, perché soltanto i primi sono databili in modo attendibile ed indipendente dall'età reale delle marne a Pteropodi della parte settentrionale del bacino piemontese.

In base al significato stratigrafico dei macrofossili e dei grandi Foraminiferi, alcuni Autori hanno stabilito per la Collina di Torino dei riferimenti cronologici differenti da quelli proposti da Sacco, il quale attribuiva all'Aquitaniano ed al Langhiano i terreni qui distinti con i termini di formazione di Superga e di marne a Pteropodi inferiori, ed all'Elveziano quelli compresi fra le seconde ed il Tortoniano, vale a dire le formazioni di Termofourà e di Baldissero e le marne a Pteropodi superiori. Così Schaffer (1898), Prever (1907) e più recentemente Drooger (1954) e Selli (1957) concordano nel ritenere del « Primo Piano Mediterraneo », langhiani o burdigaliani i terreni che grosso modo corrispondono alla nostra formazione di Termofourà. Dépéret (1893) riferisce invece al Burdigaliano superiore le marne a Pteropodi inferiori poiché riteneva erroneamente che gli strati fossiliferi a *Cardita jouanneti* di Baldissero, che ricoprono le marne a Pteropodi superiori, fossero intercalati fra queste e quelle inferiori. La fauna della formazione di Termofourà è caratterizzata del resto secondo Prever da forme che Dépéret considerava tipiche del Burdigaliano come *Flabellipecten burdigalensis* e *Chlamys holgeri*.

Dépéret, Prever e Schaffer consideravano burdigaliani anche i terreni che Sacco riferisce all'Aquitaniano, vale a dire la formazione di Superga, oltre che ovviamente le marne a Pteropodi inferiori. Le analogie della scarsa fauna della formazione di Superga con quella di Termofourà giustificano

apparentemente questa attribuzione, che è però contraddetta dalla mancanza di tracce di trasgressione o di lacune in corrispondenza del gradatissimo passaggio ai terreni sottostanti, sicuramente oligocenici. La questione può considerarsi attualmente chiarita grazie alle ricerche di Drooger sulle Miogypsine. La presenza accertata dall'autore olandese di *Miogypsina complanata* e *M. gunteri* nella formazione di Superga (l'ultima specie quasi alla sommità della formazione) dimostra che essa non può essere più recente dell'Aquitaniano. Le ricerche dello stesso autore confermano invece l'età burdigaliana della formazione di Termofourà (*Miogypsina intermedia* alla sommità, *M. irregularis* nelle parti superiore e media, *M. burdigalensis* nella parte inferiore). Non si possono essere dubbi su questa attribuzione cronologica: *M. irregularis* è infatti presente negli orizzonti fossiliferi di Termofourà a *Cardium burdigalinum*, forma questa considerata anche attualmente (Mongin 1958) esclusiva del Burdigaliano. È interessante far notare che dalle ricerche di Drooger (1954, 1958) risulta che *Miogypsina burdigalensis*, che nel bacino di Bordeaux è una forma immigrata e rappresentata alla base del Burdigaliano-tipo, è originaria da quello piemontese. Esiste perciò la possibilità che non soltanto le marne a Pteropodi inferiori in cui questa forma non è ancora comparsa (le forme intermedie tra *M. socini* e *M. burdigalensis* sono state rinvenute da Drooger in corrispondenza del limite inferiore della formazione di Termofourà), ma anche la parte inferiore della formazione di Termofourà possa essere aquitaniana. In ogni caso lo sono le marne a Pteropodi, anche se come osservava Selli (1957) – non è forse dimostrato che la *Miogypsina socini* che la contraddistingue sia sincrona della *M. tani*, della parte superiore dell'Aquitaniano-tipo.

Per gli altri terreni della Collina torinese gli Autori concordano nel ritenere elveziani, o comunque post-burdigaliani quelli che corrispondono alle marne a Pteropodi superiori ed alla parte media e inferiore della formazione di Baldissero. Secondo Prever la parte superiore della formazione Baldissero è correlabile, come aveva già supposto Mayer, con il Tortoniano-tipo; Drooger, Papp e Socin (1958) invece considerano tortoniani tutti gli strati contraddistinti dalla presenza delle Orbuline in base all'ipotesi che la comparsa di questo genere è ovunque posteriore al deposito dell'Elveziano-tipo di Imihubel.

La seconda attribuzione non ha lo stesso significato della prima poiché Drooger e collaboratori non hanno inteso affermare che si tratti di terreni contemporanei del Tortoniano-tipo di Stazzano e di Sant'Agata. Dalle nostre osservazioni risulta che la formazione di Baldissero è certamente più antica del Tortoniano-tipo anche nella sua parte superiore, correlabile come si è visto con la zona a *Globorotalia mayeri*, vale a dire con la parte inferiore di una formazione di cui quella di Stazzano ricopre il prolungamento in Valle Scrivia.

Nelle marne a Pteropodi superiori non sono stati segnalati fossili di valore stratigrafico che ne documentino l'età elveziana o più antica. Nonostante il parere degli Autori, è verosimile che esse siano burdigaliane per uno spessore non definibile, poiché la *Miogypsina intermedia*, ancora pre-

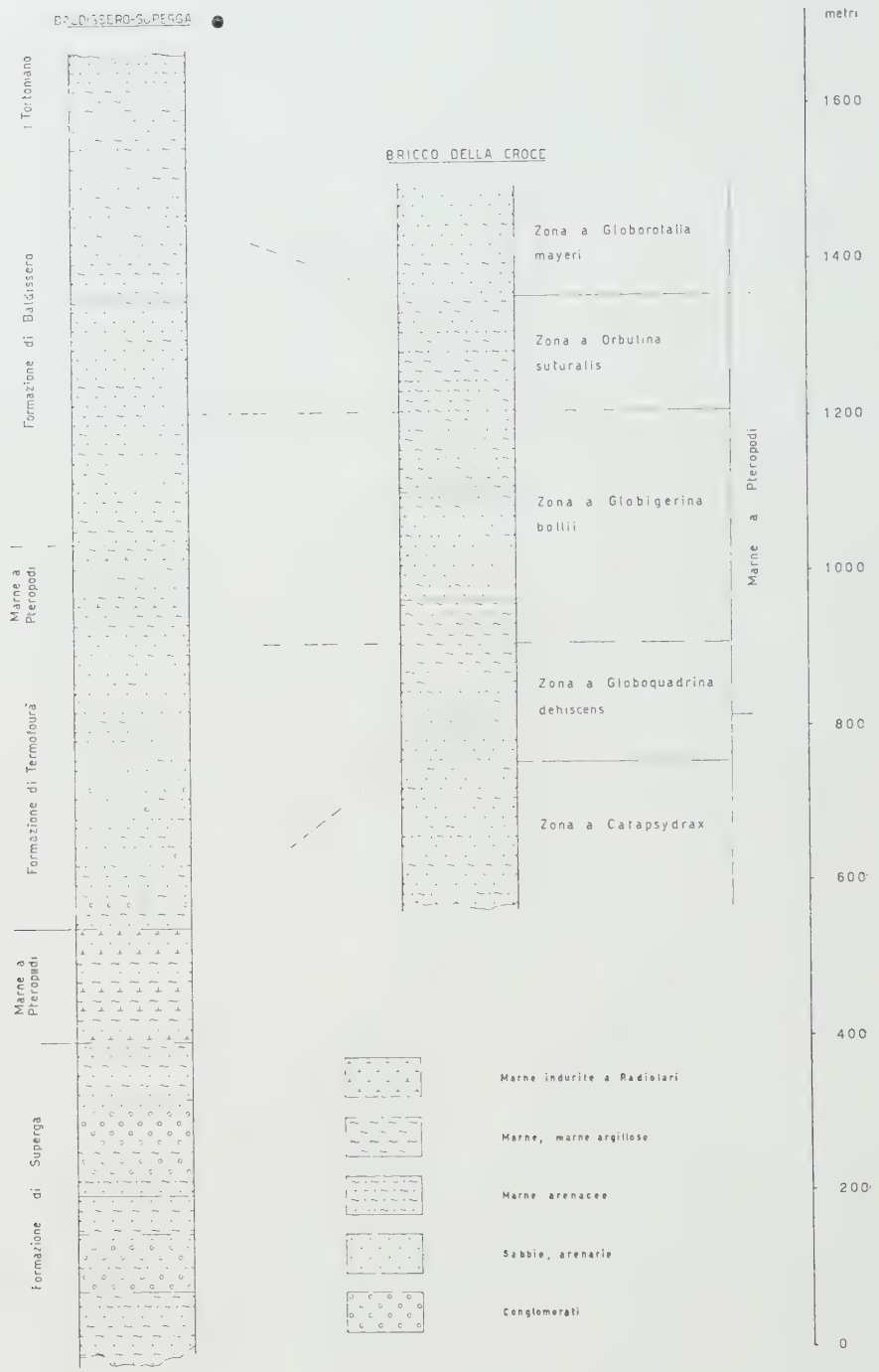


Fig. 1. – Schema stratigrafico del Miocene inferiore e medio delle Langhe (Bricco della Croce) e della Collina di Torino (Baldissero–Superga).

elveziana secondo Drooger, è stata rinvenuta da questo autore solo in corrispondenza della sommità della formazione di Termofourà e praticamente al suo limite con le marne a Pteropodi superiori. La presenza di *Globoquadrina langhiana* e *G. quadraria* da noi riscontrata nella parte inferiore di queste marne, ed il fatto che esse vengano sostituite da forme più recenti quali *G. altispira* nella loro parte superiore, induce a considerare elveziana quest'ultima soltanto.

La parte inferiore della formazione di Baldissero è comunque elveziana. Risulta infatti da tutti i dati conosciuti che la ricchissima fauna che la caratterizza è contraddistinta dalla grande abbondanza di *Ancillaria glandiformis*, dalla frequenza di *Cardita jouanneti* (forma tipica e varietà *brocchii*) e di *Pecten subarcuatus* e dalla scomparsa delle forme preelveziane della fauna di Termofourà. Si aggiunge a questo che le Miogipsine più recenti (non determinate specificamente) provengono secondo Prever da questo orizzonte, e che le forme da noi identificate *Globoquadrina altispira*, *Globorotalia fohsi barisanensis*, *Sphaeroidina bulloides* si accordano con l'età elveziana indicata dai macrofossili.

La formazione di Baldissero risulta in tal modo post–burdigaliana nella sua parte più antica e pre–tortoniana in quella più recente. Essa è pertanto interamente riferibile all'Elveziano, nel senso che si tratta di terreni compresi fra il Burdigaliano ed il Tortoniano–tipo di Stazzano. Che la parte inferiore soltanto corrisponda, insieme con una parte delle marne a Pteropodi sottostanti, all'Elveziano–tipo come hanno supposto Drooger, Papp e Socin è possibile. La validità di questa ipotesi – che non siamo in grado di verificare – non è però a nostro avviso una ragione sufficiente per attribuire al Tortoniano terreni più antichi della formazione di Stazzano e Sant'Agata, poiché si verrebbe così a rinunciare ad un ottimo orizzonte di riferimento conservando invece quello dell'Elveziano di Imihubel, che è pessimo per i riferimenti micropaleontologici.

In conclusione si devono considerare riferibili all'Elveziano, nella Collina di Torino, la formazione di Baldissero e probabilmente la parte più recente delle marne a Pteropodi superiori; al Burdigaliano la parte più antica di queste ultime e la formazione di Termofourà, nella parte essenziale almeno; all'Aquitaniano le marne a Pteropodi inferiori e la parte superiore della formazione di Superga.

Ciò permette, in base alle correlazioni da noi stabilite (vedi fig. 1), di attribuire all'Elveziano la metà superiore almeno della marne a Pteropodi delle Langhe ed i terreni contraddistinti dalla zona a *Globorotalia mayeri* che le ricoprono. Pertanto solo la metà inferiore di questa formazione, da cui si devono inoltre sottrarre quelle parti a cui corrisponde nella Collina di Torino la porzione elveziana delle marne a Pteropodi superiori può essere considerata di età burdigaliana.

Le considerazioni che precedono ci hanno portato alla constatazione che l'unità geocronologica indicata da Mayer con il termine di Langhiano

non corrisponde a quella cronostratigrafica corrispondente, rappresentata nella sua regione–tipo dalle marne a Pteropodi delle Langhe secondo la definizione dello stesso autore. Ciò era già stato chiaramente indicato da Trevisan nel Lessico Stratigrafico (vol. II, fasc. 11), là dove si avverte che il Langhiano può corrispondere in parte all'Elveziano inferiore; ma è fuor di dubbio che il termine è stato più frequentemente inteso nella letteratura geologica italiana come sinonimo ed equivalente del Burdigaliano.

Indipendentemente da questo, le attribuzioni al Langhiano effettuate in base a correlazioni dirette o indirette con le marne a Pteropoli delle Langhe non possono avere lo stesso valore cronologico di quelle che sono state stabilite talvolta mediante confronti con il Burdigaliano. È quindi indispensabile che questo termine – se non verrà abbandonato – sia inteso in uno solo dei due modi possibili: come sinonimo del Burdigaliano o per indicare la durata di formazione delle marne a Pteropodi delle Langhe.

Nel primo caso sarebbe a parere nostro più ragionevole sostituirlo definitivamente con quello di Burdigaliano. Se non si adotta questa soluzione, è necessario che venga scelta una formazione–tipo italiana che corrisponda esattamente dal punto di vista cronologico a quella che definisce il Burdigaliano. La parte inferiore delle marne a Pteropodi delle Langhe si presterebbe bene per questo scopo.

Attribuire al Langhiano i terreni coevi delle marne a Pteropodi delle Langhe significa a nostro avviso introdurre una nuova classificazione del Miocene medio ed inferiore italiano. Non è infatti possibile indicare come elveziani i terreni compresi fra le marne a Pteropodi ed il Tortoniano perché essi rappresentano soltanto una parte di questa unità geocronologica e sarebbero addirittura più recenti dell'Elveziano della regione–tipo secondo Drooger, Papp e Socin. Il termine di Elveziano dovrebbe quindi venire abbandonato in Italia e potrebbe essere sostituito a nostro giudizio dal Serravalliano, termine con cui Pareto indicava i terreni compresi tra le marne a Pteropodi delle Langhe ed il Tortoniano di Tortona. Ci si deve chiedere tuttavia se una suddivisione del Miocene italiano in Aquitaniano, Langhiano, Serravalliano, Tortoniano e Messiniano possa venire adottato nella nostra epoca, in cui si tende sempre più a semplificare e ad unificare la terminologia stratigrafica internazionale.

Opere citate.

Beets C. (1940), *Die Geologie des Westlichen Teiles der Berge von Monferrato zwischen Turin und Murisengo*, « Leid, Geol. Meded. », *12*, 156–250, 3 tt., 16 ff.

Blow W. H. (1956), *Origin and evolution of the foraminiferal genus Orbulina d'Orbigny*, « Microp. », *2*, 57–60, 4 ff.

Cita M. B. e Premoli Silva I. (1960), *Pelagic Foraminifera from the type Langhian*, « Report 25 Sess. Int. Geol. Congr. », *22*, pp. 39–50, 2 ff.

Dépéret M. (1893), *Sur la classification et le parallelisme du système miocène*, « Bull. Soc. Géol. Fr. », ser. 3, *21*, 170–266.

Drooger C. W. (1954), *Miogypsina in Northern Italy*, « Proc. Konin. Ned. Ak. », ser. B, *57*, 227–248, 2 tt., 5 ff.

Drooger C. W. (1956), *Transatlantic correlation of the Oligo–Miocene by means of foraminifera*, «Microp.», *2*, 183–189, 1 f., 1 t.

Drooger C. W., Papp A. e Socin C. (1957), *Ueber die Grenze Zwischen die helvetische und die tortonische Stufe*, « Öst. Ak. Wiss. Anz.», *1*, 10 pp.

Lexique Stratigraphique International, Vol. I: *Europe*; Fasc. 11: *Italia*, Paris 1956.

Mayer Ch. (1868), *Tableau synchronostique des terrains tertiaires supérieurs*, 1 foglio autogr., Zurigo.

Mayer Ch. (1877), *Sur la Carte géologique de la Ligurie centrale*, « Bull. Soc. Géol. Fr. », ser. 6, *5*, 282–297.

Mongin D. (1958), *Variations de faciès et des faunes dans le Burdigalien de Basse Provence*, C. R. Congrès Soc. Sav. Aix et Marseille (Coll. Miocene), 219–229.

Pareto L. (1865), *Note sur les subdivisions que l'on pourrait établir dans les terrains tertiaires de l'Apennin septentrional*, « Bull. Soc. Géol. Fr. », ser. 2, *22*, 210–277.

Prever P. L. (1907), *Aperçu géologique sur la Colline de Turin*, «Mém. Soc. Géol. Fr. », ser. 4, *1*. 48 pp., 1 t., 7 ff.

Sacco F. (1887), *Classification des terrains tertiaires conforme à leur faciès*, «Mém. Soc. Belg. Géol. », *1*, 276–294, t. 9.

Sacco F. (1889), *Il Bacino terziario e quaternario del Piemonte*, Milano.

Schaffer F. (1898), *Beiträge zur Parallelisirung der Miocänbildungen des piemontesischen Tertiärs mit denen des Wiener Beckens*, « Jahrb. k. k. geol. Reichsanst », *48*, 390–424.

Selli R. (1955), *Sulla trasgressione del Miocene nell'Italia meridionale*, « Giorn. di Geol. », ser. 2, *2*, 1–54, 9 tt.

Geologia. — *Distribuzione dell'uranio in alcuni calcari metamorfici di contatto presso Campiglia* (*). Nota di Antonio Longinelli, presentata (**) dal Corrisp. L. Trevisan.

Il nucleo mesozoico di Campiglia Marittima (Livorno) è stato fino ad ora oggetto di numerosi studi di carattere geologico e mineralogico–petrografico (Rodolico 1931, Dorn 1942, Rodolico 1943–45, Stella 1955, Giannini 1955, Bertolani 1958, ecc.).

La zona è ampiamente interessata da vari fenomeni, intrusioni filoniane e mineralizzazioni di vario tipo ed entità, collegabili tutti ai fatti endogeni che hanno determinato un'intrusione granitica affiorante, per una superficie molto modesta, nella valle detta Botro ai Marmi, in località Campo alle Buche.

Nella zona si trovano, su di un'area piuttosto vasta, formazioni calcaree di diversa età ed aspetto. Una di queste, attribuita al piano più basso del Lias (Hettangiano) è costituita da un calcare massiccio assai puro ed è interessata, come del resto varie altre, da un intenso termometamorfismo che ha determinato una completa ricristallizzazione del calcare portando ad una struttura saccaroide caratteristica. La grana dei marmi è variabilissima, ma normalmente è molto più grossa in vicinanza dell'intrusione e diventa sempre più minuta col progressivo allontanamento dalla medesima.

Al contatto tra il granito e il calcare si nota una fascia di piccola potenza, con formazione di minerali silicatici associati al marmo, tra i quali diopside, tremolite, vesuviana ecc.

Un apporto per via pneumatolitica di elementi provenienti dal magma intruso, nella fase del suo degassamento, potrebbe però aver interessato il calcare incassante fino a distanze molto maggiori.

Anche se non ci possiamo aspettare fenomeni di quell'entità che si potrebbe avere nel caso di gas e soluzioni che abbiano seguito la via di fratture, lo studio di una eventuale diffusione attraverso rocce compatte ha il vantaggio di poter fornire utili indicazioni sull'effettivo potere di penetrazione dei gas magmatici in tali rocce, durante la loro ricristallizzazione per termometamorfismo.

Fra gli elementi pneumatofili che potrebbero aver interessato la massa incassante in un processo di questo tipo, l'uranio si presta facilmente ad essere rivelato, anche se presente in tracce minime. Inoltre si può anche, senza alcuna difficoltà, studiarne la localizzazione nelle rocce metamorfosate dal magma. A questo scopo è particolarmente utile la tecnica delle lastre

(*) C.N.E.N. Lavoro eseguito presso il Laboratorio di Geologia Nucleare dell'Università – Via S. Maria, 31 – Pisa.

(**) Nella seduta del 19 novembre 1960.

nucleari (Picciotto 1949), che, se pur lenta e laboriosa, consente di mettere in evidenza anche concentrazioni bassissime di elementi radioattivi (Deutsch *et al.* 1958) distinguendo, se necessario, quelle dei diversi minerali e localizzando gli eventuali centri attivi.

Per la presente ricerca sono state utilizzate lastre nucleari del tipo Ilford C2, di 50 μ di spessore esposte su sezioni lucide e sottili, ed emulsione *in gel form* dello stesso tipo, colata direttamente sulle sezioni sottili. In previsione di contenuti assai bassi in uranio, sono state prese tutte le precauzioni per evitare inquinamenti od errori sistematici di conteggio, ed è stata pure controllata l'assenza di *fading*. Per ogni gruppo di sezioni esposte, all'inizio ed alla fine dell'esposizione stessa, è stato misurato il « fondo » delle lastre nucleari usate (numero delle tracce alfa determinate principalmente dalla radioattività dell'aria) ed i risultati finali hanno subìto le relative correzioni. Le superfici esaminate sono di almeno 3–4 cm^2 per ogni campione.

A questa tecnica può essere vantaggiosamente accoppiata quella della determinazione fluorimetrica dell'uranio che, oltre a permettere un più rapido esame di un maggior numero di campioni, può servire per una conferma dei risultati ottenuti con le lastre nucleari. In questo caso la tecnica seguìta è stata quella dell'estrazione dell'uranio con acetato di etile da una soluzione nitrica del campione (F. S. Grimaldi and H. Levine, 1954) e della sua misura fluorimetrica.

I campioni studiati sono stati prelevati a distanze diverse dal granito. Il n. 139 nella zona di contatto, nelle immediate vicinanze della massa granitica, gli altri a distanze progressivamente crescenti, da qualche decina fino a 1500 metri circa.

Il campione n. 139 è costituito prevalentemente da pirosseno e plagioclasio basico di composizione variabile, in media di tipo labradoritico. Il pirosseno, abbastanza uniformemente diffuso, è incoloro o appena verdognolo e risulta essere di tipo diopsidico non molto ferrifero. È presente anche l'ortoclasio del quale non è stata misurata l'attività specifica in considerazione delle superfici estremamente ridotte. Fra i minerali accessori compaiono ortite, apatite, titanite, magnetite e zircone. Quest'ultimo si osserva solo in rarissimi minuti cristalletti che, per le dimensioni troppo ridotte, non si prestano a determinazioni di attività specifica. Abbastanza frequenti plaghe di calcite ricristallizzata. È da rilevare che l'ortite, minerale il più attivo fra quelli presi in esame nel corso di questo studio, è presente nel campione n. 139 con una percentuale in volume dello 0,2 %.

I campioni nn. 143, 137, 132, 131, 130, 128 e 123, sono composti esclusivamente di calcite, a grana variabile, e generalmente molto pura. Si rilevano di tanto in tanto piccole impurità, nella maggior parte dei casi non determinabili. Si può osservare talvolta qualche esilissima laminetta di muscovite.

I risultati ottenuti sono riportati nella Tabella I. Oltre alle attività specifiche dei singoli campioni, sono indicati i contenuti in uranio calcolati in base alle attività medesime, nell'ipotesi che sia assente torio, ed i contenuti in uranio determinati fluorimetricamente.

TABELLA I.

Campioni-Minerali	Distanza approssimativa dal contatto in m	$\alpha \cdot 10^{-5}/cm^2 \cdot s$	C_U in $grU \cdot 10^{-6}/gr$ (Th=0)	C_U in $grU \cdot 10^{-6}/gr$ (fluorimetrico)
139 – Calcite		12,12	0,92	2,64
– Plagioclasio		8,02	0,61	
– Pirosseno		17,31	1,13	
– Titanite		$46,02 \cdot 10^2$	$3,24 \cdot 10^2$	
– Apatite		$9,39 \cdot 10^2$	$0,66 \cdot 10^2$	
– Ortite		$78,03 \cdot 10^2$	$4,92 \cdot 10^2$	
– Magnetite		—	—	—
143 – Calcite	50	$14,18 \pm 0,51$	$1,08 \pm 0,04$	0,88
137 – Calcite	130	$13,03 \pm 0,49$	$1,00 \pm 0,04$	0,80
132 – Calcite	300	$11,11 \pm 0,43$	$0,85 \pm 0,03$	0,60
131 – Calcite	550	$5,12 \pm 0,31$	$0,39 \pm 0,02$	0,38
128 – Calcite	750	$0,81 \pm 0,11$	$0,06 \pm 0,01$	0,08
130 – Calcite	1200	$1,85 \pm 0,18$	$0,14 \pm 0,01$	0,22
123 – Calcite	1500	$1,69 \pm 0,16$	$0,13 \pm 0,01$	0,22
141 – Calcite	7000	$2,16 \pm 0,20$	$0,16 \pm 0,01$	0,25

I valori esposti si possono considerare in buon accordo. Le differenze relative ai campioni nn. 143, 137 e 132 si possono attribuire, oltre che all'errore di ogni misura, al fatto che il calcolo dei contenuti in uranio in base all'attività α è stato eseguito nell'ipotesi che il torio sia assente, mentre esigue tracce di tale elemento possono essere presenti nel calcare.

Il primo rilievo che si può muovere osservando la tabella è che si ha a che fare con contenuti in uranio estremamente bassi, specialmente per quanto riguarda i campioni nn. 123, 128, 130 e 141 prelevati alle maggiori distanze dal granito. I primi tre provengono da una zona compresa ancora nel raggio di azione dell'intrusione risultando tutti ricristallizzati, il quarto è stato raccolto presso il paese di Sassetta, ad una distanza di circa 7 km dall'affioramento granitico e rappresenta il tipo dei calcari hettangiani non metamorfici della zona. Questi campioni mostrano attività dello stesso ordine di grandezza, corrispondenti a contenuti in uranio oscillanti intorno a 0,1 ppm, valore considerevolmente basso in confronto a quelli più comunemente ottenuti da rocce calcaree. Per i calcari hettangiani e per altri calcari mesozoici della Toscana tali valori non sono eccezionali come risulta da una serie di misure di confronto effettuate con lastre nucleari e con determinazioni fluorimetriche su vari calcari bianchi e grigi, tutti non metamor-

fosati, provenienti da località diverse. I valori dei contenuti in uranio si sono dimostrati in tutti i casi dello stesso ordine di grandezza e variabili entro limiti piuttosto ristretti; i valori inferiore e superiore sono risultati rispettivamente di circa 0,1 e 0,3 ppm. Si deve notare che di solito i valori inferiori si riferiscono a calcari hettangiani mentre quelli maggiori sono stati forniti da calcari retici.

Ciò prova in sostanza un bassissimo contenuto originario in uranio di tali rocce ed in particolare delle formazioni interessate nel Campigliese dall'azione termometamorfica. Di conseguenza i campioni nn. 131, 132, 137 e 143, pur risultando anch'essi assai poveri di uranio mostrano contenuti che denotano un arricchimento dovuto alla vicinanza del granito intruso, tanto più che i valori risultano crescenti al diminuire della distanza dal contatto. Si deve comunque tener presente che le differenze di attività (e quindi di contenuti in uranio) fra i vari campioni sono, se pur di piccola entità, decisamente superiori al possibile errore commesso nel conteggio delle particelle α. Gli errori possibili, calcolati in base al numero totale delle tracce α utili sono riportati nella Tabella I e mostrano che la variazione è assolutamente al di fuori di tale errore. Ciò senza tener conto del fatto che, proprio in considerazione delle basse attività riscontrate, l'osservazione microscopica ed i conteggi, come già accennato, sono stati eseguiti con eccezionale cura, cosa che, con ogni probabilità, ha limitato l'errore a valori ancora inferiori rispetto a quelli calcolati.

Si deve anche rilevare che, mentre nei campioni più attivi l'uranio risulta chiaramente localizzato in centri, dai quali provengono gran parte delle particelle α, negli altri campioni il numero e l'attività dei centri va rapidamente decrescendo e si riscontra un'attività α costituita generalmente da singole tracce distribuite con una certa uniformità. Per avere una idea della variazione del numero e dell'attività dei centri si riportano di seguito i valori percentuali dell'attività dovuta ai centri, riferita all'attività totale.

Numero del campione	Attività α proveniente da centri
143	70,0 %
137	52,4 %
132	29,4 %
131	21,2 %

Gli istogrammi della fig. 1 mostrano graficamente la variazione del numero e dell'attività dei centri, rappresentata quest'ultima dal numero di particelle α emesse in circa due mesi.

Se con i risultati ottenuti si costruisce un grafico (fig. 2) riportando in ascissa le distanze in metri dei singoli campioni dal contatto col granito ed in ordinata i contenuti in uranio, si può, in base ai punti ottenuti, tracciare una curva indicativa che dovrebbe rappresentare la diffusione nelle rocce calcaree incassanti dell'uranio proveniente dal magma. La curva proposta

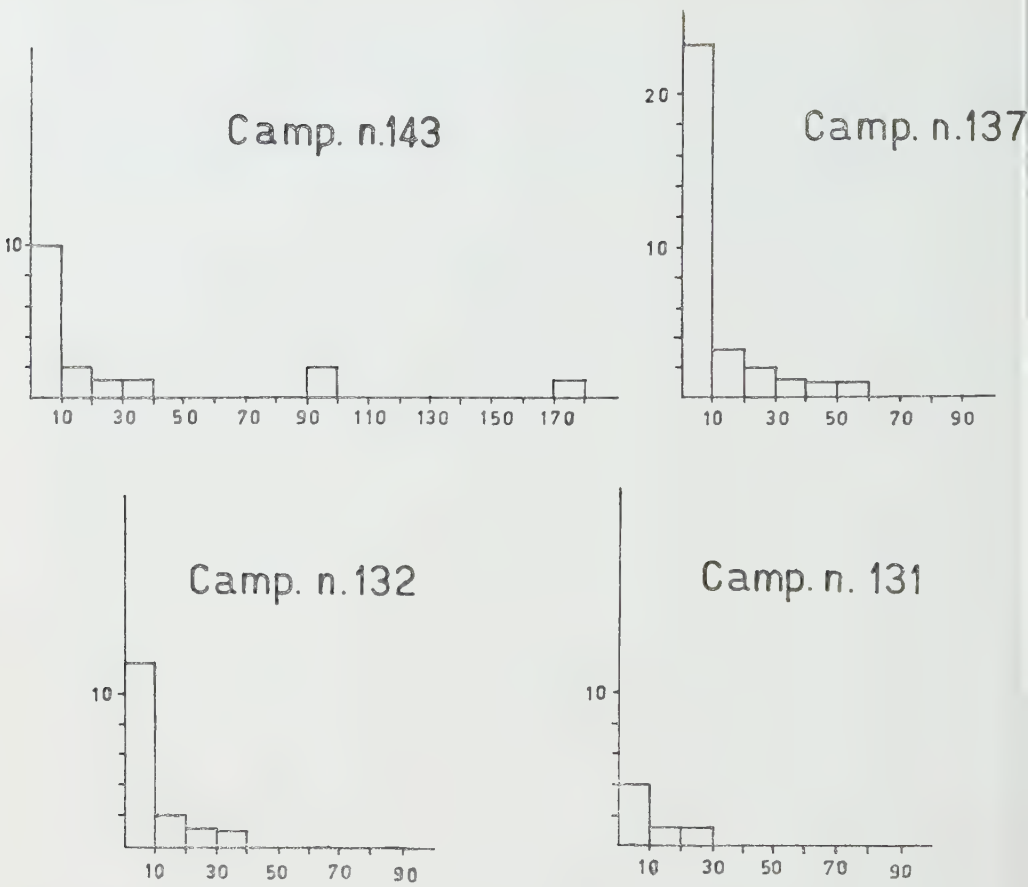


Fig. 1. – In ascissa sono riportati i centri attivi osservati su un centimetro quadrato di superficie, divisi per classi di attività, di dieci in dieci α. In ordinata è riportato il numero di centri per ogni singola classe.

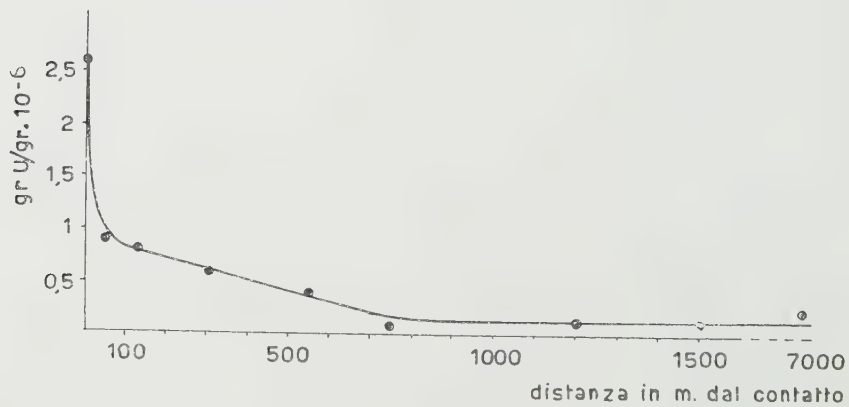


Fig. 2. – Variazione del contenuto in uranio nei vari campioni.

tiene conto delle attività totali dei campioni studiati e la forma della prima parte di tale curva, che cade bruscamente dal primo al secondo campione, è dovuta proprio a questo fatto. Se invece si tiene conto solamente dell'attività della calcite, la curva parte da un punto poco al disotto dell'ordinata che indica la concentrazione di 1 ppm. In base ad essa si può dire che la diffusione dell'uranio si è fatta risentire fino ad una distanza di 700 metri circa dal contatto, durante la fase di ricristallizzazione del calcare per termometamorfismo. La quantità di uranio che ha potuto penetrare nella massa calcarea è estremamente bassa ma si deve tener conto del fatto che la maggior parte dei gas pneumatolitici ha seguito a Campiglia altre vie, interessando in modo assai limitato le rocce incassanti prossime all'affioramento granitico.

TABELLA II.

Numero del campione	Distanze in metri dal contatto	Conc. uranio in grU/gr
414	0,30	$0,11 \cdot 10^{-6}$
415	0,70	$0,11 \cdot 10^{-6}$
416	1,10	$0,11 \cdot 10^{-6}$
417	1,50	$0,07 \cdot 10^{-6}$
418	2,20	$0,17 \cdot 10^{-6}$
419	2,50	$0,16 \cdot 10^{-6}$
420	3,00	$1,52 \cdot 10^{-6}$
421	3,50	$0,11 \cdot 10^{-6}$
422	4,00	$0,07 \cdot 10^{-6}$
423	4,50	$0,31 \cdot 10^{-6}$
424	5,00	$0,07 \cdot 10^{-6}$
425	6,00	$0,06 \cdot 10^{-6}$
426	8,00	$0,11 \cdot 10^{-6}$
427	10,00	$0,16 \cdot 10^{-6}$
428	12,00	$0,14 \cdot 10^{-6}$
429	16,00	$0,07 \cdot 10^{-6}$
430	20,00	$0,07 \cdot 10^{-6}$
431	25,00	$0,14 \cdot 10^{-6}$
432	30,00	$0,10 \cdot 10^{-6}$

Uno studio complementare è stato eseguito in una zona non molto distante (S. Carlo Solvay) dove una serie di calcari hettangiani è interessata da intrusioni filoniane connesse con la manifestazione magmatica che ha determinato le osservazioni precedenti.

Perpendicolarmente ad uno di tali filoni è stata prelevata, nei calcari incassanti, una serie di campioni a distanze crescenti dal contatto. In tali campioni l'uranio è stato determinato fluorimetricamente ed i risultati sono riportati nella Tabella II.

Da tali dati è evidente che il calcare non è stato minimamente interessato da apporti di uranio del filone che lo attraversa e che pure è di dimensioni notevoli, avendo un diametro di circa quattro metri. I valori delle concentrazioni risultano infatti generalmente bassissimi e comunque distribuiti senza alcun ordine. Si deve tener presente che gli strati di calcare sono fortemente raddrizzati, toccando quasi la verticale e che il passaggio da un campione ad un altro implica spesso il passaggio da uno strato ad un altro. Il fatto che non si sia verificato alcun apporto di uranio da parte di un grosso filone, neppure nelle prime decine di centimetri ad immediato contatto, è conferma e conseguenza della povertà in gas mineralizzanti che non ha consentito neppure al nucleo maggiore dell'intrusione di esplicare una azione di notevole intensità sulle masse incassanti.

Opere citate.

Bertolani M., *Osservazioni sulle mineralizzazioni metallifere del Campigliese (Livorno)*, « Per. di Min. », vol. 27, p. 311 (1958).

Deutsch S., Picciotto E., Houtermans F. G., *Alpha radioactivity of iron meteorites*, « Geoch. et Cosm. Acta », vol. 14, p. 173 (1958).

Dorn P., *Studien über die Geologie und die Minerallagerstätten von Campiglia Marittima in Toskana*, « Z. deutsch. geol. Gesell. », vol. 94, p. 19 (1942).

Giannini E., *Geologia dei Monti di Campiglia Marittima (Livorno)*, « Boll. Soc. geol. Ital. », vol. 54, p. 219 (1955).

Grimaldi F. S., Levine H., *The visual fluorimetric determination of uranium in low-grade ores*, « U. S. Geological Surv. Bull. », vol. 1006, p. 43 (1954).

Picciotto E., *L'étude de la radioactivité des roches par la méthode photographique*, « Bull. Soc. belge Géol. Pal. Hydrol. », vol. 58, p. 75 (1949).

Rodolico F., *Ricerche sulle rocce eruttive recenti della Toscana. Le rocce del Campigliese*, « Mem. Soc. tosc. Sc. Nat. », vol. 41, p. 197 (1931).

Rodolico F., *Ragguagli sul granito del Campigliese*, « Mem. Soc. tosc. Sc. Nat. », vol. 52, p. 125 (1943–45).

Stella A., *La miniera di stagno di M. Valerio e i giacimenti del Campigliese nel quadro della Catena metallifera toscana*, « Boll. Soc. geol. Ital. », vol. 54, p. 109 (1955).

Geologia. — *Appunti sulle conoscenze attuali della stratigrafia neogenica toscana* (*). Nota di MARCO TONGIORGI, presentata (**) dal Corrisp. L. TREVISAN.

Lo studio del Neoautoctono toscano è ancora in fase di sviluppo: in particolare si presenta ancora l'esigenza di una datazione precisa dei vari termini che compongono la serie neogenica.

I vecchi Autori avevano descritto numerose serie locali, confondendo però spesso termini diversi: nella Toscana meridionale le correlazioni sono state ancor più complicate dalla presenza di vasti sistemi di terrazzi, i cui sedimenti venivano di volta in volta attribuiti ai livelli più diversi della serie neogenica.

L'unico livello, tra quelli basali allora noti della serie neoautoctona, che contenesse una ricca fauna marina, era quello del « Calcare di Rosignano »; in particolare le arenarie e le marne, eteropiche col Calcare di Rosignano sui Monti Livornesi, hanno dato una ricca fauna studiata dai vecchi Autori. Tra questi, uno dei più autorevoli, il Trentanove, concluse per una età tortoniana di tutto il livello studiato, riferendosi in particolare ai giacimenti di Popogna, Cafaggio e Quarata [1–2].

Una prima serie completa si ebbe solo con il lavoro di L. Trevisan [4], sulla Val di Cecina; egli accettò la datazione del Trentanove, senza per altro affrontare un esame critico del suo lavoro, ed in conseguenza datò tutta la serie miocenica, riferendosi al livello del Calcare di Rosignano, come livello guida.

Altro livello guida importantissimo veniva considerata la formazione gessifera. La serie schematizzata è la seguente, dal basso verso l'alto:

1) argille lignitifere lacustri;
2) conglomerati e argille del Tortoniano;
3) conglomerati, gessi e argille del Sarmaziano;
4) argille del Piacenziano;
5) sabbie gialle dell'Astiano e calcari ad *Amphystegina*.

L. Trevisan mise inoltre in evidenza l'importanza dei depositi lacustri lignitiferi, che venivano messi in relazione con la stessa tettonica rigida di sprofondamento, che avrebbe determinato poi la trasgressione marina. Tali sedimenti quindi venivano considerati in un certo senso come primi indizi della trasgressione incipiente. La loro posizione sotto i livelli marini tortoniani ed il fatto di essere collegati allo stesso fenomeno che ha determinato la trasgressione, ne rendeva certa la datazione al Tortoniano inferiore, o ad un momento comunque di poco precedente.

Esistevano tuttavia notevoli discrepanze con le datazioni della serie lignitifera, proposte da Autori come il Lotti, il Novarese, il Capellini ed altri, i quali tutti accettavano un'età delle ligniti assai più recente. Avendo ormai L. Trevisan individuato fuori di ogni dubbio la serie stratigrafica, ne risul-

(*) Lavoro eseguito presso l'Istituto di Geologia e Paleontologia dell'Università di Pisa.
(**) Nella seduta del 19 novembre 1960.

tava secondo le datazioni dei vecchi Autori, che depositi considerati da loro come pontici, sarmaziani e, talora, ancora più recenti, venivano ad essere certamente sormontati da livelli marini, da loro stessi datati come tortoniani o, addirittura, elveziani!

Recentemente quindi sono stati ripresi in esame i fossili dei famosi giacimenti di Popogna–Cafaggio e Quarata e di altri nuovi giacimenti, scoperti negli ultimi anni. Il riesame di questi fossili non è ancora terminato, comunque già G. Ruggieri ha osservato che un caso tipico è « costituito dal così detto Tortoniano dei Monti di Livorno, celebre per gli affioramenti fossiliferi di Popogna–Cafaggio e Quarata. Basta la semplice lettura degli elenchi di macrofossili di queste località già pubblicato per accorgersi che si tratta invece di Messiniano inf., constatazione che porta con sé l'altra che il Miocene medio (Elveziano–Tortoniano) è del tutto assente in Toscana » [5].

Il Ruggieri stesso osserva: « Nella Val di Cecina, poi, ed in Maremma, abbiamo una serie che è stata di recente egregiamente schematizzata da Trevisan. La serie miocenica è trasgressiva sulle argille scagliose; inizia con livelli lignitiferi, cui si sovrappongono arenarie e conglomerati, indi argille azzurre fossilifere ed infine i gessi. Già nel mio lavoro sul Messiniano di S. Marino ebbi a far notare l'analogia di questa successione di facies con quella del Messiniano inferiore della Romagna. Sebbene manchi una documentazione paleontologica, una volta constatata l'età messiniana inferiore dei lembi dei Monti Livornesi, la correlazione di questa serie della Val di Cecina con il Messiniano inferiore della Romagna può considerarsi pienamente accettabile ».

Bisogna poi aggiungere che recenti studi [3, 6, 8] hanno rivelato l'esistenza in Maremma di numerosi lembi di arenarie giacenti in discordanza sulle argille scagliose e presentanti fra loro analogie tali da far pensare si tratti dei resti di un'unica formazione. In uno di questi lembi, affiorante presso Manciano, in provincia di Grosseto (Arenaria a Scutelle), sono stati ritrovati fossili di indubbia età burdigaliana. Questi fatti potrebbero far pensare ad una prima invasione marina, correlabile alla trasgressione burdigaliana di molte altre zone del Mediterraneo.

Ultimamente poi è stata rinvenuta un'altra arenaria, la così detta « Arenaria di Ponsano », ad est di Volterra, la quale, in base ai fossili rinvenuti, e per la sua posizione stratigrafica, risulta attribuibile all'Elveziano. La sua parte alta raggiunge forse il Tortoniano inferiore. L'Arenaria di Ponzano si presenta del tutto identica alla già nota e discussa Arenaria della Verna (Elveziano in facies « francescana »), che nel quadro delle nuove scoperte viene ad acquistare un nuovo e più importante significato. Al di sotto delle arenarie « francescane » erano già conosciuti anche terreni burdigaliani, rappresentati alla Verna dai « Calcari a Briozoi ».

In base a quanto sopra detto, ritornando sulle opinioni espresse dal Ruggieri, possiamo concludere che solo il Tortoniano medio–superiore è sicuramente assente in Toscana.

Come si vede dunque, ben prima del Tortoniano ha avuto inizio la deposizione dei terreni neoautoctoni toscani.

Possiamo infatti così riassumere l'andamento generale dei cicli sedimentari susseguitisi in Toscana dopo la fase orogenetica parossismale:

a) Una prima fase trasgressiva con conseguente deposito di materiali arenacei si ebbe nel basso e medio Miocene (Arenarie a Scutella del Burdigaliano, cui sono da aggiungere i calcari detritici a Briozoi della Verna, l'Arenaria elveziana di Ponzano).

b) A questa trasgressione è seguita una regressione, legata ad una fase tettonica che ha determinato nel Tortoniano una interruzione nella sedimentazione marina ed una erosione quasi totale dei sedimenti appena deposti [8]. Questa fase tettonica è documentata dalla discordanza evidente tra i depositi elveziani e le formazioni sovrastanti. Tra questi complessi esiste una lacuna stratigrafica comprendente buona parte almeno del Tortoniano.

c) In collegamento diretto con questa fase di tettonica tardiva, che ebbe nell'Appennino settentrionale particolare sviluppo, si formarono in Toscana in questo periodo i primi compartimenti limitati da faglie dirette, (Horst e Graben) che caratterizzarono poi tutta la tettonica tardiva delle epoche successive [7]. Dopo il sollevamento che ha determinato la lacuna stratigrafica in corrispondenza del Tortoniano, si formarono in Toscana verso la fine del Miocene (Messiniano) tutta una serie di bacini di sprofondamento limitati da faglie, che andarono colmandosi di depositi di acqua dolce. Tali depositi costituiscono la ben nota serie lignitifera, cui più sopra abbiamo già accennato.

d) Col proseguirsi poi di questi sprofondamenti, si giunse ad una nuova trasgressione marina, che determinò la deposizione di sedimenti di mare epicontinentale. In seguito questi bacini vennero riempiti da formazioni detritiche, che, nella Toscana marittima assumono spesso il carattere di depositi regressivi, legati ad una nuova fase di sollevamento: in questo quadro possono rientrare anche i gessi della serie evaporitica che chiude in Toscana il Miocene.

e) All'inizio del Pliocene si manifestò una nuova ed importante fase di sprofondamento: i sedimenti ad essa legati costituiscono la base del ciclo marino pliocenico. In questo periodo infatti il mare ha raggiunto le valli più interne della Toscana, che la trasgressione messiniana non era giunta ad invadere.

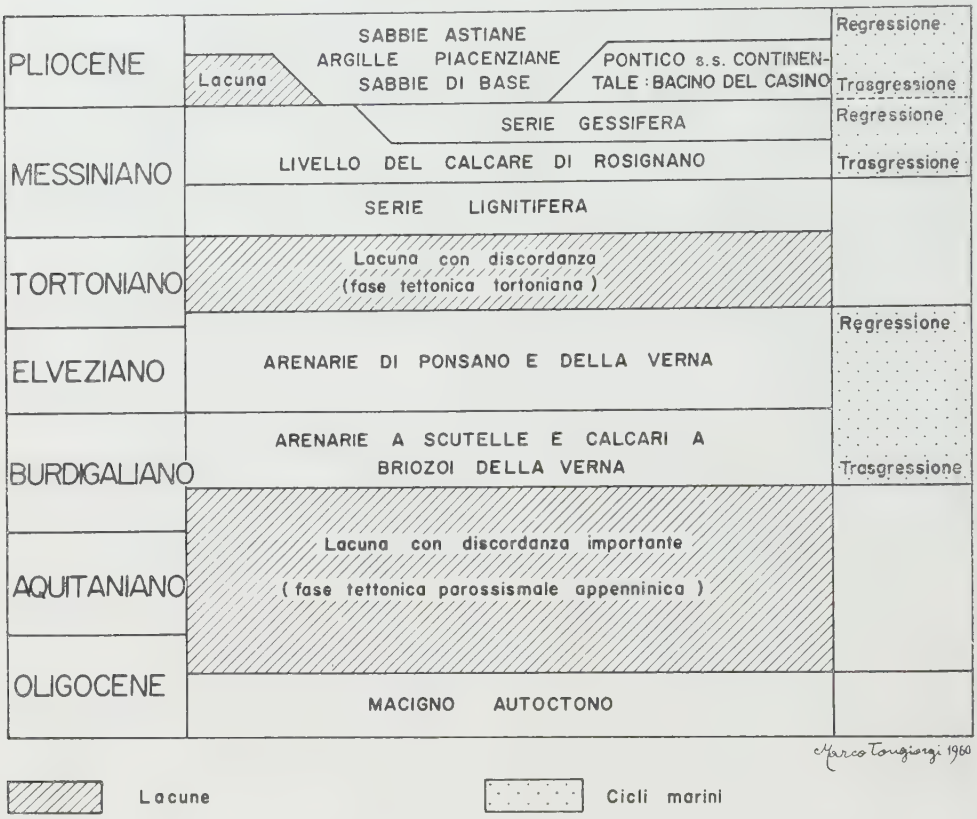
« Il mare in questo tempo » nota L. Trevisan (op. cit.) « si estende fino ad Empoli nella Valle dell'Arno e fino al versante occidentale dei M. del Chianti più a sud, lasciando un arcipelago di isolette in corrispondenza delle strutture più elevate ».

La base del Pliocene dunque è rappresentata dalle « sabbie gialle di base », molto fossilifere, cui seguono le argille azzurre della facies « piacenziana ».

f) Il ciclo pliocenico termina con una nuova regressione, testimoniata dal depositarsi sulle argille piacenziane delle sabbie gialle « astiane » e dei calcari detritici ad *Amphystegina*. Al termine di questa fase le terre emerse occupavano verso il Tirreno un'area assai più estesa dell'attuale.

Con l'Astiano dunque si chiude il Pliocene e si entra nel Quaternario, la cui base è segnata da una trasgressione di lieve entità, che è stata interpretata come di natura eustatica.

A riassumere quanto sopra esposto valga la seguente tabella che sintetizza le attuali conoscenze sulla stratigrafia neogenica nella Toscana.



Opere citate.

[1] G. Trentanove, *Il Miocene medio di Popogna e Cafaggio nei Monti Livornesi*, « Boll. Soc. Geol. Italia », *20*, Roma 1901.

[2] G. Trentanove, *I fossili tortoniani di Quarata nei Monti Livornesi*, Ibid., *20*, Roma 1911.

[3] G. Dessau, G. Merla, A. Signorini, L. Trevisan, *Appunti geologici sul Grossetano tra l'Argentario ed il Monte Canino*, Ibid., *69*, Roma 1950.

[4] L. Trevisan, *Sul complesso sedimentario del Miocene superiore e del Pliocene della Val di Cecina e sui movimenti tettonici tardivi in rapporto ai giacimenti di lignite e di salgemma*, Ibid., *70*, fasc. 1, Pisa 1952.

[5] G. Ruggieri, *I lembi miocenici del Livornese nel quadro della tettonica dell'Appennino*, « Rend. Acc. Sc. Ist. Bol. », ser. 11, *3*, Bologna 1956.

[6] E. Giannini, *I fossili dell'arenaria di Manciano (Grosseto)*, « Palaeontographia Italica », *51* (n. serie 21), Pisa 1957.

[7] E. Giannini, M. Tongiorgi, *Osservazioni sulla tettonica neogenica della Toscana Marittima*, « Boll. Soc. Geol. Italia », *77*, Pisa 1959.

[8] E. Giannini, M. Tongiorgi, *Stratigrafia neogenica toscana.* – 1. *L'arenaria elveziana di Ponsano (Volterra)*, Ibid., *78*, Pisa 1959.

Chimica biologica. — *Il comportamento delle attività transaminasiche del cuore e di alcuni altri organi del colombo bradicardico per inanizione assoluta o per malnutrizione orizanica* (*). Nota (**) di Gaetano Livrea e Giuseppe Ricceri, presentata dal Corrisp. G. Amantea.

La giustificazione a questa indagine va cercata nelle precedenti Note di Livrea e Livrea e coll. [1–10] sul fondamento nutritivo della bradicardia da inanizione o da malnutrizione orizanica. In esse è stato dimostrato che i cuori bradicardici da inanizione o da beriberi presentano in comune i seguenti principali fatti: indipendenza della bradicardia, o della bradiaritmia, dalla carenza di tiamina o di altre vitamine chimicamente note e di sali minerali; in concomitanza con la bradicardia, comparsa di PAS–positività nell'interstizio non strutturato e nelle cellule del Purkinje, non riferibile ad accumulo di glicogeno o di derivati lipidici e quindi forse imputabile ai gruppi idrossiamino attivi; insorgenza della bradicardia in concomitanza dell'instaurarsi dell'abbassamento del quoziente di combustione; usura cardiaca proporzionalmente quasi uguale a quella dell'organismo complessivo e quindi uguali indici di usura; perdita netta di N proteico; aumento di N aminico; aumento dell'attività xantinossidasica.

Tutti questi fatti e le deduzioni da essi autorizzate additavano la possibilità che il fondamento nutritivo della bradicardia da tiaminodeficienza fosse quello stesso della bradicardia da inanizione e consistesse in un disordine del metabolismo protidico del cuore, dovuto al fatto che l'organismo in inanizione per digiuno o per malnutrizione orizanica non può sintetizzare, né può, attraverso la disassimilazione proteica degli altri organi, porre a disposizione del cuore la quantità sufficiente di determinati principi azotati indispensabili per la copertura del fabbisogno azotato dell'organo, in particolare del suo sistema specifico.

Indirizzate le ricerche in questa direzione, era opportuno, fra l'altro, lo studio sistematico di alcuni aspetti generali e speciali del metabolismo degli aminoacidi nel cuore bradicardico per inanizione o per malnutrizione orizanica e, volendo incominciare dai primi, abbiamo ritenuto opportuno analizzare il comportamento di alcuni processi reversibili, la cui essenzialità per la formazione e il metabolismo di molti aminoacidi e per la trasformazione reversibile tra protidi e glicidi è indiscutibile, cioè i processi di deaminazione e di transaminazione.

(*) Lavoro eseguito negli Istituti di Fisiologia Umana e Chimica Biologica dell'Università di Messina.

(**) Pervenuta all'Accademia il 23 ottobre 1960.

Poiché la deaminazione ed aminazione metabolica della maggior parte degli aminoacidi è influenzata dalle reazioni di transaminazione e poiché la maggioranza delle riconosciute reazioni di *transfer* dell'N include sempre la partecipazione dell'acido glutammico e dell'acido aspartico, per un primo orientamento abbiamo studiato il comportamento delle transaminasi glutammico–aspartico e glutammico–alanina del cuore bradicardico del colombo in inanizione assoluta o malnutrizione orizanica. Allo scopo d'inquadrare, in un secondo momento, le eventuali modificazioni enzimatiche cardiache nel quadro più vasto delle ripercussioni operate dal digiuno e dalla malnutrizione sugli stessi enzimi degli altri principali organi, lo studio è stato esteso anche al muscolo scheletrico, al fegato, al rene e al cervello. In questa Nota riferiamo i risultati ottenuti, limitando, però, la discussione, per ora, soltanto al comportamento dell'attività transaminasica del cuore.

Materiali e metodi.

Le esperienze si riferiscono a 21 colombi (*C. livia*), giovani, di ambo i sessi, sessualmente maturi, del peso medio di g 400 circa, provenienti da un medesimo allevamento dell'agro. Di essi 9 sono serviti di controllo, 6 sono stati sottoposti a digiuno e 6 alla dieta di riso brillato e lavato. Per i dettagli circa la dieta normale ed orizanica, la durata del digiuno, la perdita di peso, il grado di bradicardia, le modalità del sacrificio dell'animale, del prelevamento, trattamento ed omogeneizzazione dei frammenti dei vari organi, si rimanda alla Nota precedente [10].

Qui si specifica soltanto che i frammenti sono stati lavati con soluzione di Ringer, asciugati, esattamente pesati ed infine omogeneizzati per 2 minuti in microomogeneizzatore con 9 volumi di tampone di fosfati a pH 7,4, ghiacciato, mediante l'immersione in ghiaccio delle apposite vaschette. Dall'omogenato al 10% di ciascun organo, successivamente, per diluizione con tampone ghiacciato, sono stati preparati gli omogenati all'1 % e 2 %, da impiegare rispettivamente per le determinazioni della G.O.T. e della G.P.T. Su una parte dei tessuti (g 0,3–0,5) è stato determinato il residuo secco a 105°C.

Per la determinazione delle attività transaminasiche sono stati utilizzate le seguenti reazioni:

1° α–chetoglutarato + *l*–aspartato $\rightleftarrows$ α–glutammato + ossalacetato;

3° α–chetoglutarato + *l*–alanina $\rightleftarrows$ α–glutammato + piruvato.

Se si eccettua la determinazione della G.O.T. del cuore, per la quale sono state impiegati ml 0,05 di omogenato, tutte le altre prove sono state eseguite impiegando ml 0,1 di omogenato.

La determinazione dell'attività G.O.T. è stata attuata col metodo di Tonhazy, White e Umbreit [11]; quella della G.P.T. con la modificazione di Caldwell e McHenry [12] del metodo di Tonhazy e coll., consistente nella sostituzione dell'aspartato con l'alanina e nell'omissione della decarbossilazione con citrato di anilina. In entrambi i metodi sono stati tenuti presenti i dettagli di tecnica consigliati da Rindi [13], che, tra l'altro, come deproteinizzante, al posto dell'acido tricloroacetico, impiega l'acido metafosforico.

L'acido piruvico, formato dall'alanina, direttamente per transaminazione, o dall'acido aspartico, per transaminazione e successiva decarbossilazione dell'ossalacetato con citrato di anilina, è stato dosato colorimetricamente a $\lambda = 520$ mμ.

Nelle prove di controllo, il deproteinizzante è stato versato prima dell'aggiunta del substrato.

L'attività è stata espressa, secondo Ames ed Elvehjem [14], in unità:

$$Q_T^{10} = \frac{\mu l\ CO_2}{mg\ tessuto\ secco \cdot h}$$

in cui alla quantità di acido piruvico formata è sostituita quella della CO_2 corrispondente, misurata in μl.

Risultati.

Nelle Tabelle I–III sono riferiti i risultati delle determinazioni delle attività transaminasiche glutammico-ossalacetica e glutammico-piruvica del cuore, dei muscoli scheletrici, del fegato, del rene e del cervello dei colombi normali, a dieta libera, dei colombi digiunanti fino ad una perdita media di peso corporeo del 23 % circa e ad una diminuzione della frequenza cardiaca del 45 % circa, nonché dei colombi a dieta orizanica fino all'insediamento di conclamati sintomi di beriberi, corrispondenti in questo caso ad una perdita media di peso corporeo del 20 % circa e ad una diminuzione della frequenza cardiaca media del 40 % circa. Nella Tabella IV sono riportate le medie dei valori e l'analisi statistica dei confronti.

Tutti questi risultati si possono riassumere come segue:

A) *Attività G.O.T.*

1° Nei colombi normali, la più intensa attività G.O.T. si riscontra nel cuore: seguono il rene, il muscolo scheletrico, il fegato ed il cervello. Ponendo uguale a 100 l'attività G.O.T. del cuore, quella del rene è = 51, del muscolo = 48, del fegato = 35, del cervello = 26.

2° Nei colombi digiunati, l'ordine d'intensità rimane immutato, ma l'attività G.O.T. rispetto a quella dei colombi a dieta libera, è diminuita nel cuore (— 20 %) e nel cervello (— 24 %), è aumentata nel fegato (+20 %) ed è rimasta pressoché invariata nei muscoli scheletrici (— 6 %) e nel rene (— 6 %). Le differenze sono però statisticamente significative solamente nel cuore e nel cervello.

3° Nei colombi beriberici, l'ordine d'intensità varia, in quanto il muscolo scheletrico precede il rene, e, rispetto a quella dei colombi a dieta libera, l'attività G.O.T. è diminuita nel cervello (— 29 %, nel cuore (— 27 %), nel rene (— 27 %), nei muscoli scheletrici (— 19 %) e nel fegato (— 15 %). Le differenze sono statisticamente significative nel cervello, nel cuore e nel rene.

4° Se si confrontano i dati dei colombi digiunanti con quelli dei beriberici, l'attività G.O.T. dei primi risulta alquanto più elevata nei muscoli scheletrici (+15 %), nel rene (+29 %), nel fegato (+40 %), ma quasi uguale a quella dei beriberici per quanto riguarda il cuore (+ 9 %) ed il cervello (+6 %). Le differenze sono statisticamente significative solo nel fegato e nel rene.

B) *Attività G.P.T.*

1° Nei colombi normali, contrariamente all'attività G.O.T., l'attività G.P.T. è debole in tutti gli organi; comunque la più intensa si riscontra nel muscolo e la meno intensa nel cuore. Ponendo uguale a 100 l'attività G.P.T. del muscolo, quella del rene è = 60, del fegato =54, del cervello =19, del cuore =16.

2° Nei colombi digiunanti, l'ordine d'intensità rimane immutato e l'attività transaminante dei singoli organi è rimasta pressoché uguale a quella degli stessi organi dei colombi normali.

3° Nei colombi beriberici, ugualmente l'ordine d'intensità è rimasto immutato e l'attività G.P.T., rispetto a quella dei colombi normali, è rimasta pressoché immutata nel cuore e nel cervello, è diminuita alquanto nel fegato (— 16 %), nel rene (— 22 %) e nei muscoli scheletrici (— 25 %). La differenza è però statisticamente significativa solo nei muscoli.

Tabella I.

Attività transaminasiche glutammico-ossalacetica e glutammico piruvica del cuore e di altri organi di colombo normale.

Sesso	Peso corporeo g	Residuo secco % di organo					Q_T^{10} G.O.T.					Q_T^{10} G.P.T.				
		cuore	muscoli	fegato	rene	cervello	cuore	muscoli	fegato	rene	cervello	cuore	muscoli	fegato	rene	cervello
♂	305	23	27	29	26	20	2008	1127	890	1105	638	20	226	121	105	38
♂	390	24	27	27	26	21	2572	1270	1092	1334	673	63	147	133	138	48
♂	385	25	30	29	26	20	2480	1340	1054	1370	840	30	260	139	159	38
♂	410	24	32	30	28	23	2500	1209	888	1260	665	20	188	92	105	47
♂	370	24	28	28	24	21	2110	890	502	1062	471	20	164	93	153	22
♂	420	23	27	29	24	21	2474	770	774	1119	584	40	243	103	169	30
♂	315	23	28	29	22	22	2633	1380	827	1477	697	20	162	76	143	40
♀	310	24	28	27	24	20	3434	1500	1100	1780	640	48	228	120	85	42
♀	385	23	27	30	26	20	1990	1273	688	896	680	43	250	137	76	49
Media		23,7	28,2	28,7	25,1	20,9	2467	1195	868	1267	654	34	208	113	126	39
		± 0,24	± 0,59	± 0,37	± 0,59	± 0,35	± 95,3	± 78,0	±66,3	±87,4	±32,6	±5,2	± 14,2	±7,5	± 11,3	±2,9

Tabella II.

Attività transaminasiche glutammico-ossalacetica e glutammico piruvica del cuore e di altri organi del colombo bradicardico per inanizione assoluta.

sesso	Peso corporeo			Residuo secco % di organo					Q_T^{1o} G.O.T.					Q_T^{1o} G.P.T.				
	iniziale g	finale g	Variaz. ponderale %	cuore	muscoli	fegato	rene	cervello	cuore	muscoli	fegato	rene	cervello	cuore	muscoli	fegato	rene	cervello
♂	340	250	—26,5	21	25	30	25	22	1974	1004	912	1086	365	15	143	140	102	38
♂	325	250	—23,1	23	28	31	24	22	2032	1381	1692	1165	582	25	215	56	83	39
♂	340	268	—21,2	23	25	30	23	22	1850	1053	937	1290	490	33	200	172	175	60
♂	450	325	—27,8	24	29	31	22	24	2238	1148	1020	1316	448	59	255	147	210	23
♀	440	350	—20,5	24	28	31	28	22	1488	944	690	850	393	25	158	73	65	24
♀	460	355	—22,8	23	27	29	23	20	2316	1208	985	1450	704	39	219	116	160	38
	Media — 23,6			23,0	27,0	30,3	24,2	22,0	1983	1123	1039	1193	497	33	198	117	132	37
				±0,45	±0,78	±0,33	±0,87	±0,51	±119,9	±64,7	±138,8	±71,7	±51,9	±6,2	±18,8	±18,3	±23,5	±5,5

Tabella III.

Attività transaminasiche glutammico–ossalacetica e glutammico–piruvica del cuore e di altri organi del colombo bradicardico per dieta orizanica.

Sesso	Peso corporeo			Residuo secco % di organo					Q_T^{1o} G.O.T.					Q_T^{1o} G.P.T.				
	iniziale g	finale g	Variaz. ponderale %	cuore	muscoli	fegato	rene	cervello	cuore	muscoli	fegato	rene	cervello	cuore	muscoli	fegato	rene	cervello
♂	415	295	—28,9	24	30	35	25	24	1340	844	764	876	313	38	130	91	90	32
♂	380	330	—13,2	24	28	34	27	22	1716	852	545	756	386	54	140	54	64	20
♂	340	250	—26,5	23	29	29	24	23	2208	1175	906	1088	690	57	190	100	131	38
♀	510	440	—13,7	24	28	31	24	20	1920	930	720	1200	577	22	156	127	179	51
♀	375	290	—22,7	24	24	30	26	20	1304	768	559	560	326	11	137	86	50	53
♀	460	380	—17,4	23	23	31	23	24	2354	1260	945	1030	504	32	182	107	75	42
M dia			— 20,4	23,7	27,0	31,7	24,8	22,2	1807	971	740	918	466	36	156	94	98	39
				±0,21	±1,15	±0,96	±0,60	±0,75	±178,2	+81,6	±68,5	±96,1	±61,4	±7,1	±10,2	±9,9	±19,8	±5,0

Le attività transaminasiche del cuore e di alcuni altri organi del colombo bradicardico per inanizione assoluta o per malnutrizione orizanica.

Animali esaminati	I Normali 9	II Digiunanti 6	III A dieta orizanica 6	Confronti e analisi statistica								
				I e II			I e III			II e III		
Variazione del peso corporeo %	—	— 23,6	— 20,4	differenza %	*t*	*p*	differenza %	*t*	*p*	differenza %	*t*	*p*
G.O.T.												
Cuore	2467 ± 95,3	1983 ±119,9	1807 ±178,2	— 19,6	3,178	0,01 sign.	— 26,8	3,564	0,01 sign.	— 8,9	0,820	n.s.
Muscoli scheletrici . .	1195 ± 78,0	1123 ± 64,7	971 ± 81,6	— 6,0	—	—	— 18,7	1,918	n.s.	— 13,5	1,460	n.s.
Fegato . . .	868 ± 66,3	1039 ±138,8	740 ± 68,5	+ 19,7	1,237	n.s.	— 14,7	1,294	n.s.	— 28,8	1,933	n.s.
Rene	1267 ± 87,4	1193 ± 71,7	918 ± 96,1	— 5,9	—	—	— 27,5	2,624	0,05 sign.	— 23,1	2,295	0,05 sign.
Cervello . .	654 ± 32,6	497 ± 51,9	466 ± 61,4	— 24,0	2,702	0,02 sign.	— 28,7	2,697	0,02 sign.	— 6,2	0,385	n.s.
G.P.T.												
Cuore . . .	34 ± 5,2	33 ± 6,2	36 ± 7,1	— 2,9	—	—	+ 5,9	—	—	+ 9,1	—	
Muscoli scheletrici . .	208 ± 14,2	198 ± 18,8	156 ± 10,2	— 4,8	—	—	— 25,0	2,680	0,02 sign.	— 21,2	1,963	n.s.
Fegato . . .	113 ± 7,5	117 ± 18,3	94 ± 9,9	+ 3,5	—	—	— 16,1	1,545	n.s.	— 19,7	1,100	n.s.
Rene	126 ± 11,3	132 ± 23,5	98 ± 19,8	+ 4,8	—	—	— 22,2	1,327	n.s.	— 25,8	1,111	n.s.
Cervello . .	39 ± 2,9	37 ± 5,5	39 ± 5,0	— 5,0	—	—	0	—	—	+ 5,4	—	—

4° Se si confrontano i dati dei colombi digiunanti con quelli dei beriberici, l'attività G.P.T. dei primi risulta alquanto più elevata nel fegato (+24 %), nei muscoli (+27 %) e nel rene (+33 %) e pressoché uguale nel cuore e nel cervello. La differenza è però statisticamente significativa solamente nei muscoli.

Volendo inquadrare i nostri risultati nella letteratura si deve dire che essi, per quanto riguarda l'attività G.O.T., concordano in linea di massima con quelli della Kritzman (15–16) e con quelli di Castro e Monaco (17–18); per quanto riguarda l'attività G.P.T., invece, discordano da quelli di questi Autori, in quanto che, secondo i nostri risultati, una diminuzione significativa dell'attività G.P.T., del resto già scarsa in condizioni normali, è osservabile soltanto nei muscoli scheletrici dei colombi beriberici. È da notare altresì che la Kritzman, per quanto ne sappiamo, ha omesso lo studio della attività transaminasica del cuore e che Castro e Monaco hanno condotto il loro studio su colombi beriberici e su colombi ipoalimentati, precisamente « alimentati con riso brillato in quantità pari a quella effettivamente metabolizzata dagli animali in beriberi, ma a cui si somministravano giornalmente γ 50 di tiamina »[1].

I nostri risultati, infine, differiscono da quelli di Rindi [21] e Perri e Rindi [22], ottenuti, però, in condizioni sperimentali diverse dalle nostre, cioè da ratti resi beriberici con una comune dieta normoproteica, priva di sola tiamina, e da ratti ipoalimentati con la stessa dieta supplementata di tiamina. In queste condizioni, contrariamente a noi, gli Autori hanno osservato sempre un aumento delle attività transaminasiche, che è però minimo nel cuore. Ma, secondo noi, questa divergenza apparirà appianata, se si considera non tanto la diversità degli animali, quanto la diversità delle loro condizioni metabolico–nutritive. Secondo Brin e McKee [23] gli effetti delle diverse modificazioni fisiologiche sull'attività delle transaminasi « possono essere messi in rapporto con lo stato generale del metabolismo nell'organismo ».

Ora lo stato generale del metabolismo degli animali di Rindi e di Perri e Rindi era ben diverso da quello dei nostri animali. Nel nostro caso, per il fatto o del vomito persistente o del digiuno assoluto, i colombi venivano a trovarsi ben presto in condizioni di grave carenza proteica e quindi d'intensa disassimilazione proteica tissulare; nel caso di Rindi e Perri e Rindi, invece, i ratti, per il fatto della dieta normoproteica e tiaminocarente o ipocalorica, in quanto appaiata, venivano a trovarsi, e solo tardivamente, in genere dopo circa un mese, in condizioni di modesta carenza proteica e quindi di lieve disassimilazione proteica. Sta di fatto che Kaplansky e coll. [24] hanno osservato « che l'alanina–glutammico transaminasi diminuisce nei fegati di ratto mantenuti a dieta povera di proteine per 25–30 giorni »; che Beserovskaya e Smirnova [25] hanno osservato che i processi di transaminazione

(1) Non abbiamo potuto leggere né un lavoro di BARRON e coll. [19], « che concludono in favore di un non intervento della tiamina nel processo di transaminazione », né un lavoro di COHEN [20], « che conferma i risultati della Kritzman ».

sono notevolmente rallentati nelle fettine e negli omogenati di fegato di ratto a dieta fortemente ipoproteica (3 %); che Awapara [26] ha osservato che nei ratti a dieta priva di proteine, dopo 4 giorni, si riscontra una perdita del 50 % dell'originale attività dell'alanina–transaminasi epatica, perdita che non aumenta ulteriormente, anche insistendo nella deplezione proteica sino al 20° giorno, mentre, al contrario, l'aspartico–transaminasi si modifica leggermente e le modificazioni sono statisticamente insignificanti; che noi, infine, in ricerche tuttora in corso e tese ad altri scopi, su ratti a digiuno assoluto e prolungato, abbiamo riscontrato non aumento ma diminuzione dell'attività G.O.T. del cuore.

Per brevità e chiarezza, non ci è possibile entrare qui in dettagliati raffronti e commenti dei nostri dati sull'attività transaminasica dei vari organi del colombo in inanizione o in malnutrizione orizanica. Ciò sarà fatto a suo tempo, cioè una volta espletato il nostro piano di lavoro, che, come è stato già dichiarato, [27–5] tende a delucidare sia alcuni aspetti della biochimica dell'inanizione e delle malnutrizioni, sia il fondamento biochimico di determinate alterazioni morfologiche e funzionali osservabili in detti stati.

Ma per quanto riguarda il punto che più ci preme, cioè il fondamento biochimico del cosidetto cuore beriberico del colombo, qualche commento bisogna pur farlo. Va sottolineato che il comportamento delle attività transaminasiche di questo cuore è diverso da quello del cuore normale ed è identico a quello del cuore bradicardico del colombo in inanizione assoluta: precisamente nei due cuori bradicardici, rispetto ai normali, è osservabile una significativa diminuzione dell'attività G.O.T., quasi dello stesso ordine di grandezza, ed un'immutata attività G.P.T.

In altri termini, ci sembra che con queste ricerche sia stato posto in luce, tra l'altro, un nuovo comune tratto biochimico tra i due diversi cuori bradicardici, tratto che va ad aggiungersi a quelli già precedentemente rilevati e descritti, sanzionando così ancora una volta che il cuore beriberico è identico al cuore da inanizione.

Si può spiegare l'uguale comportamento dell'attività transaminasica del cuore nel corso del prolungato digiuno e della malnutrizione orizanica?

Noi crediamo di sí, pur avvertendo subito che la nostra spiegazione, anche se interpetra soddisfacentemente il nuovo fatto e completa il quadro dei fatti già osservati, come ogni spiegazione, ha i suoi punti deboli, i quali non stanno soltanto nel carattere ipotetico di alcuni suoi aspetti, quanto nella grande differenza di opinioni circa l'esatto ruolo degli enzimi della transaminazione nella sintesi delle proteine.

Innanzi tutto il fatto che negli omogenati di cuore bradicardico, che si tratti di digiuno o di malnutrizione, diminuisce l'attività G.O.T., mentre rimane immutata l'attività G.P.T., farebbe pensare che gli enzimi relativi siano dotati di un diverso grado di stabilità o meglio siano associati con due differenti tipi di proteine cardiache: uno, quello con cui è associata la glutammico–aspartico transaminasi, sarebbe meno resistente all'inanizione e verrebbe travolto dall'accentuato catabolismo proteico proprio dell'inani-

zione; l'altro, quello associato con la glutammico–alanina transaminasi, sarebbe più resistente. Speriamo di poter dare la dimostrazione di ciò operando come Awapara [28] ha fatto per le stesse transaminasi del lobo ventrale della prostata del ratto, cioè mediante la separazione, per centrifugazione, del residuo insolubile dell'omogenato dalle proteine solubili.

Se si riuscirà a separare i due enzimi, si potrà forse anche studiare in modo più soddisfacente l'attività della glutammico–piruvico transaminasi, la quale, per la verità, nel cuore e nel cervello dei nostri colombi, e ad altri Autori in altri tessuti di altri animali, è apparsa al limite della sensibilità del metodo impiegato.

Comunque, se la diminuita attività transaminasica G.O.T. del cuore è dovuta alla degradazione di determinate proteine cardiache, allora essa non solo costituisce un altro esempio della possibilità di perdere enzimi cardiaci in conseguenza dell'inanizione, ma anche rappresenta un'altra valida prova di quanto da tempo uno di noi (Livrea [1–2–3–6–7–8–9]) ha già affermato e cioè che la condizione determinante della bradicardia del colombo beriberico non è la tiaminodeficienza, bensì quella stessa del cuore da inanizione, e che tale condizione è rappresentata dalla rottura dell'equilibrio azotato del cuore, la quale s'instaura, allorquando la nutrizione endogena, cioè la disassimilazione delle proteine tissulari a livello degli altri organi e tessuti, non è più capace di porre a disposizione dell'organo l'adeguata massa metabolica di N, dalla quale attingere i principi nutritivi azotati atti a compensare le perdite corrispondenti al dispendio azotato specifico dell'organo e ad assicurare quindi la riparazione *in situ* delle proteine cardiache usurate.

Stando a questa interpetrazione, la diminuita attività G.O.T. del cuore cosidetto beriberico e del cuore da digiuno sarebbe l'effetto dello squilibrio del bilancio nutritivo dell'organo. Ma se le transaminasi sono le attrici dell'interconversione degli aminoacidi naturali e dei rapporti reciproci tra aminoacidi e α–chetoacidi, controllando così il livello degli aminoacidi liberi nel tessuto e costituendo un anello tra i *pools* metabolici del metabolismo glicidico e protidico, se nelle reazioni di transaminazione l'acido glutammico ha un posto prevalente, così da poter esercitare un vero e proprio effetto catalitico nell'ossidazione e formazione di molti aminoacidi e se, infine, la transaminazione ha un ruolo nella sintesi dei peptidi e delle proteine, se tutto ciò è vero [29–30–31–32–33], allora la perdita della glutammico–aspartico transaminasi non si limiterebbe ad essere soltanto l'effetto dello squilibrio azotato del cuore bradicardico per inanizione o malnutrizione, ma contribuirebbe ben presto a sua volta ad aggravare il disordine nutritivo protidico del cuore, rallentando ulteriormente la velocità del *turnover* dei componenti dei *pools* metabolici, impedendo la biosintesi di alcuni aminoacidi e l'incorporazione di determinati altri nei peptidi o nei proteidi cardiaci.

Ma se, invece, tra transaminasi e sintesi delle proteine esiste un rapporto inverso, se cioè l'attività transaminasica, diminuisce, allorquando la sintesi proteica è intensa [34–35–36–37–38–39], allora la diminuita attività G.O.T. sarebbe l'espressione di un intenso lavorio anabolico proteico da parte del

tessuto cardiaco, che cercherebbe infruttuosamente di sottrarsi alla generale disassimilazione proteica e riparare alla sua propria.

Per concludere, infine vogliamo richiamare un poco l'attenzione anche sulla significativa diminuzione dell'attività G.O.T. del cervello dei colombi digiunanti e beriberici. Essa sta ad indicare che l'encefalo, per quanto sia apparso, in altre nostre ricerche [6] come l'organo ponderalmente più stabile, non viene risparmiato dall'inanizione e dalla malnutrizione orizanica e va pur esso incontro ad una perdita di componenti proteici ad attività enzimatica e quindi verosimilmente ad un'alterazione del metabolismo azotato della stessa natura, interesse e significato di quello del cuore, alterazione che meriterebbe approfondite ricerche a cagione della grande importanza potenziale che la sua delucidazione potrebbe avere per la comprensione del determinismo degli abnormi fenomeni nervosi e psichici osservabili nel digiuno e nella malnutrizione.

Bibliografia.

[1] Livrea G., « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, *15*, 453 (1953).
[2] Livrea G. e Craxì P., « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, *16*, 508 (1954).
[3] Livrea G., « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, *16*, 763 (1954).
[4] Livrea G., « Biologica Latina », *10*, 794 (1957).
[5] Livrea G., « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, *24*, 577 (1958).
[6] Livrea G. e De Stefano F., « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, *24*, 579 (1958).
[7] Livrea G. e De Stefano F., « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, *24*, 749 (1958).
[8] Livrea G. e De Stefano F., « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, *25*, fasc. 1–2 (1958).
[9] Livrea G. e De Stefano F., « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, *25*, fasc. 3–4 (1958).
[10] Livrea G. e Ricceri G., « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, *25*, fasc. 5 (1958).
[11] Tonhazy N. E., White N. G. e Umbreit W. W., « Arch. Biochem. », *28*, 36 (1950).
[12] Caldwell E. F. e McHenry E. W., « Arch. Biochem. », *45*, 97 (1953).
[12] Rindi G., « Arch. Sc. Biol. », *38*, 155 (1954).
[14] Ames S. R. e Elvehjem C. A., « J. Biol. Chem. », *166*, 81 (1946).
[15] Kritzman M. G., « Biokhimiya », *5*, 281 (1940), analizzato in « Brit. Abstract », A.–III, 684 (1941).
[16] Kritzman M. G., « Biokhimiya », *8*, 85 (1943), analizzato in « Brit. Abstract », A.–V, 422 (1944).
[17] Castro V. e Monaco P., « La Ricerca Scientifica », *26*, 2400 (1956).
[18] Castro V. e Monaco P., « La Ricerca Scientifica », *26*, 2717 (1956).
[19] Citato da Rindi G. [21].
[20] Citato da Rindi G. [21].
[21] Rindi G., « Boll. Soc. ital. Biol. Sper. », *29*, 170 (1953).
[22] Perri V. e Rindi G., « G. Biochimica », *6*, 253 (1957).
[23] Brin M. e McKee R. W., « Arch. Biochem. and Biophys. », *61*, 384 (1956).
[24] Kaplansky S. e coll., « Biokhimiya », *10*, 401 (1946), citato da Awapara J. [26].
[25] Beserovskaya N. N. e Smirnova N. P., « Biokhimiya », *21*, 457 (1956), citato da Stekol J. A., in « Ann. Rev. of Biochemistry », *27*, 693 (1958).
[26] Awapara J., « J. Biol. Chem. », *200*, 537 (1953).
[27] Livrea G., « Arch. ed Atti Soc. Med. Chir. di Messina », *1*, 1 (1957).
[28] Awapara J., « Endocr. », *51*, 75 (1952).
[29] Herbst R. M., « Advances in Enzymology », *4*, 75 (1944).
[30] Braunstein A. E., « Advances in Protein Chemistry », *3*, 1 (1947).

[31] Cedrangolo F., *Le transaminazioni – Giornate Biochimiche Italo–Franco–Elvetiche*, «Atti del Congresso», Ed. C.N.R. Roma (1954) p. 252.
[32] Meister A., «Advances in Enzimology», *16*, 185 (1955).
[33] Cedrangolo F., «Biochimica Applicata», *5*, 158 (1958).
[34] Cohen P. P. e Hekhuis G. L., «Cancer Res.», *1*, 620 (1941), citato da Braunstein A. E. [30].
[35] Bartlett P. D. e Glynn M. «J. Biol. Chem.», *187*, 253 (1950).
[36] Bartlett P. D. e Glynn M., «J. Biol. Chem.», *187*, 261 (1950).
[37] Caldwell E. F. e McHenry E. W., «Arch. Biochem.», *45*, 97 (1953).
[38] Beaton G. H. e coll., «Proc. Soc. exp. Biol. Med.», *83*, 781 (1953).
[39] Rindi G. e Perri V., «Arch. Sci. Biol.», *39*, 343 (1955).

Botanica. — *Risultati di alcune prove di allevamento di piante di grano provenienti da cariossidi immature* (*). Nota di PAOLO MELETTI, presentata (**) dal Socio S. TONZIG.

INTRODUZIONE. – In un recente lavoro sulle tecniche di innesto fra Graminacee (Meletti 1959) (1) abbiamo avuto occasione di accennare alla possibilità di operare il trapianto embrionale fra cariossidi allo stadio di latte, le quali, indipendentemente dal trapianto, sono in grado di germinare subito e di produrre piante normali e perfettamente vitali, l'allevamento delle quali diventa peraltro problematico in quegli ambienti nei quali le colture vanno condotte durante i mesi più difficili della stagione estiva.

Con la presente Nota riferiamo su un tentativo di allevamento, in condizioni particolarmente sfavorevoli, di piante di grano provenienti da cariossidi allo stadio di latte.

METODI E RISULTATI. – Cariossidi allo stadio di latte dei grani Cappelli (*Tr. durum*) e Denti De Cani ($2n = 42$: ved. Meletti 1955 (2)), provenienti da semine autunnali di pieno campo, venivano raccolte in data 31 maggio 1958 e seminate immediatamente in vasi su terra. I vasi venivano sistemati all'aperto in luogo ombreggiato, in modo che fossero colpiti direttamente dalla luce solare soltanto durante le prime ore del mattino e comunque non oltre le ore 10 antimeridiane. Nella stessa posizione venivano sistemati i vasi contenenti le cariossidi secche di controllo degli stessi grani del raccolto dell'anno precedente.

A tutti i materiali in coltura veniva assicurata, attraverso la annaffiatura (in totale assenza di precipitazioni), la necessaria umidità, in modo da evitare, in ogni caso, disturbi da carenza di acqua.

Tutte le prove venivano condotte ad una temperatura media ambiente (leggermente mitigata dall'ombreggiamento) di 25° C, con minimi compresi fra 14° e 19° (minimo assoluto 12° C) e massimi compresi fra 28° e 36° C (massimo assoluto 40° C) (valori riferiti al periodo 1° giugno–15 settembre 1958: ved. appresso).

Il controllo della fertilità del polline delle piante provenienti dalle cariossidi immature veniva eseguito con il metodo della colorazione con carminio acetico (carminio acetico e glicerina in parti uguali).

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Botanico dell'Università di Cagliari, sotto la Direzione del prof. Francesco D'Amato.

(**) Nella seduta del 19 novembre 1960.

(1) P. MELETTI, «Nuovo Giorn. Bot. Ital.», n. s., *66* (in corso di stampa) (1959).

(2) P. MELETTI, «Caryologia», *7*, 98–113 (1955).

Controlli. – Alla pronta germinazione del 95 % delle cariossidi secche messe in coltura segue, nel giro di 5 giorni dalla semina, la nascita delle piante di Cappelli e Denti De Cani. Dette piante, dopo uno sviluppo iniziale piuttosto rapido, quando hanno raggiunto l'altezza di 25–30 cm (in 30 giorni circa), subiscono un arresto della crescita e manifestano successivamente un graduale disseccamento senza che riescano, in nessun caso, ad arrivare alla spigatura.

Cappelli (cariossidi allo stadio di latte). – A differenza di quello che si verifica nei controlli, la germinazione delle cariossidi allo stadio di latte non è simultanea. Nel caso del Cappelli un intervallo di 5 giorni dalle prime nascite, che si registrano a 5 giorni dalla semina, è necessario perché l'85 % circa delle cariossidi in coltura riesca a germinare e a produrre plantule.

Dopo la nascita le piante così ottenute si sviluppano tanto rapidamente che 70 giorni dopo la semina compaiono fuori guaina le prime spighe. Un ciclo così breve è indizio di una situazione tutta particolare che si riflette ovviamente sulle caratteristiche delle piante, le quali, oltre a non avere culmi di accestimento (l'assenza dei quali peraltro è da mettersi in relazione anche con il fatto che le piante sono allevate in vaso a distanza ravvicinata), sono di taglia ridotta (60–70 cm), con internodi alquanto raccorciati, ed hanno foglie piuttosto piccole.

Naturalmente non tutte le piante sono capaci di sopravvivere: complessivamente il 15 % circa delle piante nate subisce, più o meno precocemente, l'arresto della crescita e il successivo disseccamento.

Notevoli differenze esistono fra pianta e pianta per quanto riguarda la data di spigatura, che va dal 10 agosto al 15 settembre. Le spighe, pur conservando le caratteristiche morfologiche tipiche, hanno una rachide piuttosto corta, un numero di spighette ridotto e sono completamente sterili.

L'analisi dei fiori ci ha permesso di mettere in evidenza quanto segue:

a) stami: perfettamente formati (antera e filamento), con antere, talora ridotte, sempre aderenti alla parete dell'ovario per il mancato allungamento dei filamenti, notevolmente contratti; antere ridotte generalmente prive di polline; antere normali contenenti granuli di polline sterili nelle proporzioni del 15–25 %;

b) ovari: normali.

Denti De Cani (cariossidi allo stadio di latte). – Nel Denti De Cani lo sfasamento nelle nascite delle piante raggiunge la sua massima espressione: in questo caso, infatti, le ultime nascite si registrano a 20 giorni di distanza dalle prime, le quali si verificano sempre 5 giorni dopo la semina. La germinazione interessa l'85 % delle cariossidi messe in coltura.

Anche le piante di Denti De Cani hanno un ciclo molto breve, perfettamente corrispondente a quello delle piante di Cappelli, come pure corrispondenza si nota nelle caratteristiche delle piante, che hanno taglia piuttosto ridotta. Il 15 % circa delle piante nate non riesce a sopravvivere.

Anche in questo caso la spigatura inizia il 10 agosto e termina alla metà di settembre. Le spighe hanno sempre la rachide corta, un numero di spighette ridotto e una fertilità estremamente bassa.

A proposito della fertilità va notato che soltanto il 15 % circa delle spighe, che arrivano a maturazione, forma cariossidi nella misura di 0,6 cariossidi per spighetta.

I fenomeni di sterilità nel Denti De Cani meritano particolare attenzione in quanto spesso legati alla trasformazione degli organi sessuali maschili. L'analisi dei fiori ha infatti rivelato quanto segue:

1° spighe fertili (15 %: ved. sopra):

a) stami: perfettamente formati (antera e filamento), con antere generalmente normali, talora bloccate nella posizione iniziale (le 3 antere nei fiori sterili, 1 o 2 nei fiori fertili) per il mancato allungamento dei filamenti, i quali comunque non si distendono mai completamente, per cui le antere rimangono generalmente prigioniere fra le glumelle e vi si ritrovano ad avvenuta maturazione delle cariossidi; antere contenenti granuli di polline sterili nella proporzione massima del 5 %;

b) ovari: normali;

2° spighe sterili (85 % circa):

a) stami: raramente normali, talora malformati, generalmente trasformati.

La malformazione più ricorrente è rappresentata da una modificazione del filamento, il quale appare schiacciato (in senso antero-posteriore), quasi laminare: l'antera che sormonta detto filamento è generalmente normale.

Estremamente frequente la trasformazione degli stami, al posto dei quali si trovano delle formazioni fogliacee (di regola in numero di 3 (figg. 2 e 4); in qualche caso se ne osservano 2 (fig. 5) o 1 insieme rispettivamente a 1 o 2 stami normali), disposte a coprire completamente l'ovario, alla base del quale sono presenti le lodicole (fig. 2). Dette formazioni fogliacee hanno scarsa consistenza, sono molti sottili sui lati fino al margine (fig. 7), presentano ciuffi di peli (all'apparenza identici ai peli stimmatici) lungo la linea centrale a livello del terzo superiore interno (fig. 7), talora sono sfrangiate lungo i margini, più spesso all'apice. La loro struttura istologica è perfettamente omogenea per la assoluta prevalenza di tessuto parenchimatico, nello spessore del quale corre un vaso legnoso spiralato, che parte dalla base dell'organo e sale, con decorso molto regolare, lungo la linea centrale fino a mezza altezza, allorché si interrompe bruscamente e definitivamente;

b) ovari: normali.

Le cariossidi prodotte dalle spighe fertili, che raggiungevano lo stadio di latte alla fine di agosto, venivano prelevate e seminate immediatamente in vasi su terra, contemporaneamente alle cariossidi secche di controllo provenienti dall'ultimo raccolto. La nuova coltura veniva iniziata il 2 settembre 1958 e portata avanti per tutto il periodo invernale fino alla metà del mese di aprile dell'anno successivo.

In questo caso i vasi, tenuti sempre all'aperto, venivano lasciati pienamente esposti alla luce e ai fatti meteorici naturali (pioggie alquanto frequenti a partire dalla seconda quindicina di settembre).

Le prove venivano condotte ad una temperatura media ambiente di 20° C nel periodo 2 settembre–31 ottobre (con minimi compresi fra 12° e 18° C e massimi compresi fra 24° e 31° C) e di 9° C da novembre a marzo (con minimi compresi fra 3° e 7° C e massimi compresi fra 10° e 15° C).

Le nascite dei controlli si verificano, con buona uniformità, intorno ai 5 giorni dalla semina, mentre la germinazione delle cariossidi allo stadio di latte è frazionata nel tempo, tanto che, in questo caso, le ultime nascite si registrano 20 giorni dopo la semina con un intervallo di circa 15 giorni dalle prime.

Il ciclo di sviluppo di tutti i materiali è praticamente normale, tanto che occorrono 7 mesi circa perché si arrivi alla spigatura, che è quasi simultanea, sia nei controlli, sia nelle piante provenienti dalle cariossidi allo stadio di latte.

Le spighe sono perfettamente regolari come lunghezza della rachide e numero di spighette e sono parzialmente sterili, senza grandi differenze fra i diversi materiali in coltura.

Di particolare rilievo il ritrovamento di fiori maschio–sterili, per la trasformazione degli stami (ved. sopra), sia nelle piante di controllo che in quelle provenienti da cariossidi allo stadio di latte: in questo caso il fenomeno è meno frequente rispetto a quanto osservato nei materiali allevati durante il periodo estivo (ved. Tabella I).

TABELLA I.

Quadro riassuntivo del comportamento di piante ottenute da semi secchi e da semi allo stadio di latte, seminati in tempi diversi, nel Cappelli (C) *e nel Denti De Cani* (DC).

Grano	Tempo di semina	Maturaz. del seme	n° semi seminati	n° semi germinati	n° piante adulte	n° piante con spiga	n° piante con semi	n° semi per spighetta
C	31 maggio	cornea	50	47	—	—	—	—
		lattea	50	42	36	36	—	—
DC	31 maggio	cornea	50	47	—	—	—	—
		lattea	50	42	36	36	5	0,6
	2 settembre	cornea	20	18	18	18	15	1,5
		lattea	20	16	14	14	12	1

CONCLUSIONE. – Fra i risultati ottenuti nel corso della ricerca meritano particolare menzione i fenomeni di sterilità osservati nel Denti De Cani, in quanto connessi essenzialmente alla trasformazione degli stami, i quali

Figg. 1-7: Denti De Cani. – Fig. 1: fiore normale a sviluppo completo (× 12). – Fig. 2: fiore a sviluppo completo con stami trasformati (× 12). – Fig. 3: fiore normale in fase di sviluppo (× 12). – Fig. 4: fiore in fase di sviluppo con stami trasformati (× 12). – Fig. 5: fiore a sviluppo completo con uno stame normale e due trasformati (× 12). – Fig. 6: fiore anomalo in fase di sviluppo: in alto gli stami trasformati, in basso al centro l'ovario, normale, fiancheggiato dalle lodicole (× 6). – Fig. 7: stame trasformato isolato ed ingrandito (× 20).

assumono alcune caratteristiche (ved. ciuffi di peli identici ai peli stimmatici), che ricordano decisamente l'organo sessuale femminile.

Per spiegare un fatto del genere, mentre è da escludere una qualche correlazione fra la trasformazione degli stami e l'uso delle cariossidi allo stadio di latte, in quanto il fenomeno compare anche nelle piante provenienti dalle cariossidi secche seminate a settembre, non va trascurata quella che può essere stata l'influenza, associata eventualmente all'azione delle temperature elevate, esercitata dal prolungamento nella durata della illuminazione (da 14 a 15 ore) sui materiali allevati durante il periodo estivo, quegli stessi materiali che durante il periodo invernale, in condizioni normali, sono esposti alla luce naturale per 9–11 ore. D'altra parte la trasformazione degli stami del Denti De Cani seminato a settembre confermerebbe la induzione precoce del fenomeno in relazione al fatto che durante il periodo iniziale delle colture (primi di settembre – metà ottobre) si registrano condizioni di temperatura (20° C) e di durata della illuminazione (intorno alle 12 ore), che più si avvicinano alle condizioni del periodo estivo.

Zoologia (Anatomia). — *Primi dati sul corredo nervoso del labbro orale di* Sepia officinalis (*). Nota di Pasquale Graziadei, presentata (**) dal Socio A. Pensa.

Facendo seguito a precedenti contributi sul corredo nervoso del canale alimentare di *Sepia officinalis* (Graziadei 1960) ho preso ora in considerazione il labbro orale del Mollusco. Si tratta di una piega circolare muscolo–cutanea situata al centro del cerchio formato dalle braccia e che circonda a sua volta i due mascellari, superiore ed inferiore. L'impalcatura profonda del labbro è costituita da fasci muscolari diversamente orientati e sistemati in seno ad un abbondante tessuto connettivo. All'esterno il labbro è rivestito da un epitelio batiprismatico monostratificato poggiante su una distinta lamina basale e rivestito esternamente da un sottile bordo cuticolare.

Rinviando al lavoro che verrà pubblicato in esteso per quanto riguarda una trattazione sistematica della parte, mi limito ora a render noti alcuni aspetti del corredo nervoso che, per non esser stati ancora descritti in questi animali e per il loro carattere insolito, meritano particolare attenzione.

L'epitelio batiprismatico monostratificato, che rinveste la piega circumorale definita labbro, presenta una innervazione ricca e varia. Fra le cellule epiteliali di rivestimento sono intercalati numerosi neuroni primari di senso. Taluni globosi non superano la metà inferiore dell'epitelio, altri fusati terminano col loro polo distale affilandosi in un esile filamento che, insinuandosi fra gli elementi di rivestimento raggiunge il bordo cuticolare. Altri neuroni primari ancora, pure di forma fusata, raggiungono con il polo distale la superficie epiteliale in corrispondenza della quale presentano numerosi peluzzi che, attraverso un minuscolo poro della cuticola, sporgono direttamente all'esterno. La estremità basale di tali elementi nervosi si continua in un unico prolungamento che ha il valore di un neurite e che, fuoriuscito dall'epitelio, si unisce a fasci nervosi di diverso significato che attraversano la muscolatura in direzione dei centri gangliari. Sotto l'epitelio, nel connettivo fra i fasci muscolari, si trovano anche numerose cellule nervose di aspetto diverso. Si tratta di grossi pirenofori tondeggianti o fusati di notevoli dimensioni (70 a 100 micron), mono– o bipolari. I primi, avvolti da una teca di cellule capsulari, emettono un prolungamento di diametro rilevante che si approfonda nella muscolatura in direzione dei centri gangliari. Tutto attorno ad ognuna di queste cellule nervose si osserva un complesso intreccio di fibre che, non casualmente, ramificandosi ed intrecciandosi sulla superficie del pirenoforo vi formano attorno una elegante struttura a canestro (fig 1). Qualcuna di queste

(*) Lavoro eseguito nel Centro di Studio dell'Anatomia del Sistema nervoso della Università di Pavia (Direttore: prof. A. Pensa).

(**) Nella seduta del 19 novembre 1960.

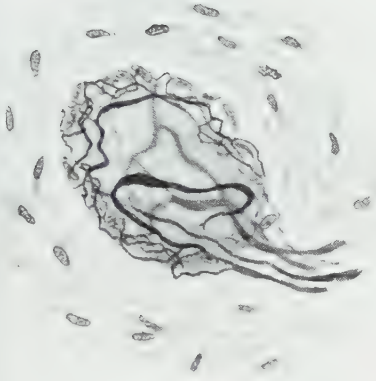


Fig. 1

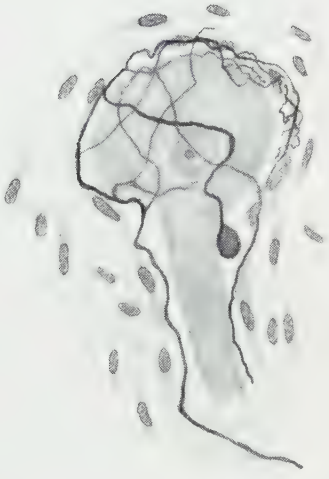


Fig. 2

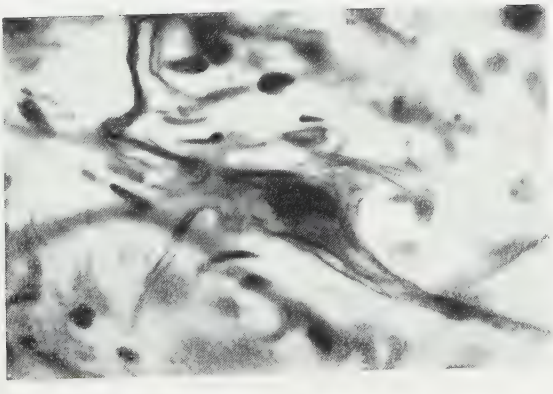


Fig. 3

fibre termina con bottoni terminali (fig. 2). Si tratta di un reperto che ha il preciso significato di apparato sinaptico. Notevole è il fatto che le volute più fini e le ramificazioni che assumono carattere terminale sono specialmente localizzate nello strato delle cellule satelliti che avvolge come una capsula il corpo cellulare. Altro particolare non trascurabile è che alcune di queste fibre sinaptiche invece di esaurirsi completamente intorno ad una cellula, proseguono verso altra destinazione.

Fra i fasci muscolari, non lontano dall'epitelio, ho trovato anche altre cellule nervose fusiformi, bipolari, delle quali un prolungamento segue il decorso centripeto confondendosi con i fasci nervosi che raggiungono i gangli situati nella parte profonda della muscolatura, mentre l'altro prolungamento, dirigendosi verso l'epitelio di rivestimento, dopo breve percorso supera la membrana basale per terminare fra le cellule di questo. Mi sembra meritino particolare attenzione tali cellule nervose bipolari, senza dubbio di natura recettrice, poiché esse rappresentano un primo esempio di centralizzazione degli elementi recettori in questo Mollusco che solitamente (come ebbi altre volte occasione di ricordare) ha i suoi recettori situati nella compagine stessa degli epiteli.

Più a ridosso dei fasci muscolari ho notato ancora un'altra categoria di cellule nervose che per i caratteri morfologici si differenzia dalle prime due. Si tratta di elementi multipolari i cui prolungamenti si estendono in espansioni laminari oppure aventi forma di filamenti ramificati. Queste espansioni assumono col fascio muscolare cui sono addossate intimi rapporti. Tali cellule forniscono inoltre un prolungamento con i caratteri di neurite che si allontana dal corpo cellulare unendosi ai fasci nervosi che dai centri gangliari si distribuiscono a questo settore (fig. 3).

La singolarità dei reperti ora illustrati ed il polimorfismo dei vari elementi nervosi mi sembrano giustificare per ora un certo riserbo nell'attribuire a tutte queste strutture un significato preciso. Se alle cellule nervose intraepiteliali ed alle cellule bipolari situate sotto l'epitelio si può attribuire una funzione recettrice, di più difficile soluzione sembra essere il quesito del significato delle altre due categorie cellulari e cioè delle cellule pluripolari e delle monopolari che si trovano in seno alla muscolatura.

BIBLIOGRAFIA.

P. GRAZIADEI, *Contributo alla conoscenza della innervazione del canale alimentare di* Sepia officinalis, « R. Acc. Naz. Lincei », Cl. Sc. fis., mat. e nat., *28*, 79–81 (1960).

P. GRAZIADEI, *Ricerche sulla innervazione del canale alimentare* di Sepia officinalis, « Arch. It. Anat. Embriol. », *65*, 168–177 (1960).

Zoologia. — *Osservazioni sui neuroni secretorî del cerebro e dei gangli ventrali di un Ortottero* (Gryllotalpa gryllotalpa *L.*). Nota (*) di Giorgio M. Baffoni, presentata (**) dal Corrisp. A. Stefanelli.

È noto che nel *cerebro* degli Insetti vi sono cellule che elaborano un secreto il quale, trasportato dagli assoni, si raccoglie in speciali formazioni ghiandolari cefaliche (complesso cardiaco–allato o strutture omologhe [1]).

È dimostrato che tali ghiandole cefaliche degli Insetti elaborano una successione di principî attivi: durante lo sviluppo secernono un ormone giovanile (neotenina) e negli adulti ormoni che condizionano il metabolismo generale, compresa la maturazione delle gonadi, il controllo della pigmentazione, ecc. [2].

Nel corso di uno studio sul dimorfismo sessuale nel nucleo intercinetico delle cellule somatiche di alcuni Insetti [3], esaminando i gangli ventrali di *Gryllotalpa gryllotalpa* L. di individui di sesso diverso in preparati colorati con il metodo di Mallory–Azan, hanno attirato la mia attenzione alcune cellule nervose nelle quali erano presenti sferule basofile simili a quelle di elementi neurosecretorî del cerebro e talora secreto basofilo nell'assone (Tav. I, D). Queste osservazioni mi hanno consigliato l'esame dei gangli mediante l'ausilio di metodi selettivi per la messa in evidenza di quadri neurosecretorî (cromoematossilina–floxina secondo Gomori–Bargmann [4]). In sezioni di 5 μ ottenute da preparati fissati in liquido di Sanfelice (16 cc di anidride cromica all'1 % + 8 cc di formolo al 40 % + 1 cc acido acetico glac.), ho visto confermati i miei sospetti sulla natura neurosecretoria di alcune cellule nervose dei gangli ventrali; ciò mi ha indotto a compiere un'analisi di tutto il sistema neurosecretorio del sistema nervoso di *G. gryllotalpa*, dalla quale sono emersi alcuni risultati che ritengo degni di nota.

Per la descrizione morfologica della massa soprastomodeale (*cerebro*) di *G. gryllotalpa* rimando alle descrizioni di Bellonci [5] e di Cuccati [6]; per quanto

(*) Ricerca eseguita nell'Istituto di Anatomia comparata « G. B. Grassi » e nel Centro di Neuroembriologia del C.N.R. dell'Università di Roma.

(**) Nella seduta del 19 novembre 1960.

(1) Cfr.: B. De Lerma, « Boll. di Zool. », *Suppl. 17*, 67 (1950).

(2) V. B. Wigglesworth, *The Physiology of Insect Metamorphosis* (Cambridge 1954); *The Control of Growth and Form* (Ithaca 1959).

(3) G. M. Baffoni, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (ser. 8ª), *28*, 937 (1960).

(4) G. Gomori, « Amer. Journ. Pathol. », *17*, 395 (1941); W. Bargmann, « Mikroskopie », *5*, 289 (1950).

(5) G. Bellonci, « Arch. Ital. de Biol. », *3*, 191 (1883).

(6) G. Cuccati, *Sulla struttura del ganglio supraesofageo di alcuni Ortotteri* (Bologna 1887).

riguarda il sistema endocrino cefalico, ricorderò che negli Ortotteri è di « tipo semicentralizzato » (Cazal [7]) e che in *Gryllotalpa* è stato descritto da De Lerma [8].

Nel *cerebro* di *G. gryllotalpa* gli elementi neurosecretorî sono tutti raccolti in una zona ben delimitata della *pars intercerebralis*, ai lati dei corpi peduncolati, ove costituiscono due masse simmetriche allungate (400 × 250 μ) e appiattite (150 μ di spessore) sottostanti al perineurio (Tav. I, A); ogni massa è a sua volta formata da neuroni di dimensioni simili, relativamente piccoli (18,5 × 16,5 μ di diametro). Negli adulti catturati nel mese di maggio la maggior parte delle cellule nervose della *pars intercerebralis* (circa 460 per ogni lato) si presentano in atteggiamenti neurosecretorî; di queste la metà presentano un citoplasma anisto cromofobo, con granulazioni (a volta minute a volta più grosse) o sferule che si colorano con l'ematossilina cromica (materiale Gomori–positivo); l'altra metà delle cellule, invece, presenta un citoplasma di aspetto fibroso, diffusamente floxinofilo o con zollette floxinofile; nelle varie zone della massa intercerebrale i varî quadri secretorî dei neuroni sono frammisti senza prevalenza di un tipo sull'altro (Tav. I, A). Il materiale floxinofilo non si continua nei prolungamenti nervosi delle cellule, ma talora l'ho osservato concentrato in spazî intercellulari; ciò potrebbe indicare che il secreto floxinofilo si versi direttamente nel sangue. Il secreto che si colora con l'ematossilina cromica, invece, si vede solo nei corpi cellulari e negli assoni (Tav. I, C). Dalle due porzioni neurosocretorie della *pars intercerebralis* del protocerebro, seguendo le tracce del secreto assonale, si osserva l'origine di due fasci nervosi; dalle ricostruzioni seriali si deduce che i due fasci si dirigono prima anteriormente, quindi ventralmente, si decussano e proseguono posteriormente; per un breve tratto scorrono lungo il bordo mediale e ventrale del protocerebro, sotto al perineurio, divaricandosi, ed infine emergono medialmente come nervi paracardiaci interni; dopo un breve percorso, questi nervi penetrano nei corpi faringei (sec. De Lerma = *c. cardiaca* sec. Pflügfelder = *c. paracardiaca* sec. Cazal), quindi da essi si diparte lateralmente una componente che si dirige ai corpi allati (*n. corporis allati*) mentre la maggior parte delle fibre si impegnano entro i corpi faringei, in cui il secreto si accumula nelle dilatazioni terminali degli assoni; va anche precisato che un sottile fascetto nervoso, privo di secreto, raggiunge il sottostante ganglio ipocerebrale, dal quale originano un paio di nervi (*nn. oesophagei*) che decorrono caudalmente, prima sulla superficie dorsale del faringe e quindi, una volta superata la porzione distale fusa dei corpi faringei, ai lati del faringe dirigendosi ai rispettivi ganglî ventricolari.

Da queste sommarie annotazioni risulta che le cellule secretrici del cerebro degli Ortotteri, come quelle di alcuni Eterotteri [9] e Blattoidei [10],

(7) P. CAZAL, « Bull. Biol. Fran. Belg. », *Suppl. 32*, 1; *Suppl. 33*, 9 (1948).
(8) B. DE LERMA, « Arch. Zool. Ital. », *17*, 417 (1932).
(9) B. HANSTRÖM, « K. Fysiogr. Sallsk. Handl. » (N. F.), *49*, n. 16, 1 (1938).
(10) B. SCHARRER, « Anat. Rec. », *111*, 554 (1951).

sono tutte raccolte in una delimitata zona della *pars intercerebralis* del protocerebrero; pertanto la frammentazione morfologica e la specializzazione funzionale del centro secretorio, descritte in altri gruppi di Insetti e particolarmente evidenti nei Ditteri [11], vanno messe in rapporto con la complicazione evolutiva dei centri cerebrali (ved.: Hanström [12]). Le osservazioni comparative tra *G. gryllotalpa* di diversa mole somatica (tra individui di 32 e 45 mm di lunghezza) non hanno messo in evidenza apprezzabili differenze nei quadri secretorî dei neuroni del cerebro; pertanto ne deriva che negli Insetti eterometaboli, a differenza di quelli olometaboli, gli stadî giovanili non sembrano caratterizzati da particolari quadri secretorî.

Nei *gangli ventrali* di *Gryllotalpa* i neuroni unipolari che con il metodo di Gomori si presentano in attività secretoria, sono complessivamente una trentina (21–26); essi sono localizzati nel terzo inferiore di ogni ganglio in due–tre coppie di elementi simmetrici (Tav. I, B); non sono riuscito a precisare con esattezza il numero di coppie per ogni ganglio poiché esso varia nei diversi individui, probabilmente in rapporto con l'attività funzionale. Rispetto ai neuroni secretorî del cerebro, quelli dei gangli ventrali raggiungono dimensioni più cospicue e presentano una notevole fluttuazione volumetrica (da 26 a 60 μ di diametro medio) la quale è risultata in rapporto con la taglia dell'animale e con i quadri secretorî. Infatti gli elementi più piccoli (da 26 a 32 μ di diametro medio) presentano granuli di secreto minuti e che si colorano con la cromoematossilina in grigio (Tav. I, E); quelli di medie dimensioni (da 28 μ di diametro in poi) presentano granulazioni grigiastre attorno al nucleo e sferule intensamente colorate alla periferia (Tav. I, F e E) le quali vanno aumentando di grossezza in una stessa cellula verso la membrana cellulare; negli elementi più voluminosi (da 45 a 60 μ di diametro medio) le granulazioni perinucleari si rarefanno e nel citoplasma restano solo grosse gocce di secreto, di aspetto irregolare; inoltre in questi il nucleolo acquista una lieve affinità per la cromoematossilina (Tav. I, G). In alcune cellule nervose secretrici dei gangli ventrali è stato constatato il trasporto assonale del secreto (Tav. I, D); assoni con secreto si osservano talora nei connettivi, ma non entrano nel nervo periferico. I neuroni secretorî dei gangli ventrali presentano variazioni volumetriche in rapporto all'età (taglia corporea) dell'animale, le quali risultano molto più evidenti di quelle dei neuroni secretorî del cerebro: infatti in *G. gryllotalpa* di 32 mm di lunghezza le cellule a granuli minuti e pallidi sono più piccole (diametro medio: 27,5 × 26 μ) rispetto a quelle di adulti di 45 mm (diametro medio: 34 × 28 μ); anche le cellule a grosse gocce di secreto sono più piccole (diametri medî da 28 a 47 μ: media 40 × 33 μ) nell'individuo di taglia inferiore rispetto agli adulti maturi (da 40 a 60 μ di diametro; media 54 × 40 μ) (Tav. I, G e H). È evidente, sia in base alle graduali

(11) A. Fraser, « Quart. Journ. Micr. Sci. », *100*, 377 (1959).

(12) B. Hanström, *Die vergleichende Anatomie des Nervensystems der wirbellosen Tiere* (Berlin 1928).

variazioni del volume sia a quelle dei quadri secretorî, che le cellule piccole a granulazioni debolmente colorate rappresentano la prima fase del ciclo secretorio. Va inoltre notato che i piccoli neuroni secretorî a granuli minuti sono in minor numero nell'individuo di 32 mm, nel quale invece sono relativamente frequenti le grosse cellule prive di granulazioni perinucleari e provviste di voluminose gocce di secreto.

La presenza di cellule nervose con funzione secretoria nei ganglî ventrali rappresenta un dato nuovo nella letteratura degli Ortotteri: infatti la loro presenza nella massa sottostomodeale (*gnatocerebro*) è stata dimostrata in Efemerotteri, Odonati [13], Coleotteri [14], Lepidotteri [15], Emitteri [16] e Dermatteri [17]. Nei ganglî ventrali la presenza di neuroni secretorî è stata segnalata in Lepidotteri [18], Blattoideî [19] e Dematteri [20] ma è stata documentata solo in Ditteri [21,22], Isotteri [23] e Blattoideî [24]. Va però precisato che nell'Ortottero, a differenza dei Ditteri [21], il numero dei neuroni secretori dei ganglî subesofagei non varia in rapporto con la taglia somatica; inoltre la supposizione circa il loro valore funzionale avanzata da Fraser [21], secondo il quale la secrezione di queste cellule avrebbe una decisiva importanza per i processi del differenziamento e dell'istolisi della muscolatura durante la metamorfosi, non appare sufficientemente fondata, sia a causa dell'assenza di fibre con secreto nel nervo periferico, sia per il fatto che tali cellule sono presenti in Ortotteri e Blattoideî [24], insetti paurometaboli (eterometaboli), nei quali i processi differenziativi della muscolatura si realizzano progressivamente e quelli istolitici o sono di scarsa consistenza o mancano affatto. Inoltre, a differenza dei Ditteri, nei ganglî ventrali di *G. gryllotalpa* sono assenti neuroni a secrezione floxinofila: preciso in proposito che nella stessa sede delle cellule gangliari secretorie ho osservato alcuni grossi neuroni con citoplasma debolmente floxinofilo, ma tali neuroni presentavano grossi vacuoli citoplasmatici; la loro rara frequenza (al massimo 3 in uno stesso animale), le loro grosse dimensioni (in media 80 μ di diametro) ed il fatto che nel loro citoplasma non ho mai riscontrato traccia di granulazioni, gocce o zolle di secreto, mi fanno sospettare che questi elementi siano neuroni in involuzione, cioè neuroni « a ciclo vitale limitato » (cfr. Stefanelli [25]; per quanto

(13) L. ARVY & M. GABE, « Zeitschr. Zellforsch. mikr. Anat. », *38*, 591 (1953).
(14) L. ARVY & M. GABE, « C. R. Acad. Sci. », *237*, 844 (1953).
(15) J. J. BOUNHIOL, M. GABE & L. ARVY, « Bull. Biol. (Fran. Belg.) », *87*, 323 (1953).
(16) K. K. NAYAR, « Agra Univ. Journ. Res. Sci. », *4*, 419 (1955).
(17) K. OZEKI, « Sci. Papers Coll. Gen. Educ. Univ. Tokyo », *8*, 85 (1958).
(18) M. F. DAY, « Nature », *145*, 264 (1940).
(19) B. SCHARRER, « Journ. Comp. Neurol. », *74*, 93 (1941).
(20) J. LHOSTE, « Arch. Zool. expérim. gén. », *89*, 169 (1953).
(21) H. KÖPF, « Biol. Zentalbl. », *76*, 28 (1957).
(22) A. FRASER, « Quart. Journ. Micr. Sci. », *100*, 395 (1959).
(23) CH. NOIROT, « C. R. Acad. Sci. », *245*, 743 (1957).
(24) S. GELDIAY, « Biol. Bull. », *117*, 267 (1959).
(25) AL. STEFANELLI, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (ser. 8ª), *10*, 159 (1951); « La Ric. Sci. », *25*, 2278 (1955).

con i metodi impiegati non siano molto evidenti, in questi neuroni si osservano alcune alterazioni nucleari che farebbero fede di ciò.

Un'ipotesi più suggestiva sul significato funzionale dei neuroni secretorî dei ganglî ventrali è stata avanzata da Wigglesworth [26], il quale ha supposto che il loro secreto possa aver un influsso sull'attività secretoria dei neuroni del cerebro.

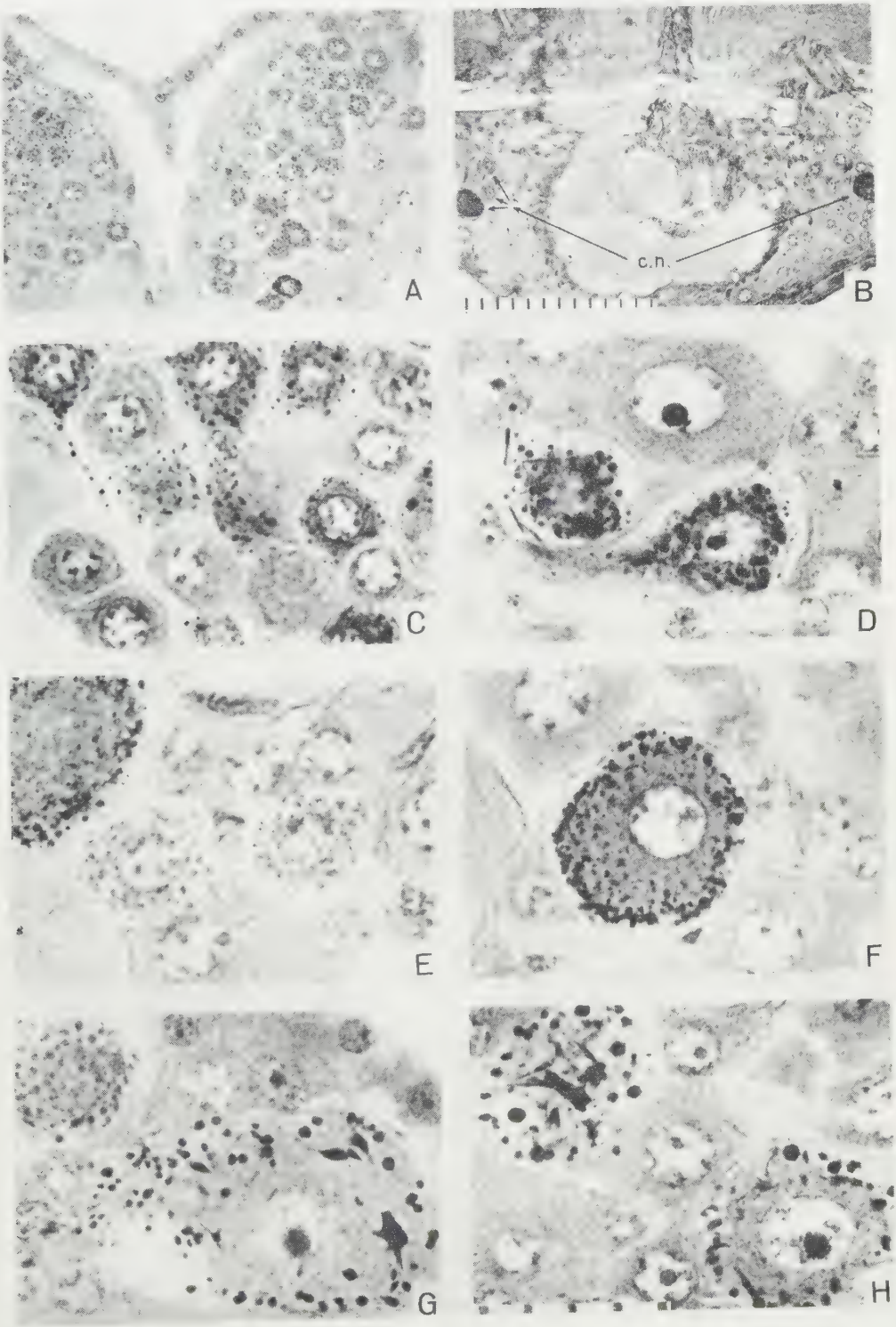
Conclusioni.

Cellule nervose secretorie in *G. gryllotalpa* sono state rinvenute nel cerebro e nei ganglî ventrali. Nel cerebro esse sono tutte raccolte in una zona della *pars intercerebralis* del protocerebro, ove formano due raggruppamenti simmetrici ed omogenei costituiti da circa un migliaio di piccoli neuroni, i quali si presentano in varî quadri secretorî; da ognuno dei due gruppi di cellule origina un fascio nervoso che si decussa e trasporta il secreto per via assonale ai corpi faringei, ove si accumula; tra individui di diverso sesso e di diversa età non sono risultate differenze quantitative o qualitative tra i neuroni secretorî cerebrali. Altri neuroni secretorî sono stati osservati in coppie simmetriche tra i neuroni motorî dei ganglî ventrali: questi neuroni sono più voluminosi di quelli del cerebro; le loro dimensioni variano in rapporto con l'età (taglia somatica) dell'individuo e con l'attività secretoria.

SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA I

A: Aspetto della regione secretoria del protocerebro di *G. gryllotalpa*.
B: Localizzazione dei neuroni secretorî nei ganglî ventrali.
C: Quadri secretorî in neuroni della *pars intercerebralis* del protocerebro (ingrandimento della fig. A) di un individuo di 45 mm. di lunghezza.
D–G: Neuroni secretorî dei ganglî ventrali di *Gryllotalpa* di 45 mm.
H: Grossi neuroni secretorî dei ganglî ventrali di *Gryllotalpa* di 32 mm. di lunghezza.
(A–C ed E–H: Colorazione sec. Gomori–Bargmann. D: Colorazione in Mallory–Azan. – Ingrandimenti: A = B; C–G = H; ogni intervallo delle scale in calce a B e H = 10 μ).

(26) V. B. Wigglesworth, « Journ. Exptl. Biol. », *32*, 485 (1955).


A
c.n.
B
C
D
E
F
G
H

Fisiologia. — *Eccitamenti afferenti e manifestazioni parossistiche corticocerebrali in Cani non predisposti alla epilessia riflessa e trattati con morfina* (*). Nota di Paolo Crepax ed Ettore Fadiga, presentata (**) dal Socio G. C. Pupilli.

Osservazioni elettrografiche da noi effettuate in precedenza nel Cane durante le varie fasi dell'esperimento di Amantea [Crepax e Fadiga (1,2)] mostrano come la generalizzazione dell'attività elettrica di tipo convulsivo, che per applicazioni dello stimolo scatenante si osserva nei Cani predisposti per natura alla epilessia riflessa, sia subordinata a un certo grado di intensificazione dello *spiking* stricninico del centro corticale connesso funzionalmente con l'area riflessogena. Il fenomeno si palesa infatti costantemente quando per effetto delle stimolazioni cutanee la frequenza degli *spikes* nell'area stricninizzata raggiunge valori di 11–13/sec, mentre di solito manca (Cani non predisposti) quando la frequenza medesima sia scarsamente accresciuta dagl'impulsi provenienti dall'area riflessogena e quindi resti inferiore al valore sopra indicato.

Da tempo è nota la possibilità di provocare artificialmente la predisposizione alla epilessia riflessa in animali per natura non predisposti: l'azione predisponente della morfina è stata descritta già dall'Amantea (3), e la medesima proprietà è stata successivamente riconosciuta ad altre sostanze [letteratura in Moruzzi (4)]. Nell'aspetto teorico i tentativi di provocare mediante farmaci lo stato di predisposizione appaiono molto importanti, in quanto che tali esperimenti dovrebbero consentire l'analisi delle modificazioni funzionali indotte nel sistema nervoso dall'agente predisponente durante il progressivo instaurarsi della predisposizione stessa. Proseguendo le nostre ricerche, ci siamo proposti di indagare il meccanismo neurofisiologico con cui la morfina rende effettuabile nei Cani non predisposti, l'accesso convulsivo da impulsi afferenti.

Il procedimento generale degli esperimenti non si discosta in nulla da quello descritto nei lavori già citati (1,2), ai quali rinviamo per ogni dettaglio. Dopo aver accertato, nel modo esposto appunto in tali lavori, che il Cane sul quale si sarebbero effettuate le indagini non era per natura predisposto

(*) Lavoro eseguito, col sussidio del Consiglio Nazionale delle Ricerche, nell'Istituto di Fisiologia umana dell'Università di Bologna.

(**) Nella seduta del 19 novembre 1960.

(1) P. Crepax ed E. Fadiga, « Rend. Accad. Naz. Lincei », Cl. Sci. fis., mat. nat., serie 8ª, XXV, 327 (1958).

(2) P. Crepax ed E. Fadiga, « Arch. Sci. biol. », XLII, 385 (1958).

(3) G. Amantea, « Boll. r. Accad. med. Roma », XLVI, 121 (1920).

(4) G. Moruzzi, *L'épilepsie expérimentale*. Paris, Hermann (1950).

alla epilessia riflessa, si iniettava la morfina (cloridrato) per via intravenosa o sottocutanea e poi si procedeva al rilievo degli effetti che l'alcaloide veniva provocando tanto sull'attività corticocerebrale spontanea quanto sulle modificazioni osservabili nell'attività stessa per trattamento della corteccia motrice con stricnina e per applicazione alla periferia di stimoli riflessogeni e non riflessogeni. Rimandando il lettore al lavoro *in extenso* per una compiuta descrizione delle osservazioni eseguite, riferiremo in questa Nota intorno alle modificazioni provocate dalla morfina sull'automatismo corticocerebrale, sulla soglia della reazione di risveglio per stimolazione elettrica del N. ischiatico e sui fenomeni che nel centro motore stricninizzato si svolgono per effetto d'impulsi corticipeti. Facciamo presente che l'accesso, rilevabile all'esame elettroencefalografico, veniva provocato per stimolazione termica dell'area cutanea connessa funzionalmente col centro motore corticale del M. orbicolare delle palpebre e che le registrazioni (elettroencefalografo Grass mod. III D) si effettuavano da animali curarizzati (*d*–tubocurarina nella dose di 0,2 mg/kg i.v.) e soccorsi con la respirazione artificiale.

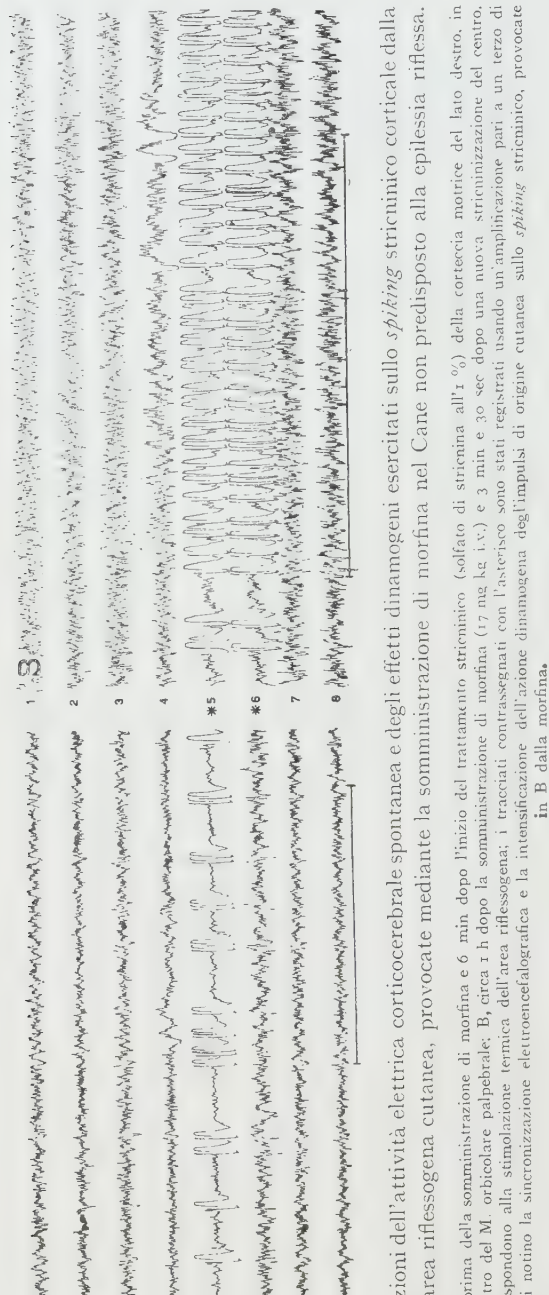


Fig. 1. – Modificazioni dell'attività elettrica corticocerebrale spontanea e degli effetti dinamogeni esercitati sullo *spiking* stricninico corticale dalla stimolazione dell'area riflessogena cutanea, provocate mediante la somministrazione di morfina nel Cane non predisposto alla epilessia riflessa.

A, tracciato registrato prima della somministrazione di morfina e 6 min dopo l'inizio del trattamento stricninico (solfato di stricnina all'1 %) della corteccia motrice del lato destro, in corrispondenza del centro del M. orbicolare palpebrale; B, circa 1 h dopo la somministrazione di morfina (17 mg/kg i.v.) e 3 min e 30 sec dopo una nuova stricninizzazione del centro. Le linee continue corrispondono alla stimolazione termica dell'area riflessogena; i tracciati contrassegnati con l'asterisco sono stati registrati usando un'amplificazione pari a un terzo di quella indicata in A. Si notino la sincronizzazione elettroencefalografica e la intensificazione dell'azione dinamogena degl'impulsi di origine cutanea sullo *spiking* stricninico, provocate in B dalla morfina.

1° *Effetti della somministrazione di morfina sull'attività elettrica corticocerebrale spontanea e sulla reazione di risveglio.* – Dopo la somministrazione del farmaco, compaiono

nei tracciati onde di notevole ampiezza (250–300 μV) e di bassa frequenza (3–8 Hz), mentre diminuisce grandemente il numero delle oscillazioni di scarso voltaggio (75–100 μV) e di frequenza relativamente elevata (30–35 Hz) che costituiscono la componente predominante dell'elettroencefalogramma dell'animale in stato di veglia (fig. 1). La durata di queste modificazioni dipende dalla quantità di morfina somministrata: per dosi corrispondenti a quelle minime efficaci (5–8 mg/kg per via sottocutanea; 3–5 mg/kg per via intravenosa), i tracciati elettroencefalografici permangono costituiti prevalentemente da onde ampie e di bassa frequenza per 10–15 min, mentre la durata di questo effetto sale a circa 30 min se viene raddoppiata la dose, e si prolunga fino a 50–60 min per dosi 4–5 volte superiori a quelle minime attive. Prescindendo da manifestazioni parossistiche [cfr. Wikler e Altschul [5]] che compaiono in modo apparentemente spontaneo per dosi di alcaloide assai elevate (30/40 mg/kg s.c.) e a ogni modo molto più forti di quelle sufficienti per ottenere la predisposizione, nell'aspetto formale le modificazioni rilevabili nell'elettroencefalogramma dopo l'iniezione di dosi predisponenti di morfina sono indipendenti dalla quantità del farmaco somministrata.

Trascorsi i limiti di tempo indicati, i tracciati palesano un progressivo aumento numerico delle onde frequenti e di scarsa ampiezza, le quali si alternano con le onde ampie e lente in un caratteristico succedersi di tratti attivati e di tratti sincronizzati: anche la durata di questa fase varia con la dose e di solito è pari a quella della fase in cui predominano i ritmi lenti [6].

Prima della somministrazione di morfina, la soglia del risveglio corticale ha oscillato tra V 0,7 e V 2,5, cioè tra valori all'incirca uguali a quelli determinati nei Cani predisposti [1,2]. Per effetto del trattamento si è visto che detta soglia s'innalza dapprima in modo costante, pur essendo le variazioni non proporzionali alla dose e quantitativamente diverse da caso a caso: i valori liminali si presentano sempre aumentati, quando per effetto di una sufficiente quantità di farmaco l'attività corticocerebrale assume l'aspetto sincronizzato dianzi descritto. In séguito, i valori della soglia possono permanere elevati per una lunga durata ovvero cominciare assai presto a decrescere più o meno rapidamente. In generale si può dire che la rapidità con cui si manifesta e procede questo abbassamento dei valori di soglia dipende essenzialmente dal valore dell'aumento iniziale: negli animali in cui esso è

(5) A. Wikler a. S. Altschul, « J. Pharmacol. exper. Therap. », XCVIII, 437 (1950).

(6) Si noti che il quadro suddetto non pare da interpretarsi come semplice espressione dell'attenuazione nel tempo dell'effetto dell'alcaloide, in quanto che in coincidenza col quadro stesso l'azione del farmaco è per altri rispetti ancora ben manifesta, e alcuni fenomeni corticali (come, per esempio, la risposta alla stricninizzazione locale e quella alla stimolazione dell'area riflessogena) la rivelano in modo più evidente di quello osservabile poco dopo l'inizio del trattamento. Si tratta di un dato che ha particolare interesse per il nostro studio, giacché è noto [Amantea, « Boll. r. Accad. med. Roma », L, 11 e 414 (1923–24)] che l'azione predisponente della morfina si manifesta con un notevole ritardo rispetto al tempo della somministrazione: iniettando per via sottocutanea dosi di 10 mg/kg, tale ritardo è di circa 2 h.

basso, entro 10–20 min si riscontrano di nuovo valori che sono nei limiti della variabilità normale. E quando i grafici palesano quel caratteristico alternarsi di tratti attivati e di tratti sincronizzati, osservabile qualche tempo dopo la somministrazione di morfina, la soglia del risveglio corticale corrisponde a quella determinata nel medesimo animale avanti l'iniezione del farmaco.

2° *Effetti della morfina sulle variazioni dello* spiking *stricninico dovute a impulsi corticipeti.* – Riassumiamo innanzi tutto i fenomeni che si notano nel Cane non predisposto prima della somministrazione di morfina, fenomeni descritti nei precedenti nostri lavori [1,2]. Negli animali non trattati, gli effetti degl'impulsi corticipeti sullo *spiking* del centro motore sono diversi secondo che si stimoli il N. ischiatico ovvero l'area cutanea connessa col centro stricninizzato: nel primo caso si ottiene una netta diminuzione della frequenza delle punte (« inibizione dello *spiking* »); nel secondo invece si nota sempre un netto, sebbene scarso, aumento della frequenza stessa (« intensificazione dello *spiking* »).

Il trattamento morfinico innalza il valore soglia degli stimoli che applicati al N. ischiatico provocano la inibizione dello *spiking*; quanto alla stimolazione riflessogena cutanea, l'azione aumentatrice che essa manifesta sugli ipersincronismi stricninici corticali appare nettamente facilitata dopo la somministrazione del farmaco (figg. 1 e 2). La importanza dell'effetto intensificatore esercitato sullo *spiking* dagli stimoli cutanei è diversa da caso a caso, e in uno stesso animale può variare significantemente in tempi successivi. Il fattore da cui in modo più chiaro dipende l'intensità dell'effetto, è non tanto la quantità di farmaco iniettata, quanto il tempo trascorso dalla sua somministrazione: nei Cani trattati con morfina le prove di stimolazione dell'area riflessogena eseguite in tempi successivi, entro la durata massima di 2 h, provocano in generale fenomeni di intensificazione dello *spiking* via via più netti e rilevanti [7].

3° *Condizioni funzionali che rendono attuabile l'accesso da eccitamenti afferenti nell'animale non predisposto e trattato con morfina.* – Nella nostra serie di osservazioni, l'azione dinamogena esercitata sullo *spiking* dalle stimolazioni cutanee è aumentata grandemente per effetto della morfina in circa i tre quarti dei casi (73 %). Dai rispettivi tracciati si rileva che quando

(7) Per esempio, in un Cane in cui avanti il trattamento la frequenza dello *spiking* era aumentata per effetto degli stimoli termici cutanei da un valore basale di 2,3/sec al valore di 4/sec, 27 min dopo l'introduzione intravenosa di morfina in dose di 17 mg/kg il valore di tale parametro per effetto dei medesimi stimoli salí da 2,1 a 5,8/sec, mentre 64 e 91 min dopo l'introduzione del farmaco si osservò un aumento rispettivamente da 3,1 a 6,9/sec e da 3 a 14/sec; con l'aumento della frequenza a quest'ultimo valore si notò, come specificheremo appresso, la generalizzazione dell'attività parossistica. In un altro animale, avanti il trattamento morfinico la variazione di frequenza dello *spiking* era stata da 1,6 a 5/sec; introdotti 22 mg/kg di morfina per via sottocutanea, la stimolazione dell'area riflessogena eseguita dopo 48, 71 e 96 min provocò rispettivamente un aumento di detta frequenza da 3,1 a 4/sec, da 2,6 a 10/sec e da 3 a 10/sec.

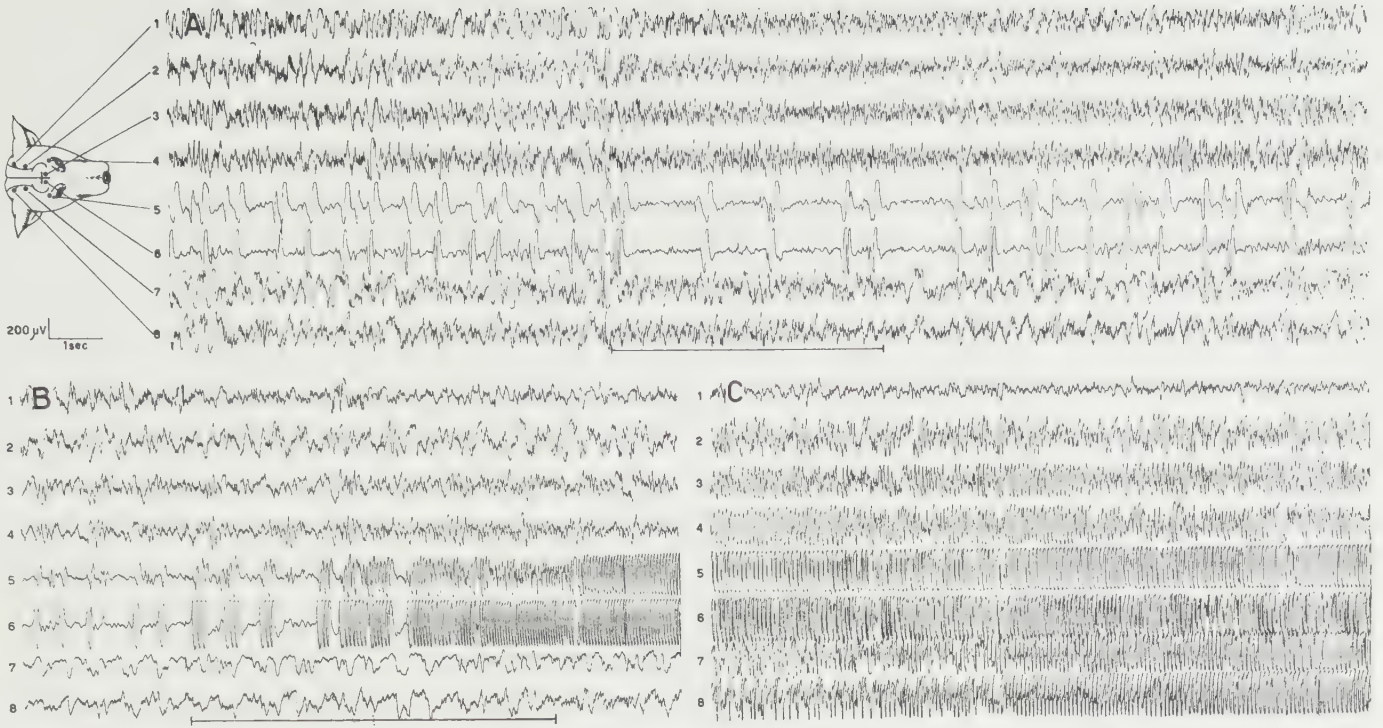


Fig. 2. – Effetti esercitati da impulsi centripeti di diversa origine sull'attività elettrica corticocerebrale spontanea e sullo *spiking* stricninico corticale, nel Cane non predisposto alla epilessia riflessa e trattato con morfina.

A, reazione di risveglio e inibizione dello *spiking* stricninico del centro sensitivo-motore corticale destro del M. orbicolare palpebrale, provocate per stimolazione del N. ischiatico (1 msec, 100 Hz, 1 V) 64 min dopo la somministrazione di morfina (21 mg/kg i.v.) e 1 min dopo l'applicazione di stricnina (solfato all'1 %); B, 5 min circa dopo A, intensificazione critica dello *spiking* stricninico per stimolazione termica dell'area riflessogena e inizio della diffusione dell'attività parossistica di alta frequenza; C, 6 sec dopo B, propagazione dell'accesso convulsivo a tutta la corteccia. Il voltaggio degli stimoli applicati in A al N. ischiatico era di poco sopraliminale e risultava pressoché identico al valore soglia determinato avanti il trattamento morfinico; gli effetti di varie stimolazioni dell'area riflessogena cutanea, attuate tra A e B e determinanti intensificazioni infracritiche dello *spiking* non sono stati riprodotti nella figura.

nell'area corticale stricninizzata la frequenza delle punte raggiunge valori di 11–13/sec, si attuano le condizioni funzionali per le quali ha luogo la propagazione dell'attività ipersincrona a tutta la corteccia. La cadenza critica appare quindi identica a quella precedentemente determinata nei Cani dotati di predisposizione naturale, e nell'aspetto elettrografico la generalizzazione del parossismo si effettua nel modo di cui ci siamo già diffusamente occupati

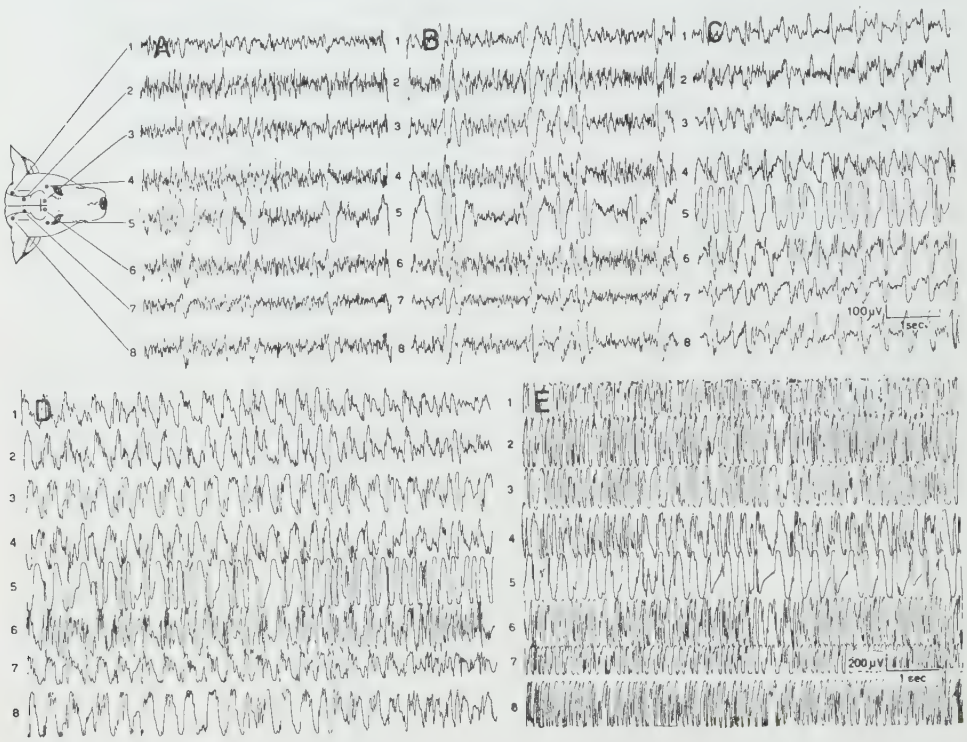


Fig. 3. – Propagazione di onde parossistiche di bassa frequenza a tutte le sedi di derivazione, nel Cane non predisposto alla epilessia riflessa e trattato con morfina.

A, tracciato ottenuto 90 min circa dopo la somministrazione di morfina (14 mg/kg s.c.) e 40 sec dopo l'inizio del trattamento stricninico della corteccia motrice del lato destro, in corrispondenza del centro del M. orbicolare palpebrale; B, 5 min dopo A e subito dopo ripetute stimolazioni dell'area riflessogena cutanea; C, 2 min dopo B e pochi secondi dopo una nuova stimolazione termica dell'area riflessogena; D ed E, rispettivamente 30 e 55 sec dopo C. In C, D ed E, si noti la progressiva diffusione dell'attività elettrica di tipo convulsivo, diffusione che si compie nonostante la bassa frequenza di *spiking* del centro stricninizzato. La soglia della reazione di risveglio per stimolazione del N. ischiatico, accertata tra A e B, corrispondeva a 5 V ed era circa quattro volte più elevata della soglia determinata prima del trattamento con morfina.

[Crepax e Fadiga [1,2]]. Di guisa che nella maggioranza dei Cani non predisposti il meccanismo mediante il quale il trattamento morfinico rende effettuabile la epilessia riflessa, sembra consistere essenzialmente nell'accrescere l'azione aumentatrice che sulla frequenza dello *spiking* di un centro motore stricninizzato esercitano gl'impulsi provenienti dalla rispettiva area cutanea riflessogena.

I dati raccolti da un secondo gruppo di Cani suggerirebbero tuttavia la possibilità che la morfina eserciti la sua azione predisponente anche mediante un meccanismo diverso da quello testé prospettato: nel 27 % dei casi,

anche dopo la somministrazione dell'alcaloide la intensificazione dello *spiking* provocata dalle stimolazioni cutanee non è risultata tale da raggiungere i valori critici di frequenza riscontrabili nel gruppo più numeroso, e la propagazione dell'attività parossistica a tutta la corteccia si è manifestata quando la cadenza delle punte era bassa (fig. 3). L'analisi dei risultati ottenuti saggiando gli effetti dell'alcaloide sulla soglia del risveglio corticale, ha permesso di stabilire che mentre nei Cani del primo gruppo dopo la somministrazione di morfina detta soglia non presenta variazioni cospicue e di solito è ritornata ai valori normali nel momento in cui lo *spiking* raggiunge la frequenza critica di generalizzazione, negli animali appartenenti al gruppo meno numeroso la generalizzazione dell'accesso avviene quando sono in atto altre modificazioni funzionali, anch'esse provocate dalla morfina e consistenti in un aumento della soglia del risveglio della corteccia cerebrale. In un certo senso, i risultati forniti dai Cani dell'uno e dell'altro gruppo sono reciprocamente complementari, giacché: *a*) in tutti gli animali in cui la generalizzazione dell'attività parossistica si è manifestata per bassi valori di scarica del centro trattato con stricnina, la soglia della reazione di risveglio risultava aumentata in modo notevole alla comparsa dell'accesso; *b*) in nessuno degli animali in cui la comparsa dell'accesso di epilessia riflessa ha coinciso con l'instaurarsi di alte frequenze di scarica nel centro stricninizzato, la soglia del risveglio corticale appariva elevata nel tempo immediatamente precedente alla diffusione dell'attività convulsiva. Ritenere che tra l'abbassamento della reattività reticolare e la propagazione intracorticale delle onde convulsive di bassa frequenza esista un nesso causale, sembra dunque un'ipotesi accettabile. Quanto alla ragione per cui il meccanismo fondato sulla intensificazione dello *spiking* sembra essere nella maggioranza delle nostre osservazioni quello prevalente, i presenti risultati non forniscono elementi che consentano ipotesi. Essi permettono solo di rilevare un dato di fatto.

Fisiologia. — *Modificazioni dei ritmi pulsatori dell'ippocampo e del* neocortex *provocate dalla stimolazione elettrica ripetitiva del nervo ischiatico* (*). Nota di RUGGERO CORAZZA e PIER LUIGI PARMEGGIANI, presentata (**) dal Socio G. C. PUPILLI.

Ricerche recenti [Parmeggiani (1,2)] hanno mostrato che nel Gatto libero e non narcotizzato una stimolazione intensa (1,5–3 V; 4–17/sec; 30–60 sec) della sostanza reticolare mesencefalica può provocare un comportamento da sonno a *rebound*: dopo la fine della stimolazione l'animale sbadiglia, procede alla pulizia del corpo, ricerca un posto in cui adagiarsi, si acciambella e infine si addormenta più o meno profondamente. A tale riguardo mette conto di notare che nel Coniglio, nel Gatto e nella Scimmia, curarizzati e non narcotizzati, la stimolazione elettrica ripetitiva (1–5 V; 1 msec; 100/sec; 1–5 sec) del sistema reticolare ascendente provoca la sincronizzazione dell'attività elettrica dell'ippocampo [Arduini, Arduini e Green (3), Green e Arduini (4)], la quale può persistere anche dopo la fine della stimolazione; nell'elettrogramma registrato da tale sede compaiono onde di aspetto sinusoidale dell'ampiezza di 100–200 μV e della frequenza di 3–6/sec. Poiché questo effetto presenta caratteristiche completamente opposte a quelle della reazione di risveglio corticale, anch'essa ottenibile per stimolazione della formazione reticolare [Moruzzi e Magoun (5)], è sembrato logico mettere in relazione la sincronizzazione dell'attività elettrica dell'ippocampo col comportamento da sonno a *rebound*. Questo comportamento medesimo, che si palesa nelle condizioni esposte, induce infatti a considerare l'intervento dell'ippocampo anche a causa dell'analogia che esso presenta con gli effetti ottenibili per stimolazione diretta di tale struttura [Parmeggiani (6)].

Ci siamo proposti d'indagare nel Gatto gli aspetti dell'attività elettrica del *neocortex* durante la sincronizzazione dei ritmi pulsatori dell'ippocampo: i dati che esponiamo nella presente Nota, concernono le modificazioni che nell'animale curarizzato e non narcotizzato presenta l'attività elettrica delle strutture anzidette per effetto della stimolazione ripetitiva del N. ischiatico.

In narcosi eterica si procedeva alla introduzione di una cannula in trachea, allo scollamento dei tessuti pericranici e alla introduzione di un cate-

(*) Lavoro eseguito, col sussidio del Consiglio Nazionale delle Ricerche, nell'Istituto di Fisiologia umana dell'Università di Bologna.

(**) Nella seduta del 19 novembre 1960.

(1) P. L. PARMEGGIANI, « Helv. physiol. Acta », XVI, C 73 (1958).

(2) P. L. PARMEGGIANI, « Boll. Soc. it. Biol. sper. », XXXV, 2016 (1959).

(3) A. ARDUINI, M. G. ARDUINI a. J. D. GREEN, « EEG clin. Neurophysiol. », V, 473 (1953).

(4) J. D. GREEN a. A. A. ARDUINI, « J. Neurophysiol. », XVII, 533 (1954).

(5) G. MORUZZI a. H. W. MAGOUN, « EEG clin. Neurophysiol. », I, 455 (1949).

(6) P. L. PARMEGGIANI, « Helv. physiol. Acta », XVII, C 34 (1959).

tere, a permanenza, nella V. femorale sinistra. Il N. ischiatico dell'arto destro veniva poi isolato nella regione posteriore della coscia e sul capo centrale del nervo reciso era posto un eccitatore dipolare in Ag—AgCl. A questo punto le ferite operatorie erano sottoposte ad anestesia locale mediante una soluzione (1 %) di Novocaina, mentre la profondità della narcosi veniva gradualmente ridotta. Terminato l'intervento preparatorio, l'animale era sottoposto a curarizzazione mediante Sincurarina (2–5 mg/kg, per via intravenosa) e soccorso con la respirazione artificiale; la curarizzazione era quindi mantenuta per tutta la durata delle registrazioni. I tracciati neocorticali sono stati derivati col metodo monopolare e con quello dipolare, in quest'ultimo caso la distanza interelettrodica essendo di circa 5 mm: abbiamo utilizzato elettrodi a vite, la cui punta giungeva in contatto della superficie esterna della dura madre. L'attività elettrica della porzione dorsale dell'ippocampo era derivata col metodo monopolare mediante elettrodi di Hess [7] del diametro di 0,25 mm, ricoperti da un sottile rivestimento di vernice isolante fuorché per un tratto di 0,5 mm in prossimità della punta. In tutti i casi di derivazione monopolare, l'elettrodo indifferente era costituito da una pinzetta a coccodrillo fissata su uno dei lembi cutanei della ferita operatoria, in corrispondenza della nuca o dei seni frontali. La registrazione è stata fatta per mezzo di un elettroencefalografo Grass mod. III D.

Per la stimolazione del N. ischiatico abbiamo utilizzato impulsi rettangolari della durata di 1 msec, dei quali si facevano variare il voltaggio e la frequenza: essi erano forniti da uno stimolatore Grass mod. S4B e giungevano al preparato attraverso un dispositivo (*stimulus isolation unit*, fabbricato dalla Ditta costruttrice dello stimolatore) atto a ridurre l'artefatto della stimolazione. A fine di studiare l'effetto dell'applicazione locale di cocaina sull'attività elettrica del *neocortex*, si praticava un'apertura circolare del diametro di 1–2 cm circa nel tavolato cranico e nella dura di due regioni simmetriche delle aree occipitali. Il trattamento di una sola delle due porzioni di corteccia messa allo scoperto, servendo l'altra da controllo, era attuato mediante l'apposizione di un dischetto di carta bibula del diametro di 5 mm, imbevuto della soluzione in esame, sulla superficie della corteccia medesima. Dalla quale superficie era effettuata la derivazione dei potenziali elettrici col metodo monopolare, mediante elettrodi costituiti da un filo di argento del diametro di 70 μ, la cui estremità libera veniva arrotondata alla fiamma e clorurata; come elettrodo indifferente era utilizzato quello impiegato per le altre derivazioni corticali. Il controllo istologico della posizione degli elettrodi nell'ippocampo era eseguito su sezioni seriate, colorate col metodo di Nissl, delle formazioni encefaliche esplorate.

L'attività spontanea derivabile dall'ippocampo nel Gatto curarizzato e non narcotizzato è in generale costituita da onde dell'ampiezza di 150–

(7) W. R. Hess, *Beiträge zur Physiologie des Hirnstammes. – I. Die Methodik der lokalisierten Reizung und Ausschaltung subkortikaler Hirnabschnitte*. Leipzig, Georg Thieme (1932), pp. 43–51.

400 μV e della frequenza pari a 1–3/sec (più raramente 4–5/sec), alle quali si alternano oscillazioni di potenziale di minore ampiezza (20–150 μV) e di maggiore frequenza (12–36/sec). Queste ultime possono anche inscriversi sul contorno delle onde ampie e di bassa frequenza, rendendolo così alquanto irregolare.

La stimolazione ripetitiva del N. ischiatico con stimoli di voltaggio pari a 0,5–3 V, della frequenza di 100/sec e per una durata di 4–20 sec, provoca una netta modificazione dei ritmi pulsatori dell'ippocampo: nel maggior numero dei casi si osserva la sincronizzazione dell'attività elettrica derivata da questa struttura. Tale sincronizzazione è nell'elettrogramma con-

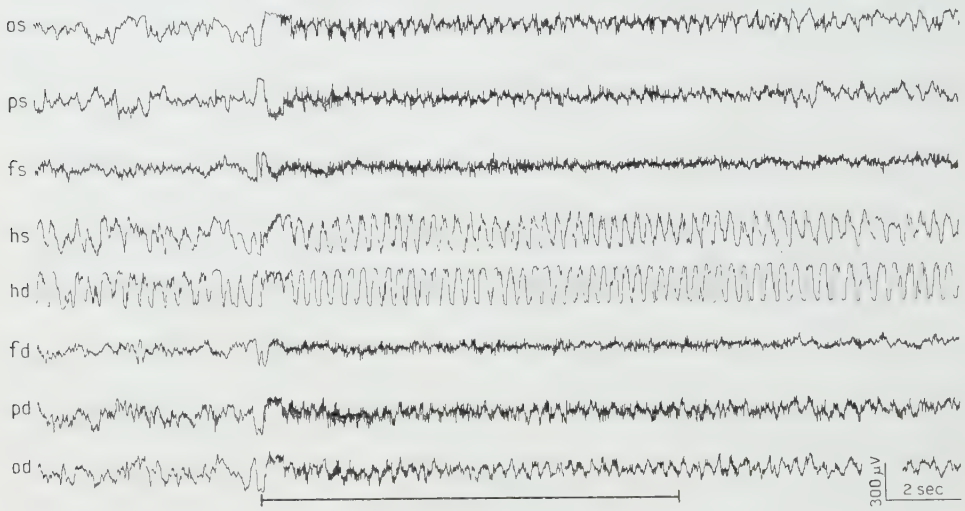


Fig. 1. – Modificazioni dell'attività elettrica dell'ippocampo e della neocorteccia provocate dalla stimolazione elettrica ripetitiva del N. ischiatico nel Gatto con encefalo integro.

Animale curarizzato e non narcotizzato. Si noti che la stimolazione del N. ischiatico destro (2 V; 100/sec; 1 msec) provoca la sincronizzazione dei ritmi pulsatori dell'*archicortex* e la comparsa di un ritmo di onde di bassa frequenza nei tracciati derivati dalle aree occipitali e parietali del *neocortex*. In questa e nelle figure successive le lettere che precedono ciascun elettrogramma indicano la sede dalla quale è stata effettuata la derivazione dei potenziali (os = area occipitale sinistra; ps = area parietale sinistra; fs = area frontale sinistra; hs = ippocampo sinistro; hd = ippocampo destro; fd = area frontale destra; pd = area parietale destra; od = area occipitale destra) e la linea sotto i tracciati indica il momento e la durata della stimolazione del nervo. Gli elettrogrammi riprodotti in questa e nelle figure successive sono stati registrati mediante il metodo monopolare.

traddistinta dalla comparsa di onde dell'ampiezza di 200–500 μV e in generale della frequenza di 3–5/sec (talora 2–6/sec), le quali nell'insieme ripetono l'aspetto di una curva sinusoidale (fig. 1). L'effetto descritto è in generale manifesto, per un tempo più o meno lungo (4–60 sec), anche dopo la fine della stimolazione: è dunque rilevabile un effetto postumo. Quando la frequenza delle onde sinusoidali durante la stimolazione corrisponde ai valori più bassi (pari a 2–3/sec), al cessare di questa si può osservare un improvviso aumento della frequenza delle pulsazioni (4–5/sec). In ogni caso l'elettrogramma riprende poi l'aspetto che aveva prima della stimolazione.

Talora la stimolazione periferica provoca una desincronizzazione più o meno accentuata dell'attività elettrica dell'ippocampo: il tracciato è costituito, in grande prevalenza, da onde dell'ampiezza di 20–150 μV e della fre-

quenza di 15–36/sec, alle quali si alternano spesso onde di maggior ampiezza (100–400 μV) e di minore frequenza (2–4/sec); al cessare della stimolazione periferica, d'ordinario si nota la subitanea comparsa di onde dell'ampiezza di 200–500 μV e della frequenza di 3–5/sec, le quali ripetono un aspetto sinusoidale (fig. 2). Va rilevato il fatto che in tali casi la sincronizzazione dei ritmi pulsatori dell'ippocampo si manifesta con le caratteristiche di una reazione a *rebound*; e analogamente a quanto si può osservare per l'effetto postumo descritto in precedenza, anche la sincronizzazione a *rebound* gradatamente si modifica, le onde sinusoidali diminuendo progressivamente di frequenza, mentre si fanno palesi pulsazioni di minor ampiezza (20–150 μV) e di frequenza pari a 12–36/sec.

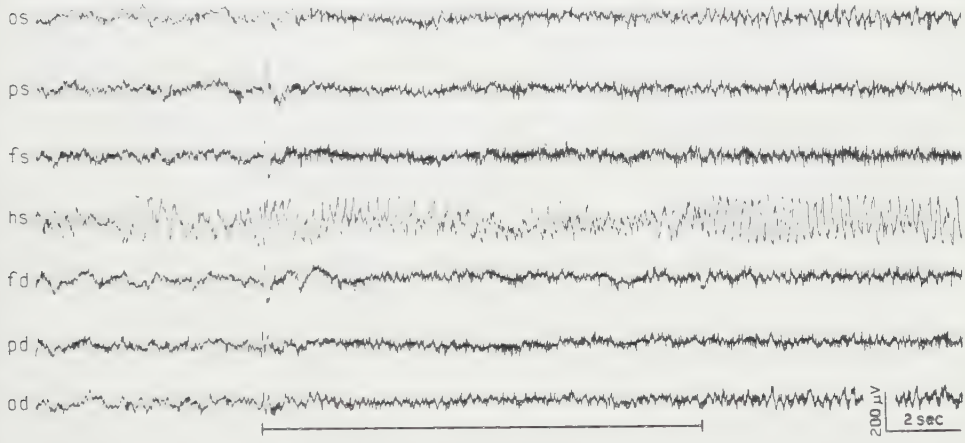


Fig. 2. – Modificazioni dell'attività elettrica dell'ippocampo e della neocorteccia provocate dalla stimolazione elettrica ripetitiva del N. ischiatico nel Gatto con encefalo integro.

Animale curarizzato e non narcotizzato. Si noti che per effetto della stimolazione del N. ischiatico destro (3 V; 100/sec; 1 msec) la sincronizzazione dei ritmi pulsatori dell'ippocampo si manifesta con le caratteristiche di una reazione a *rebound* e che un ritmo di onde di bassa frequenza si fa palese negli elettrogrammi derivati dalle aree occipitali del *neocortex*.

La stimolazione elettrica ripetitiva del N. ischiatico con stimoli di voltaggio pari a 0,5–3 V e della frequenza di 20/sec ovvero 4/sec ha in genere un effetto sincronizzante, che è più netto durante la stimolazione; l'effetto postumo è più evidente con l'impiego di voltaggi elevati (2–3 V).

Per quanto concerne l'elettroencefalogramma del Gatto curarizzato e non narcotizzato, si sa che esso è costituito da onde dell'ampiezza di 20–100 μV e della frequenza di 15–36/sec, alle quali si alternano onde di maggior ampiezza (100–200 μV) e minore frequenza (8–15/sec): occorre per altro far notare come siano anche osservabili, sia pure in scarso numero, oscillazioni di potenziale dell'ampiezza di 100–200 μV e della frequenza di 1–3/sec, le quali appaiono isolate ovvero riunite in gruppi (2–7 unità) secondo un ritmo irregolare. La stimolazione elettrica ripetitiva del N. ischiatico (0,5–3 V; 4–20–100/sec; 4–20 sec), nelle condizioni di veglia elettroencefalografica descritte, provoca le seguenti modificazioni dell'attività elettrica del *neocortex*: la frequenza delle onde si sposta verso i valori più elevati (30–40/sec) e gene-

ralmente, sullo sfondo costituito dalle onde frequenti e poco ampie, compare un ritmo evidente di oscillazioni di potenziale della frequenza di 2–5/sec e di ampiezza che va progressivamente crescendo fino ad un massimo di 200 μV (fig. 1). Tali oscillazioni di potenziale, che denomineremo onde di bassa frequenza, sono presenti nei tracciati neocorticali anche dopo la fine della stimolazione e per una durata variabile (4–60 sec). La loro ampiezza può mantenersi costante ovvero palesare ripetute e regolari variazioni prima in diminuzione e poi in aumento (*waxing and waning*): in quest'ultimo caso le onde appaiono riunite in gruppi, costituiti da un numero variabile di unità (3–20). La frequenza di tali onde viene poi progressivamente riducendosi e da ultimo il tracciato riprende l'aspetto che aveva prima della stimolazione.

Il ritmo delle onde di bassa frequenza può palesarsi anche solo dopo la fine della stimolazione (fig. 2): più spesso ciò accade, quando si stimoli il nervo con impulsi di voltaggio elevato (2–3 V) e di frequenza pari a 100/sec.

Quanto alla distribuzione delle aree emisferiche da cui si derivano onde di bassa frequenza, facciamo presente che essa non è costantemente simmetrica e che le onde si rendono più facilmente manifeste nei tracciati derivati dalle aree occipitali e parietali che da quelle frontali. La comparsa di un quadro elettroencefalografico di sonno dopo la fine della stimolazione del nervo è stata osservata solo in alcuni casi.

Il confronto fra i tracciati neocorticali e quelli derivati contemporaneamente dall'ippocampo, dà evidenza al fatto che un ritmo di onde di bassa frequenza si manifesta in generale nei primi, solo quando la stimolazione elettrica ripetitiva del nervo provoca la comparsa delle manifestazioni di un'attività sincronizzata nei secondi (cfr. figg. 1 e 2). Di regola le onde di bassa frequenza si fanno palesi con ritardo assai variabile (0,1–15 sec) rispetto al momento in cui ha inizio la sincronizzazione dei ritmi pulsatori dell'*archicortex*.

È necessario infine ricordare che le onde neocorticali di bassa frequenza e quelle sinusoidali dell'ippocampo mostrano valori di frequenza spesso uguali e al contrario variazioni di ampiezza indipendenti tra loro.

Per effetto dell'applicazione topica di cocaina (sciolta al 5 % in soluzione di NaCl al 9 ‰) sulla superficie di un'area occipitale, l'ampiezza delle oscillazioni di potenziale spontanee derivate dalla regione del *neocortex* trattata col farmaco si riduce: scompaiono quasi completamente le oscillazioni di potenziale rapide, mentre sono ancora presenti oscillazioni di frequenza pari a 2–15/sec e di ampiezza variabile (40–200 μV). Durante una stimolazione ripetitiva del N. ischiatico, la quale provochi la caratteristica sincronizzazione dell'attività elettrica dell'ippocampo, è possibile notare che le oscillazioni di potenziale di una certa ampiezza ancora registrabili dalla porzione di corteccia cocainizzata sono meno ampie (40–80 μV) di quelle osservabili, per effetto della stessa stimolazione, prima dell'applicazione del farmaco. Si noti che la morfologia delle onde descritte non è quella medesima delle oscillazioni di potenziale derivate contemporaneamente dall'ippocampo.

Nel corso degli esperimenti compiuti col farmaco abbiamo anche potuto dimostrare che la comparsa delle onde di bassa frequenza per stimolazione

del N. ischiatico fa del tutto difetto, se la temperatura dell'area corticale di derivazione si abbassa fino a circa 29–30° C (fig. 3).

Le modificazioni dei ritmi pulsatori che si osservano nell'elettrogramma dell'ippocampo per effetto della stimolazione elettrica ripetitiva del N. ischiatico, non presentano sostanziali differenze da quelle ottenute da altri Autori con stimolazioni elettriche centrali e periferiche ovvero con l'applicazione di stimoli specifici [Jung e Kornmüller [8], MacLean, Horwitz e Robinson [9], Green e Arduini [4], Liberson e Cadilhac [10], Liberson e Akert [11], Grastyán, Lissák, Madarász e Donhoffer [12], Tokizane, Kawakami e Gellhorn [13], Iwata e Snider [14]]. Le presenti ricerche dimostrano che alla sincronizzazione dell'attività elettrica dell'ippocampo, ottenuta nelle condizioni sperimentali indicate, si associa la comparsa di onde di bassa frequenza nei tracciati neocorticali. Gli effetti provocati dall'applicazione topica di cocaina

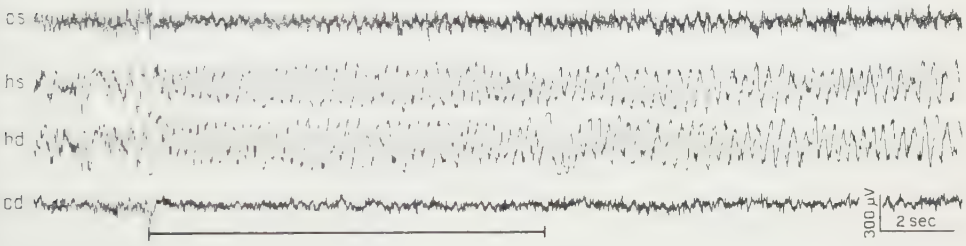


Fig. 3. – Effetto del raffreddamento del *neocortex* sulle modificazioni dell'attività elettrica neocorticale provocate dalla stimolazione elettrica ripetitiva del N. ischiatico nel Gatto con encefalo integro.

Animale curarizzato e non narcotizzato. La temperatura dell'area occipitale destra è stata portata da 37° C a 29° C prima della stimolazione del N. ischiatico destro (1 V; 100/sec; 1 msec). Si noti che le onde di bassa frequenza fanno difetto nell'elettrogramma derivato dalla regione di corteccia raffreddata.

sul *neocortex* ovvero dal raffreddamento del medesimo escludono che le onde di bassa frequenza siano la espressione di una trasmissione nel volume conduttore dei potenziali dell'*archicortex* e dimostrano invece che esse sono manifestazioni bioelettriche neocorticali. Altri dati inducono ad escludere la possibilità di un'origine fisica di tali onde: così esse palesano per lo più un ritardo considerevole rispetto alla comparsa del ritmo sinusoidale dell'ippocampo; inoltre le variazioni di ampiezza delle oscillazioni di potenziale derivate dalle due sedi sono tra loro indipendenti.

(8) R. Jung u. A. E. Kornmüller, « Arch. Psychiatr. », CIX, 1 (1938).

(9) P. D. MacLean, N. H. Horwitz a. F. Robinson, « Yale J. Biol. Med. », XXV, 159 (1952).

(10) W. T. Liberson a. J. G. Cadilhac, « EEG clin. Neurophysiol. », VI, 710 (1954).

(11) W. T. Liberson a. K. Akert, « EEG clin. Neurophysiol. », VII, 211 (1955).

(12) E. Grastyán, K. Lissák, I. Madarász a. H. Donhoffer, « EEG clin. Neurophysiol. », XI, 409 (1959).

(13) T. Tokizane, M. Kawakami a. E. Gellhorn, « EEG clin. Neurophysiol. », XI, 431 (1959).

(14) K. Iwata a. R. S. Snider, « EEG clin. Neurophysiol. », XI, 439 (1959).

Fisiologia. – *Modificazione dell'ampiezza del potenziale d'azione della singola fibra muscolare e nella tensione dell'intero muscolo in rapporto alla frequenza di stimolazione del nervo* (*). Nota di Maria Luisa Sotgiu e A. Angelo Zuddas, presentata (**) dal Socio R. Margaria.

Krnievic & Miledi (1958) dimostrarono che stimolando un preparato neuromuscolare con frequenze di 50 al secondo o superiori si osserva dopo pochi secondi che non tutti gli impulsi riescono a giungere al muscolo; questo blocco ha luogo a livello della placca motrice. Tale fenomeno si verifica anche con frequenze non molto maggiori di 10 al secondo, ma dopo un tempo di stimolazione assai più lungo, di qualche minuto.

Boyarsky (1958) mise in evidenza una diminuzione progressiva delle fibre muscolari attive in preparato neuromuscolare quando la frequenza di stimolazione del nervo superava 10–20 al secondo, e interpretò questo risultato come dovuto a insufficiente liberazione del trasmettitore chimico in seguito ad esaurimento del precursore nella terminazione delle fibre nervose. Tuttavia non è ancora ben chiaro se vi siano modificazioni del potenziale d'azione della singola fibra muscolare prodotte da carenza di trasmettitore chimico, quali è presumibile si verifichino quando la frequenza di stimolazione è tale da interrompere la conduzione giunzionale. Infatti, quando si riducano i fenomeni chimici ed elettrici della placca motrice, il potenziale d'azione può scomparire bruscamente o presentare prima della scomparsa modificazioni dei suoi caratteri.

Si è voluto perciò studiare dal punto di vista quantitativo la relazione esistente tra il decremento dell'attività elettrica della placca e della singola fibra dovuto a fatica e le modificazioni indotte nella tensione sviluppata dal muscolo.

In un gruppo di 20 cavie tenute in lieve narcosi eterea, si è isolato e tagliato il nervo sciatico centralmente in prossimità della sua origine. Si è poi isolato il gastrocnemio, mantenendo intatta l'irrorazione vasale. Il tendine è stato collegato ad un elettrotensiometro per la determinazione della tensione sviluppata dal muscolo *in toto*. Il muscolo era mantenuto umido con Ringer per tutta la durata dell'esperimento; il nervo, appoggiato su due elettrodi d'argento clorurati per la stimolazione, era parimenti protetto dall'essiccazione con olio di paraffina. Si sono tenuti gli elettrodi stimolatori il più possibile lontani dal muscolo per evitare artefatti o la stimolazione diretta del muscolo stesso. Per la registrazione del potenziale d'azione della

(*) Dall'Istituto di Fisiologia Umana dell'Università di Sassari.
(**) Nella seduta del 19 novembre 1960.

singola fibra muscolare si sono usati microelettrodi bifilari costituiti da due fili d'argento smaltato del diametro di 30 μ posti in un ago da iniezioni che veniva infisso nello spessore del muscolo: l'ago era posto a massa. In questo modo si è ottenuta la massima selettività (Gualtierotti & Milla, 1942).

Si è considerato potenziale d'azione di una singola fibra quello che compariva bruscamente ad una determinata intensità di stimolazione–

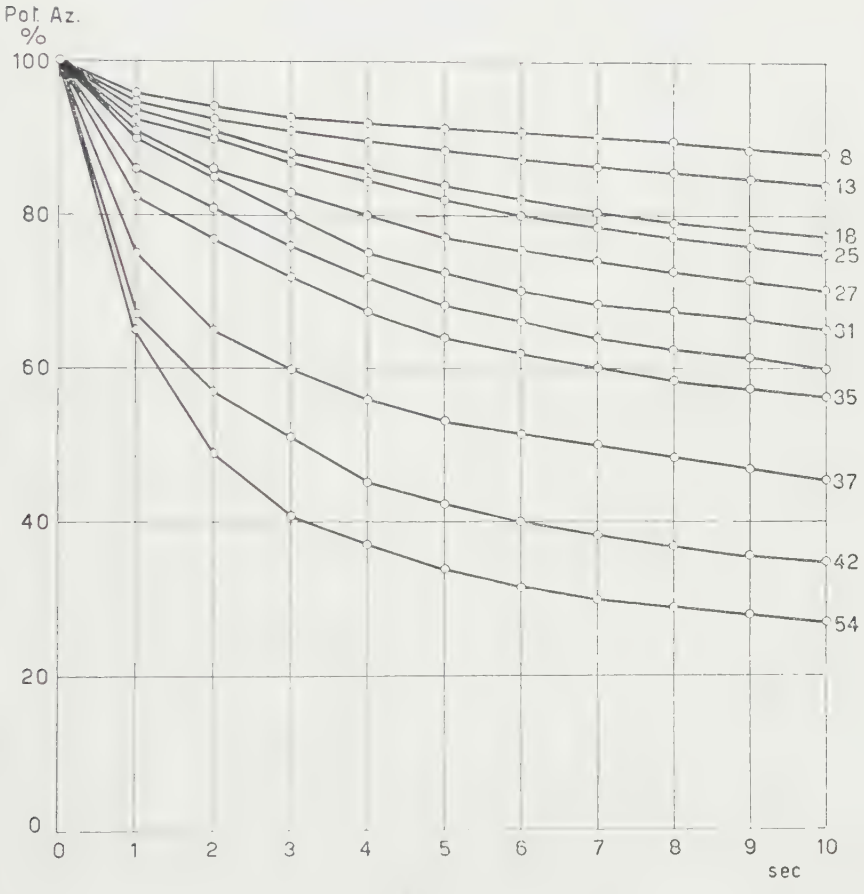


Fig. 1.

Preparato neuromuscolare di cavia: sciatico e gastrocnemio. Variazione del potenziale d'azione a diverse frequenze. Sulla ascissa tempo di stimolazione in secondi. Sull'ordinata valori in percentuale dell'ampiezza del potenziale d'azione. Si tratta di curve iperboliche esprimibili con l'equazione

$$V_t = V_0 (t + 1)^{-d}$$

soglia ed era indipendente da ulteriori modificazioni dell'intensità dello stimolo.

La registrazione dei potenziali d'azione muscolari è stata eseguita mediante un amplificatore differenziale ad alta discriminazione ed un canale di un oscillografo catodico a due tracce; sull'altro canale si registravano simultaneamente le tensioni meccaniche prodotte dal muscolo *in toto*.

Con uno stimolatore ad uscita in radio–frequenza si è stimolato il nervo per una durata costante di 10 secondi con impulsi elettrici rettangolari negativi sopramassimali a frequenze variabili fra 8 e 54 per secondo.

Dai risultati, riassunti nella fig. 1, si rileva che l'ampiezza del potenziale d'azione diminuisce progressivamente in misura tanto maggiore quanto maggiore è la frequenza.

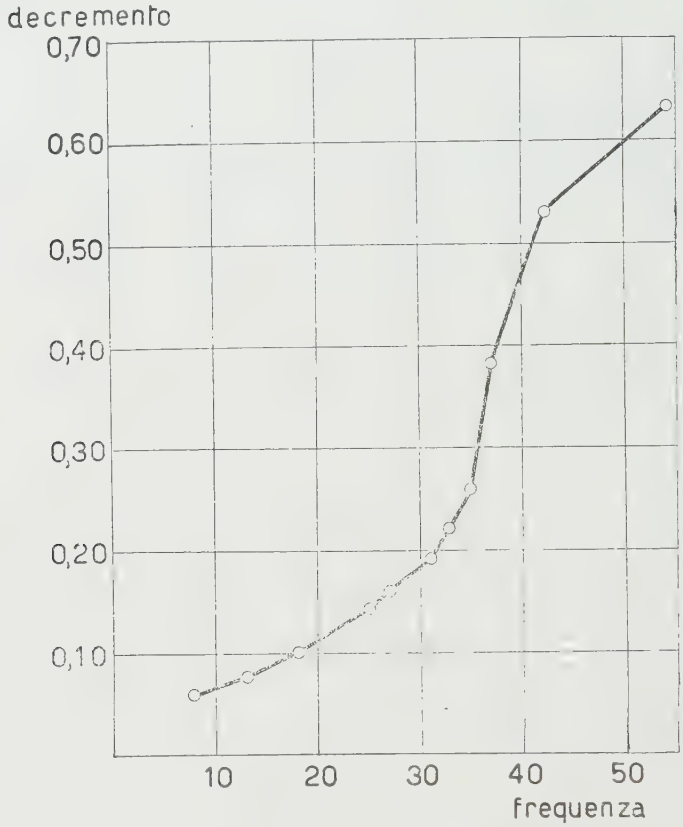


Fig. 2.

Preparato come nella fig. 1. La curva mostra come varia il decremento « d » del potenziale d'azione, a diverse frequenze di stimolazione. Sull'ascissa frequenze di stimolazione. Sull'ordinata valori del decremento.

Tutte le curve sono con buona approssimazione iperboli, che possono essere descritte dall'equazione

$$V_t = V_o (t + 1)^{-d}$$

in cui « V_t » e « V_o » sono i potenziali ai tempi risp. « t » e « o », « t » il tempo dall'inizio della stimolazione e « d » il decremento nell'unità di tempo. « d » varia, con la frequenza di stimolo, da un valore di 0,63 a 54/sec ad un valore di 0,06 a 8/sec. La diminuzione di « d » in funzione della frequenza non avviene linearmente, ma secondo la curva della fig. 2.

Per analizzare contemporaneamente i due fenomeni elettrico e meccanico si è usata una frequenza limite di 8/sec; a valori superiori interveniva il tetano e la tensione dovuta ad un singolo impulso non era più misurabile direttamente.

Anche in questi esperimenti il tempo di stimolazione è stato di 10 secondi. Si sono costruite due curve, una per il potenziale d'azione ed una per la contrazione meccanica, le quali rappresentano la media di 10 curve simili (fig. 3). Dall'esame delle curve si vede che i due fenomeni hanno lo

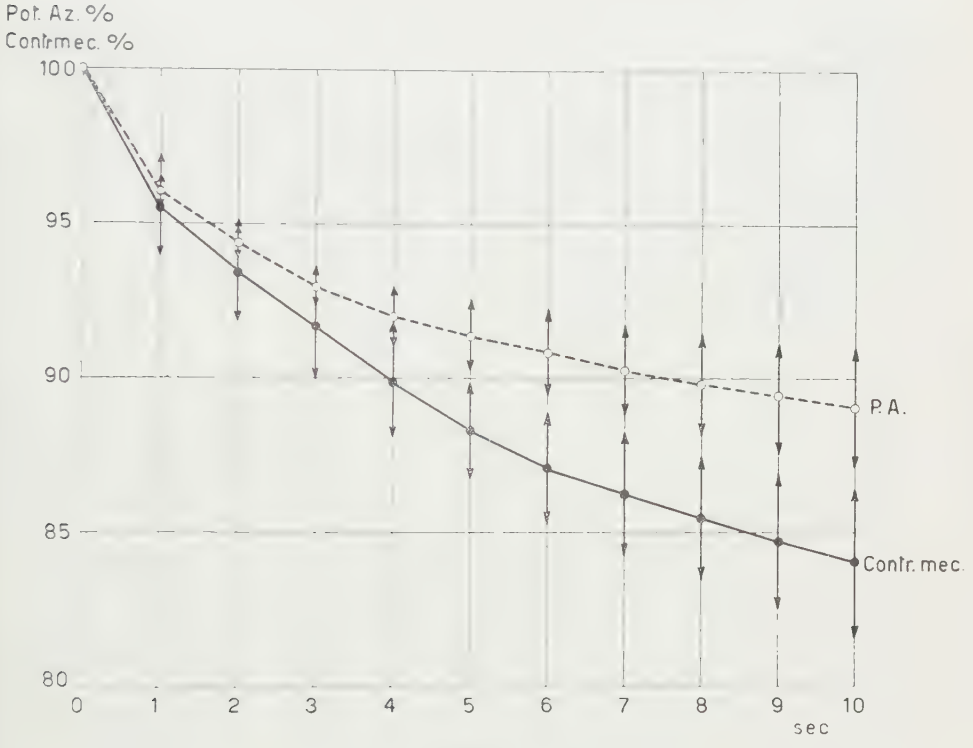


Fig. 3.

Preparato come nella fig. 1. Variazione dell'ampiezza del potenziale d'azione (linea tratteggiata) e della contrazione meccanica (linea continua) dopo 10 secondi di stimolazione ad una frequenza di 8/sec. Ognuna delle due curve rappresenta la media di 10 curve simili. Sull'ascissa tempo di stimolazione in secondi. Sull'ordinata variazioni in percentuale dell'ampiezza.

stesso andamento, variando soltanto l'entità del decremento, che è del 16 % per il fenomeno meccanico, mentre è dell'11 % per il potenziale d'azione. La differenza e statisticamente significativa.

Le variazioni d'ampiezza del potenziale d'azione osservate non sono in contrasto con la legge del tutto o nulla, la quale riguarda solamente l'energia necessaria perché si attui il potenziale, indipendentemente dall'intensità dello stimolo, purché questo sia sopraliminale. Quindi, a quanti costanti di energia, l'ampiezza del potenziale d'azione può variare, come avviene in molti casi; ad esempio, nel nervo, quando l'impulso percorre un tratto

sede di una stimolazione anodica o catodica, o in seguito a condizioni ambientali, quali variazioni ioniche, ecc.

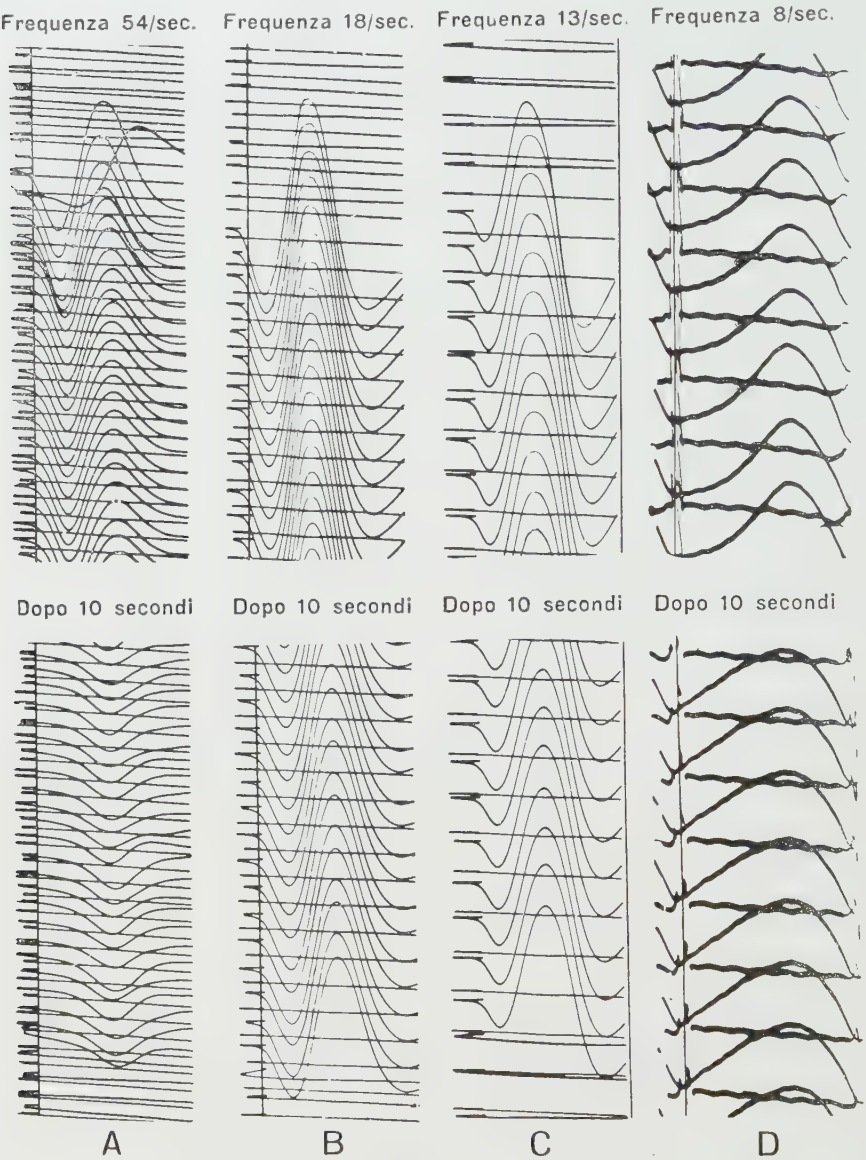


Fig. 4.

Preparato neuromuscolare di cavia. Stimolazione dello sciatico e registrazione del gastrocnemio. Variazione dell'ampiezza del potenziale d'azione dopo 10 secondi di stimolazione a diverse frequenze (A, B, e C). Variazione dell'ampiezza della contrazione meccanica dopo 10 secondi di stimolazione (D). Asse dei tempi in A, B e C = 5 msec; in D = 150 msec.

In seguito ad attività ritmica avvengono fenomeni che presumibilmente alterano il « rendimento elettrico », oppure diminuiscono i « quanti » d'energia liberati ad ogni scossa muscolare. Che la legge del tutto o nulla sia rispettata

è dimostrato dal fatto che il potenziale d'azione non varia col variare dello stimolo per ogni determinata condizione sperimentale.

Dall'analisi dei nostri dati risulta inoltre che il fenomeno meccanico e quello elettrico hanno un andamento simile, che cioè alla variazione variabilità del potenziale d'azione della fibra muscolare corrisponde un'analoga variabilità della contrazione meccanica: ciò fa supporre che vi sia un nesso tra i due fenomeni, per accertare la natura del quale sono in corso ulteriori esperimenti.

Bibliografia.

L. L. Boyarsky, « Rendic. Acc. Naz. Lincei », *24*, 728 (1958).
T. Gualtierotti & E. Milla, « Pflüg. Arch. ges. Physiol. », *245*, 524 (1942).
K. Krnievic & R. Miledi, « J. Physiol. », *140*, 440 (1958).

Fisiologia umana. — *L'attitudine fagocitaria ed il comportamento citochimico dei leucociti essudati in peritoneo nel corso del digiuno prolungato e della malnutrizione calorica* (*). Nota di GAETANO LIVREA e FERRUCCIO DE STEFANO, presentata (**) dal Corrisp. G. AMANTEA.

La dibattuta questione dei rapporti tra disordini qualitativi e quantitativi della nutrizione e processi difensivi è stata oggetto di un attento esame da parte di Livrea [1], il quale in una rassegna critica ha prospettato ed analizzato tutte le possibilità, con cui i disordini della nutrizione possono agire sui processi di difesa.

Per quanto riguarda i fattori cellulari dell'immunità naturale propriamente detta, dopo aver sottolineato la mancanza di adeguati dati circa il comportamento dell'attitudine fagocitaria delle varie famiglie cellulari dell'organismo in inanizione e malnutrizione, Livrea ha sostenuto che tale attitudine « si estrinseca con modalità che richiedono indubbiamente la presenza di enzimi, sia che si tratti dei fattori che costituiscono od influenzano la capacità d'inglobare (mobilità ameboide, potere chemiotattico, potere opsonico), sia che si tratti, soprattutto, della capacità a digerire il materiale inglobato. Ai fermenti proteolitici (catepsine), mucopolisaccarolitici (lisozima), ossidasici e perossidasici e forse anche lipolitici, spetta un posto preminente nel determinismo dell'immunità naturale. Lo stesso può dirsi degli enzimi dei macrofagi, per quanto meno noti. Ora, a nostro avviso, lo studio dei rapporti tra disordine della nutrizione ed immunità naturale potrà divenire proficuo e chiarificatore se, per quanto riguarda i fattori cellulari dell'immunità, verrà impostato su questo fondamento enzimatico dell'opera di difesa e preciserà la natura e l'entità delle ripercussioni del disordine nutritivo sul patrimonio enzimatico e a sua volta la natura e l'entità della ripercussione enzimatica sull'efficiente opera di difesa » [1]. Convinti dell'opportunità e della giustezza di questa impostazione, purtroppo sino ad oggi, per quanto ne sappiamo, trascurata, abbiamo iniziato sistematiche ricerche sull'attitudine fagocitaria ed il comportamento citochimico ed enzimatico dei leucociti e dei macrofagi nel corso dell'inanizione e della malnutrizione. In questa Nota incominciamo col riferire i risultati ottenuti e precisamente descriviamo l'attitudine fagocitaria ed il comportamento citochimico ed enzimatico dei leucociti essudati, limitatamente alla PAS–positività, alla sudanofilia, alle fosfatasi e alle perossidasi, nel corso dell'inanizione e della malnutrizione calorica.

Nel mentre le modificazioni quantitative dei leucociti nell'inanizione e nella malnutrizione sono state oggetto di numerose indagini sin dai tempi di Luciani, il comportamento dell'attività fagocitaria è stato molto meno indagato.

(*) Lavoro eseguito negli Istituti di Fisiologia Umana e Scienza dell'Alimentazione dell'Università di Messina.

(**) Nella seduta del 19 novembre 1960.

Ad esempio, Findlay e Mackenzie [2] hanno osservato che l'attività fagocitaria *in vitro* dei leucociti rimane normale nei ratti carenti di vitamina A, di complesso B e di vitamina C.

Werkman [3] ha determinato gli indici di fagocitosi, sia *in vitro* che *in vivo*, di ratti e di conigli immunizzati e non immunizzati ed ha osservato che la deficienza di vitamina A e di complesso B, nel mentre non modifica gli indici *in vitro*, deprime molto leggermente gli indici *in vivo*. Secondo l'Autore, tale « depressione dell'attività fagocitaria non dipende da un'incapacità dell'animale ad elaborare opsonine, ma è la conseguenza di un agente depressivo, che agisce sul meccanismo fagocitario. La temperatura può essere di significato a questo riguardo, poiché la temperatura è grandemente abbassata durante il digiuno vitaminico ».

Cottingham e Mills [4–5] hanno osservato una riduzione dell'attività fagocitaria in condizioni di carenza vitaminica grave al punto da ritardare la crescita. La tiamina, la riboflavina, la piridossina, l'acido pantotenico, la colina e la deficienza combinata di vitamina A e D sarebbero tutte capaci d'influenzare l'attività fagocitaria, l'inositolo e l'acido paraminobenzoico sarebbero inefficaci. Secondo gli Autori, anche la deficienza proteica deprimerebbe l'attività fagocitaria. È da notare però che in queste osservazioni, non solo non vi è stata un'adeguata elaborazione statistica dei risultati, ma sono stati omessi perfino i controlli per l'inanizione.

Balch e Spencer [6] non hanno osservato alcuna differenza dell'attività fagocitaria degli individui iponutriti rispetto ai normali; inoltre hanno dimostrato che essa è indipendente dal tasso delle emazie e delle proteine plasmatiche, dal rapporto albumine/globuline e dall'età dei pazienti. Per quanto precede, gli Autori credono di poter negare che l'alta incidenza d'infezioni negli iponutriti dipenda da una diminuzione dell'attività fagocitaria dei leucociti. Kuna e coll. [7–8] hanno studiato la capacità fagocitante *in vivo* dei leucociti dei ratti digiunanti da 36 ore, iniettando nel peritoneo una sospensione di stafilococco aureo non emolitico, e prelevando, dopo un periodo di tempo variabile da 2 a 3 1/2 h circa, campioni di essudato peritoneale. L'indice di fagocitosi è stato nettamente più alto negli animali digiunanti ed i leucociti, rispetto a quelli dei controlli normali, presentavano una maggiore mobilità ed adesività verso particelle di determinati polisaccaridi.

Come vedesi, nessun Autore, per quanto ne sappiamo, ha studiato correlativamente l'attitudine fagocitaria, il comportamento citochimico ed enzimatico dei leucociti essudati nel corso dell'inanizione e della malnutrizione calorica. Ciò è stato fatto da noi con i risultati che qui incominciamo a descrivere.

Materiali e metodi.

Sono stati adoperati complessivamente 54 ratti albini del ceppo Wistar–Glaxo (WAG) del nostro Laboratorio, di ambedue i sessi, dell'età di 60–80 giorni e del peso variante da 120 a 200 g all'inizio dell'esperimento, tutti mantenuti dalla nascita in condizioni di vita identiche ed alimentati con la dieta, completa ed equilibrata, in uso nel nostro Laboratorio [9].

Dei 54 animali, 19 sono stati utilizzati come controlli; gli altri sono stati ristretti in gabbie individuali con acqua *ad libitum*, e di questi 23 sono stati sottoposti al digiuno, fino ad una perdita di peso corporeo del 25–35 % circa, e 12 sono stati sottoposti all'ipoalimentazione calorica, mediante un'adeguata riduzione della dieta abituale, così da ottenersi una perdita di peso corporeo di circa il 30 % in un periodo di 25–30 giorni.

In tutti gli animali si è proceduto preliminarmente all'esame emocromocitometrico ed all'esame citochimico dei leucociti. Precisamente è stato controllato: il tasso dell'emoglobina (Hb) con emoglobinometro di Sahli; dei globuli rossi (GR) e dei globuli bianchi (GB) con prelievi in doppio; dei reticolociti, su almeno 2000 GR, su preparati colorati a fresco con brillant–cresyl–blau; la formula leucocitaria su almeno 200 GB su strisci colorati al May–Grunwald–Giemsa; il comportamento delle perossidasi con la tecnica di Graham–Knoll; delle fosfatasi alcaline con la tecnica di Kabat e Furth, della PAS–positività con la tecnica di Hotchkiss e della sudanofilia con la tecnica di Shehan e Storey. Là dove possibile, la valutazione del comportamento citochimico è stata eseguita tenendo presenti i suggerimenti di Astaldi e coll. [10] circa l'indice dell'intensità media della reazione (I.M.R.).

Al termine del periodo di digiuno e d'ipoalimentazione, dopo aver ripetuto l'esame emocromocitometrico e citochimico, nei singoli animali è stata studiata la risposta dell'attività fagocitaria *in vivo* dei leucociti, come segue: previo riscaldamento a 37° C, iniezione intraperitoneale di 5 ml di una sospensione, sterile per tindalizzazione, di carbone animale 1 % (p/v) in soluzione fisiologica o 0,5 % in brodo di carne filtrato per carta, oppure di 3 ml di brodocultura di stafilococco aureo non emolitico; dopo 150–180 minuti, sacrificio dell'animale per dissanguamento, apertura dell'addome e rapido prelievo del liquido peritoneale: *a*) per la conta, in doppio, dei leucociti; *b*) per lo studio, su preparati colorati al May–Grunwald–Giemsa, della formula leucocitaria e del numero dei fagociti, su almeno 400 GB; *c*) per lo studio citochimico dei leucociti essudati con le tecniche già dette; *d*) per la misurazione della quantità del liquido presente nella cavità peritoneale.

Poiché la sospensione di carbone in brodo si è mostrata atta a provocare una buona risposta fagocitaria, la maggior parte delle osservazioni è stata condotta con detta sospensione.

Risultati e discussione.

Nelle Tabelle I–III si trova racchiuso il comportamento medio emocromocitometrico, quello della formula leucocitaria, sia del sangue periferico che del liquido peritoneale, quello del riassorbimento peritoneale di detto liquido, nonché il comportamento dell'attività fagocitaria dei leucociti essudati. Ciascuna tavola si riferisce precisamente a ciascuno dei tre lotti di animali studiati: i controlli [19], i digiunanti [15] e gli ipoalimentati [12] trattati con sospensione di carbone in brodo.

Dall'esame dei risultati appare che:

1° in condizioni normali di nutrizione, tanto il numero delle emazie, dei reticolociti e dei leucociti, che la formula leucocitaria, sono stati secondo la norma; il riassorbimento del liquido iniettato in peritoneo è stato di circa il 50 %; l'essudazione leucocitaria è stata intensa ed in prevalenza costituita da neutrofili (più del 50%); l'attività fagocitaria è stata svolta da circa il 25 % dei leucociti, in maggioranza neutrofili;

2° in condizioni di digiuno, si è avuta lieve eritrocitosi con reticolocitopenia, lieve leucopenia con linfopenia assoluta e relativa; l'entità del riassorbimento e dell'essudazione cellulare è rimasta presso a poco quella dei controlli, mentre è aumentato il numero dei neutrofili (65 %); l'attività fagocitaria è rimasta pressocché immutata (22 %);

3° in condizioni d'ipoalimentazione, si è accentuata l'eritrocitosi, le reticolocitopenia e la leucopenia con più netta linfopenia assoluta e relativa; è diminuito il riassorbimento del liquido ed è aumentata l'essudazione, costituita per l'80% di neutrofili; l'attività fagocitaria è rimasta pressoché immutata (21 %).

Tabella I.

Il comportamento emocromocitometrico e l'attività fagocitaria dei leucociti essudati nel ratto normale (19 animali).

Sangue periferico		Liquido peritoneale	
Hb g %	13,6 (12,7–15,4)	ml	2,6 (1,8–4,5)
Emazie × 10^6/mm³	8,44 (7,3–10,3)	Leucociti × 10^3/mm³	8,80 (1,8–16,6)
Reticol. ‰ emazie	48 (32–75)	Leucociti totali × 10^6	19,2 (4,6–58,6)
Leucociti × 10^3/mm³	12,6 (10,8–25,4)	Formula leucocitaria (**)	
Formula leucocitaria (*)		N.	54,7 (5,5–83)
N.	24,0 (7–43)	E.	2,2 (0,5–3)
E.	0,3 (0–3)	L.	41,4 (13–91)
L.	70,2 (45–87)	M.	2,7 (0,5–8)
M.	5,3 (1–9)	Leucociti fagocit. %	25,7 (7–55)
		N.	20,0 (3–42,5)
		E.	0,1 (0–1)
		L.	4,1 (0,5–10)
		M.	1,5 (0,5–6)

(*) Non comprende né i basofili, che non hanno mai superato la cifra dell'1 %, né le rarissime cellule immature della serie bianca e rossa.

(**) Non comprende né i basofili del sangue, che non hanno mai superato la cifra dell'1 %, né i basofili tessutali e le cellule di sfaldamento peritoneale.

Passando a qualche fatto più particolare risultante dall'esame analitico dei protocolli e pertanto non racchiuso nelle tabelle, ci sembra degno di segnalazione: *a*) il minor riassorbimento del liquido iniettato nella cavità peritoneale e la minore essudazione cellulare con minor neutrofilia osservabile nei ratti digiunanti con perdita di peso superiore al 30 %; *b*) il ridotto riassorbimento del liquido iniettato in peritoneo, la maggiore essudazione cellulare con maggiore neutrofilia e la maggiore attività fagocitaria (30 % di fagociti) osservata nei ratti tanto normali che digiunanti trattati con sospensione batterica.

Circa il comportamento morfologico e citochimico dei leucociti essudati in peritoneo, si deve dire che, nelle tre diverse condizioni, è stato essenzialmente identico, ad eccezione di una certa diminuzione delle perossidasi dei granulociti nei ratti ipoalimentati (I.M.R. 2,72 ± 0,26 nei normali; 3,08 ± 0,36 nei digiunanti; 1,27 ± 0,36 negli ipoalimentati).

TABELLA II.

Il comportamento emocromocitometrico e l'attività fagocitaria dei leucociti essudati nel ratto digiunante (15 animali).

	Sangue periferico		Liquido peritoneale	
	all'inizio del digiuno	al termine del digiuno		
Perdita % peso corp.	—	29,0 (22–36)	ml	2,6 (1–4,8)
Hb g %	13,5 (12,1-14,9)	14,7 (12,2–15,5)	Leucociti $\times 10^3/mm^3$	8,70 (0,4–23,5
Emazie $\times 10^6/mm^3$	7,61 (6,4–8,4)	8,72 (6,6–11,0)	Leucociti totali $\times 10^6$	17,55 (1,6–58,5
Reticol. ‰ emazie	69 (26–120)	23 (5–40)	Formula leucocitaria (**)	
Leucociti $\times 10^3/mm^3$	19,15 (9,8 -34,4)	11,10 (2,4–28,5)	N.	65,8 (2–89,5)
Formula leucocitaria (*)			E.	1,2 (0–2,5)
N.	17,4 (8–30)	37,4 (21–64)	L.	32,5 (9,5–98)
E.	0,2 (0–1)	0,3 (0–1)	M.	1,5 (0–3)
L.	78,0 (71–86)	58,0 (33–75)	Leucociti fagocit. (***)	22,3 (8–37,5)
M.	4,4 (2,9)	4,3 (2–10)	N.	20,2 (1–37)
			E.	—
			L.	1,5 (0–6)
			M.	0,6 (0,2)

(*), (**) Vedi note alla Tabella I.
(***) N° 13 determinazioni.

Confrontanto, infine, il comportamento citochimico dei granulociti del sangue periferico e dei granulociti essudati, in questi si è osservato: aumento della PAS–positività (I.M.R. da 1,29 ± 0,50 a 3,04 ± 0,30 nei normali, da 1,04 ± 0,41 a 3,19 ± 0,26 nei digiunanti, da 1,16 ± 0,38 a 2,81 ± 0,32 negli ipoalimentati), apparsa prevalentemente a granuli piccoli o zollare, anziché diffusa o finissimamente granulare; modica riduzione della già debole sudanofilia dei granulociti; identico reperto per la fosfatasi alcalina e quasi nessuna modificazione delle perossidasi.

I nostri dati non hanno bisogno di un lungo commento. Per quanto riguarda l'emocromocitometria, non si discostano da quelli di numerosi precedenti Autori; per quanto riguarda la natura dell'essudazione leucocitaria intraperitoneale, si accordano con quelli di Wertman e coll. [11–12–13], precisamente circa la maggior neutrofilia dell'essudato rispetto al sangue e dell'essudato dei ratti ipoalimentati rispetto ai controlli; per quanto riguarda l'entità dell'essudazione si discostano da quelli degli stessi Autori, che denunciano un minor numero di leucociti essudati nei ratti ipoalimentati; per quanto riguarda l'attività fagocitaria dei ratti inoculati con sospensione

di stafilococco aureo, non si accordano con quelli di Kuna e coll. [7], ottenuti però dopo un periodo di digiuno di sole 36 ore e deponenti per un raddoppiamento dei fagociti essudati e per una triplicazione della loro attività fagocitaria.

Tabella III.

Il comportamento emocromocitometrico e l'attività fagocitaria dei leucociti essudati nel ratto ipoalimentato (12 animali).

Sangue periferico					Liquido peritoneale	
	all'inizio dell'ipoalim.		al termine dell'ipoalim.			
Perdita % peso corp.	—		32,8	(27,6–36,7)	ml	3,4 (2,8–5)
Hb g %	13,7	(12,5–15,2)	14,5	(12,9–15,5)	Leucociti × 10^3/mm^3	10,40 (0,4–21,8)
Emazie × 10^6/mm^3	8,43	(7,6–9,2)	9,79	(7,6–12,0)	Leucociti totali × 10^6	33,67 (1,6–76,0)
Reticol. ‰ emazie	36	(15–56)	11	(2–17)	Formula leucocitaria (**)	
Leucociti × 10^3/mm^3	14,43	(9,05–21,05)	6,02	(2,56–8,6)	N.	83,1 (75–93)
Formula leucocitaria (*)					E.	4,7 (1–10)
N.	25,1	(10–38)	32,2	(12–55)	L.	9.0 (2–10)
E.	1,4	(0–4)	1,1	(0,5)	M.	3,2 (1–5)
L.	70,9	(55–83)	64,7	(43–86)	Leucociti fagocit. %	21,1 (8–34)
M.	2,6	(1–5)	2,0	(0,2–5)	N.	17,8 (8–32)
					E.	0,7 (0–3)
					L.	1,2 (0–4)
					M.	1,4 (0–3)

(*), (**) Vedi note alla Tabella I.

Nel complesso le nostre ricerche dimostrano che il digiuno assoluto e protratto e l'ipoalimentazione cronica non si ripercuotono sensibilmente sull'attitudine fagocitaria dei leucociti, cioè della principale famiglia cellulare deputata alla fagocitosi. Poiché questo preminente aspetto dell'immunità naturale è la risultante di molteplici fattori (mobilità ameboide, potere chemiotattico, capacità di digerire, liberazione di sostanze battericide, ecc.), si deve concludere che nel caso dei leucociti nessuno di questi fattori ha risentito notevolmente del disordine nutritivo proprio dell'inanizione e della malnutrizione.

Ma poiché l'estrinsecazione dei fenomeni coinvolti nella fagocitosi richiede indubbiamente la presenza di enzimi, il riscontro dell'immutata attitudine fagocitaria dei granulociti già fa pensare che l'inanizione e la malnutrizione non si ripercuotono su quella parte del patrimonio ezimatico dei fagociti

responsabile dei processi biochimici, che sottostanno a quell'attitudine funzionale, che noi chiamiamo fagocitosi.

Proprio sotto questo punto di vista particolarmente dimostrativo è il comportamento della PAS-positività, la quale nei granulociti essudati, sia degli animali normali che di quelli digiunanti o ipoalimentati, è risultata nettamente aumentata, rispetto a quella dei granulociti del sangue periferico.

Ora sembra accertato, da una parte, che la PAS-positività di queste cellule è dovuta pressocché interamente al loro contenuto in glicogeno e, dall'altra che l'aumentata glicogenogenesi dei leucociti, che abbandonano il torrente circolatorio per svolgere un'azione di difesa, ha lo stesso ruolo della glicogenogenesi muscolare, rappresenta cioè la principale sorgente di energia a disposizione dei fagociti per lo svolgimento della loro motilità ameboide e capacità ad inglobare [14].

Tutto ciò induce a concludere che nel disordine nutritivo caratteristico del digiuno protratto e dell'ipoalimentazione calorica, pur verificandosi una riduzione o una deviazione della funzione del tessuto ematopoietico, tale da alterare i normali standards quantitativi corpuscolari, non si osserva alcuna alterazione apprezzabile dei meccanismi metabolici, che presiedono all'accumulo di glicogeno e all'attitudine fagocitaria dei leucociti essudati. Ma ciò significa altresì che il digiuno prolungato e la malnutrizione calorica non riescono ad interferire nel normale processo maturativo dei singoli leucociti, per cui queste cellule di difesa, ad onta della grave situazione nutritiva dell'organismo, sono immesse in circolo e, nel bisogno, essudate in condizioni di perfetta normalità biochimica e funzionale.

Bibliografia.

[1] G. Livrea, « Quad. della Nutrizione », *20*, 9, (1960).
[2] G. M. Findlay e R. Mackenzie, « Biochem. J. », *16*, 574 (1922).
[3] C. H. Werkman, « J. Infectious Diseases », *32*, 263 (1923).
[4] E. Cottingham e C. A. Mills, « J. Immunol. », *47*, 493 (1943).
[5] C. A. Mills E. Cottingham, « J. Immunol. », *47*, 503 (1943).
[6] H. H. Balch and M. T. Spencer, « J. Clin. Invest. », *33*, 1321 (1954).
[7] A. Kuna, B. Blattberg e J. Reiman, « Proc. Soc. Exp. Biol. and Med. », *77*, 510 (1951).
[8] A. Kuna e R. Chambers, cit. da Kuna e coll. [7].
[9] G. Livrea, F. De Stefano e A. Picciotto, « Biologica Latina », *11*, 407 (1958).
[10] G. Astaldi, E. Bernardelli e G. Rondanelli, « Boll. Soc. It. Biol. Sper. », *28*, 286 (1952).
[11] K. Wertman, W. M. O'Leary e L. W. Smith, « J. Nutrition », *57*, 203 (1955).
[12] K. Wertman, R. J. Lynn, D. T. Disque, G. W. Kohr e M. E. Carrol, « J. Nutrition », *60*, 473 (1956).
[13] K. F. Wertman, R. J. Lynn e D. T. Disque, « J. Nutrition », *63*, 311 (1957).
[14] S. Bazin, A. Delaunay et C. Avice, « Ann. Inst. Pasteur », *85*, 774-783 (1953).

Patologia. — *Azione delle radiazioni ionizzanti sul contenuto in potassio, sodio e acqua del fegato di ratto e delle sue frazioni cellulari* (*). Nota di Francesco Bresciani e Ferdinando Auricchio, presentata (**) dal Socio L. Califano.

La dose di raggi X necessaria all'inattivazione di molecole per azione « diretta » è funzione della grandezza molecolare e, in generale, indipendente dalla loro natura chimica. Nell'attivazione per via « indiretta » le caratteristiche chimiche delle molecole hanno, invece, essenziale importanza. In soluzioni diluite di enzimi dove più del 99% degli effetti sono « indiretti » gli enzimi sulfidrilici sono di gran lunga i più radio-sensibili [1, 2, 3]. Ciò dipende dalle proprietà ossidanti dei radicali e composti che si originano dalla scissione delle molecole di acqua. Già l'aggiunta di piccole quantità di omogenato di tessuto alle soluzioni di enzimi sulfidrilici riduce notevolmente o annulla (in funzione della dose di raggi X, della diluizione della soluzione di enzimi e dell'omogenato) la radiosensibilità degli enzimi sulfidrilici [4]. Nella cellula sono addirittura necessarie enormi dosi (3–6 Mrads) per inattivare gli enzimi sulfidrilici come il coenzima A e l'alcooldeidrogenasi e dello stesso ordine di grandezza di quelle necessarie per enzimi non sulfidrilo-dipendenti, come ad esempio l'invertasi [5, 6].

Il meccanismo dell'azione delle radiazioni ionizzanti sul metabolismo è, quindi, ancora in attesa di una soddisfacente interpretazione. Già in precedenti ricerche [7, 8, 9] sono stati portati fatti sperimentali a favore della dipendenza, almeno in parte, di alcune modificazioni metaboliche nella cellula irradiata dalle alterazioni elettrolitiche. Le alterazioni elettrolitiche cellulari nella maggior parte dei casi noti in patologia cellulare sono conseguenza delle alterazioni metaboliche, in quanto tali alterazioni determinano mancanza dell'energia necessaria al trasporto « attivo » degli ioni. Usando una dose di raggi X (35 Kr) che non inibisce le ossidazioni né la sintesi di ATP del tessuto epatico, sono state studiate le modificazioni elettrolitiche del tessto immediatamente dopo irradiazione. Sono state studiate anche le modificazioni in acqua ed elettroliti dei nuclei e dei mitocondri perché essi posseggono membrane, nel caso dei mitocondri con funzioni di trasporto « attivo » di ioni [10]. Per quanto già si conosce sull'argomento della presente Nota si rimanda alla recente rivista di Rothstein [11].

Materiali e metodi.

I ratti (Wistar, maschi di peso 200–300 gr) venivano fissati supini su un piano da operazione e, dopo anestesia con etere, il fegato veniva esteriorizzato per taglio subcostale. Dopo legatura del peduncolo vascolare del

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Patologia Generale della Università di Napoli.
(**) Nella seduta del 19 novembre 1960.

lobo laterale destro esso era asportato e usato per le prove con tessuto non irradiato. Si irradiava quindi il lobo mediano con apparecchio Dermopan Siemens, 50 Kv, 25 mA, 1 mm di Al, strato emivalente 1 cm di tessuto. Lo spessore massimo misurato del lobo mediano era di 5–6 mm e veniva calcolata una dose totale di 35 Kr in 10 minuti al centro del tessuto. Dal tessuto epatico veniva allontanata la maggior parte del connettivo col forzare il fegato a passare attraverso i fori da 1 mm del filtro di una pressa per estratti di embrioni. Su di una aliquota della « polpa » epatica così ottenuta veniva determinato il peso secco e il contenuto in acqua. La restante porzione di « polpa » epatica veniva sospesa, dopo essere stata pesata, in soluzione fredda (+ 2 – + 4° C) di Saccarosio 0,25 M, usando per 1 gr di «polpa» 10 ml di soluzione. La sospensione così ottenuta era omogenizzata nell'apparecchio di Potter–Elvehjem a + 2 – + 4° C. La separazione della frazione nucleare e di quella mitocondriale era condotta secondo la tecnica di Schneider e Hogeboom [12] eseguendo, però, un solo lavaggio della frazione nucleare e mitocondriale. Anche di tali frazioni veniva determinato il peso secco e il contenuto in acqua. L'incenerimento avveniva a 500° C per 12 ore e le ceneri venivano riprese in 1 ml di HCl N che era fatto poi evaporare con lampada a raggi ultrarossi. Si riprendeva poi con quantità misurata di HCl 0,1 N e la soluzione veniva usata per le determinazioni di spettrofotometria della fiamma (Beckman D. U.), secondo gli usuali metodi, per confronto con soluzioni a nota concentrazione riproducenti all'incirca lo stesso rapporto di elettroliti del fegato.

L'acqua del tessuto è espressa in Kg/Kg peso secco e gli elettroliti in mEq/Kg peso secco. Gli elettroliti vengono anche riportati in mEq/Kg acqua nella frazione.

L'uso delle unità Kg d'acqua o mEq di elettroliti per Kg di peso secco è vantaggioso rispetto all'espressione dei risultati come contenuto d'acqua o di elettroliti per Kg di peso fresco [19]. Il contenuto in acqua del tessuto, espresso come percentuale del peso fresco, sarà eguale a: $\frac{\text{Acqua/Kg peso secco} \times 100}{\text{Acqua/Kg peso secco} + 1}$ % e il contenuto in elettroliti del tessuto in mEq/Kg peso fresco sarà: $\frac{\text{mEq/Kg peso secco}}{\text{Acqua/Kg peso secco} + 1}$. Gli elettroliti sono anche espressi come mEq/Kg acqua giacché tale espressione è indipendente da eventuali perdite in peso secco del tessuto e inoltre mostra la tonicità in elettroliti dell'acqua.

Risultati.

Vengono riportate in tabella le concentrazioni di Na– e K–ioni nella « polpa » di fegato, nei mitocondri, nei nuclei e nel sopranatante per il tessuto epatico non irradiato e irradiato. Il sopranatante è costituito da succhi intracellulari ed extracellulari diluiti in soluzione di Saccarosio 0,25 M. Deve venire sottolineato che la concentrazione in elettroliti dell'acqua dei mitocondri e dei nuclei è più alta di quella del sopranatante. Tale fatto indica che,

nonostante il trattamento per la preparazione, mitocondri e nuclei conservano un gradiente rispetto al sopranatante. La frazione nucleare non è assolutamente pura, ma contaminata da cellule non rotte e da eritrociti.

Le modificazioni nel contenuto in elettroliti immediatamente dopo irradiazione consistono essenzialmente in aumento dei Na–ioni e riduzione dei K–ioni sia per la « polpa » di tessuto che per i mitocondri. Nei nuclei, invece,

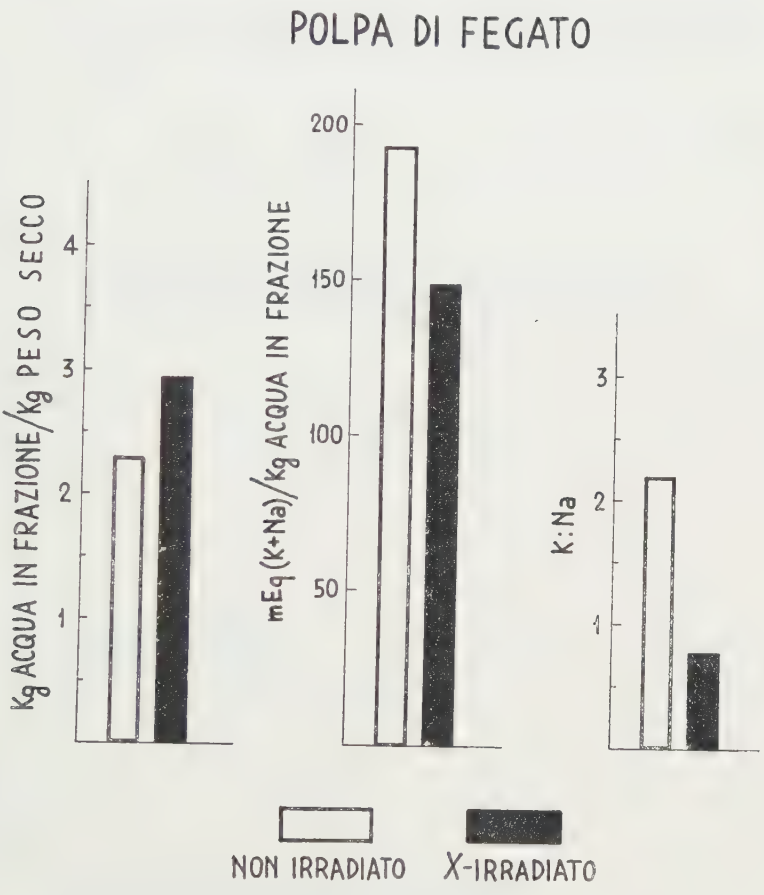


Fig. 1.

si ha lieve aumento dei K–ioni e molto più notevole dei Na–ioni, sia che i mEq siano riferiti al peso secco che all'acqua nella frazione. Le modificazioni dell'acqua rispetto al peso secco, della somma molare dei cationi in mEq/acqua nella frazione e del rapporto K : Na nella «polpa» di fegato, nei mitocondri e nei nuclei vengono mostrate dalle figure 1, 2, 3. Le modificazioni conseguenti ad irradiazione (35 Kr) possono essere così riassunte: il contenuto in acqua totale del tessuto aumenta ma si riduce quello dei nuclei e dei mitocondri. La somma molare dei cationi Na e K rispetto all'acqua della frazione risulta ridotta nel tessuto e nei mitocondri, ma aumentata nei nuclei. Il rapporto K : Na risulta costantemente ridotto.

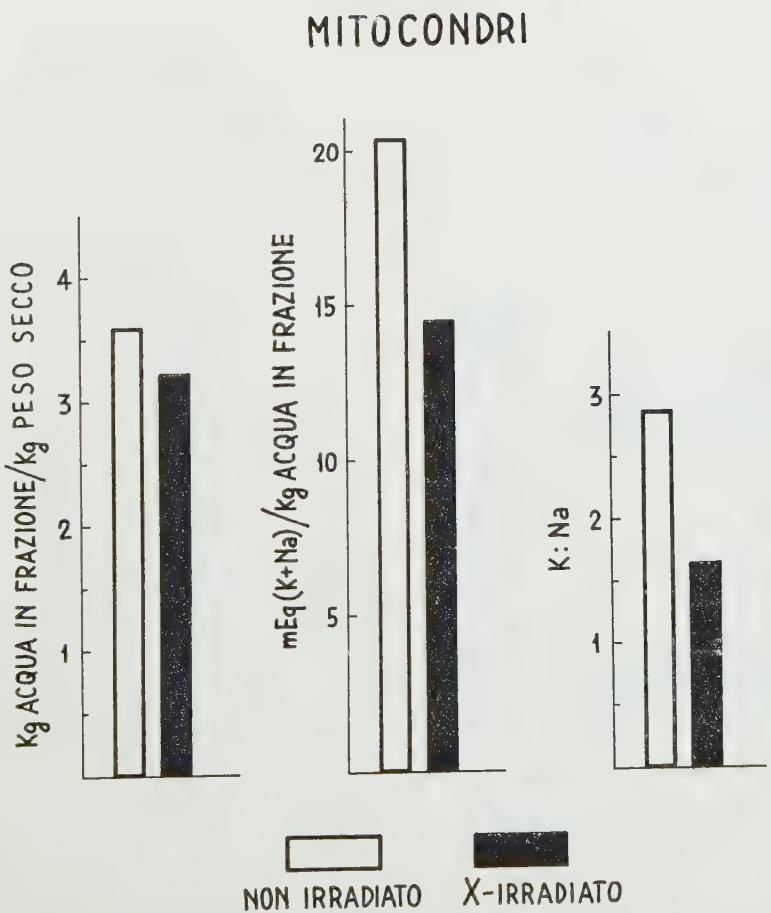

MITOCONDRI
Kg ACQUA IN FRAZIONE/Kg PESO SECCO
mEq (K+Na)/Kg ACQUA IN FRAZIONE
K: Na
NON IRRADIATO
X-IRRADIATO

Fig. 2.

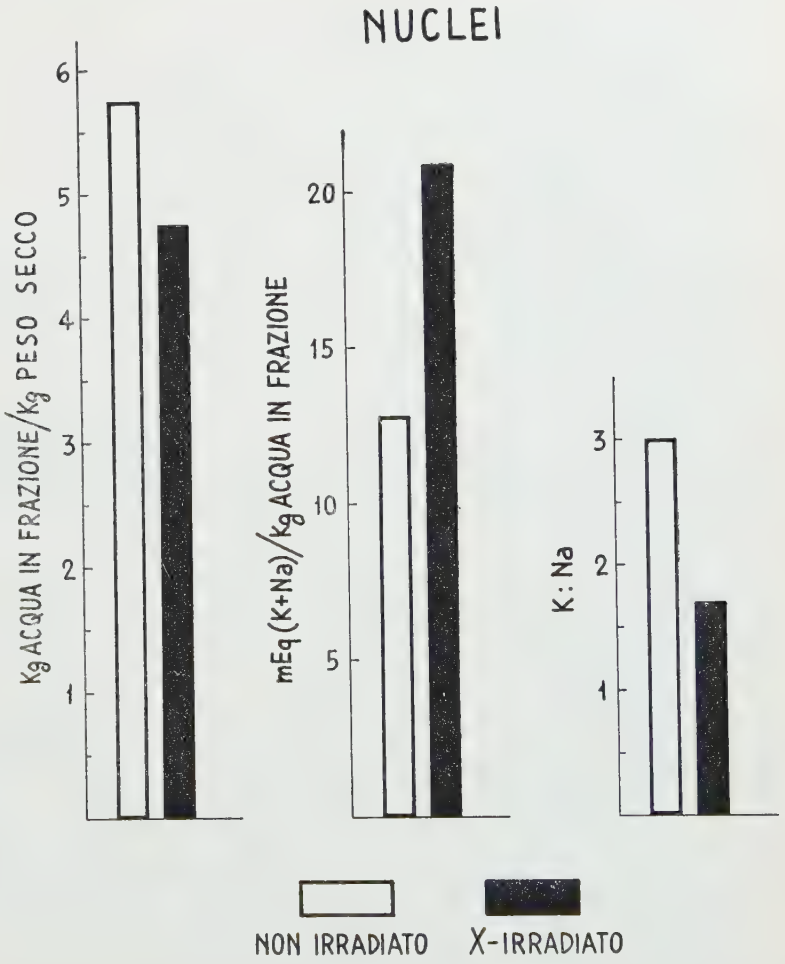

NUCLEI
Kg ACQUA IN FRAZIONE/Kg PESO SECCO
mEq (K+Na)/Kg ACQUA IN FRAZIONE
K: Na
NON IRRADIATO
X-IRRADIATO

Fig. 3.

Tabella I.

Sodio e potassio nella « polpa » e nelle frazioni cellulari di fegato di ratto non irradiato e irradiato (35 Kr).

		Sodio				Potassio			
		mEq/Kg peso secco		mEq/acqua nella frazione		mEq/peso secco		mEq/acqua nella frazione	
Dose Raggi X		Or	35 Kr	Or	35 Kr	Or	35 Kr	Or	35 Kr
« Polpa » di fegato	(m)	140,7	248,0	60,8	83,8	303,0	188,5	132,7	65,0
	(Sm)	± 2,4	± 33,5			± 23,0	± 38,7		
Mitocondri . .	(m)	18,2	16,9	5,27	5,5	55,4	30,5	15,1	9,0
	(Sm)	± 0,8	± 2,5			± 7,3	± 7,1		
Nuclei (+cellule)	(m)	17,9	37,7	3,2	7,8	56,8	59,6	9,58	13,1
	(Sm)	± 1,45	± 8,1			± 5,23	± 6,0		
Sopranatante . .	(m)	—	—	1,30	3,4	—	—	2,72	1,9

Discussione.

Effetto immediato dell'irradiazione è notevole riduzione dei K–ioni del tessuto sostituiti dai Na–ioni con uno scambio netto di 114,5 mEq/Kg peso secco di K–ioni contro 108,5 mEq/Kg peso secco di Na–ioni.

La differente concentrazione dei Na– e K–ioni all'interno ed all'esterno della cellula è mantenuta per trasporto « attivo » degli ioni attraverso la membrana cellulare e tale funzione dipende (*a*) da fornitura di energia e (*b*) da integrità dei luoghi cellulari a livello dei quali avviene lo scambio dei K–ioni contro i Na–ioni. Dato che l'irradiazione con 35 Kr non inibisce le ossidazioni cellulari [7–8] né la sintesi di ATP [13], la profonda alterazione del gradiente elettrolitico sembra da riportare ad alterazioni del sistema della superficie cellulare preposto allo scambio ionico. Secondo Conway [14] il sistema nella membrana trasportante gli ioni sarebbe da identificare con quello trasportatore di elettroni, cioè il sistema DPNH e TPNH–reduttasico, vale a dire un sistema facilmente inattivabile per ossidazione. Gli enzimi della superficie cellulare a contatto con il liquido interstiziale, il cui contenuto in molecole organiche (proteine, fosfati organici) è circa 1/20 di quello intracellulare, sono, per tale ragione, relativamente meno protetti rispetto a quelli indovati nella cellula. I radicali e composti ossidanti originati nel liquido interstiziale verrebbero a concentrarsi sulla superficie cellulare e ciò porta per conseguenza che (*a*) al livello della superficie cellulare l'effetto della irra-

diazione sarebbe particolarmente accentuato e che (*b*) i gruppi sulfidrilici delle molecole della superficie cellulare sarebbero elettivamente inattivati.

Contemporaneo alle modificazioni elettrolitiche è l'aumento del contenuto di acqua per unità di peso secco del tessuto. Verosimilmente tale aumento è dovuto in parte ad aumento del liquido interstiziale, in parte ad aumento del contenuto in acqua cellulare totale. Dallo studio dello *swolling* di tessuti per altre cause patologiche si è giunti a formulare tre ipotesi diverse sul meccanismo con cui tale fenomeno si avvera. Secondo la prima ipotesi [10, 11] l'idratazione patologica del tessuto sarebbe dovuta all'entrata d'acqua per alterazione del suo sistema di trasporto « attivo ». La seconda ipotesi [17] ammette che sostanze osmoticamente attive compaiono determinando richiamo di acqua. La terza interpretazione [18, 19] propone che la normale concentrazione d'acqua nella cellula è mantenuta per inibizione della entrata di sostanze osmoticamente attive. Quando tale meccanismo è alterato Na– e Cl–ioni invadono la cellula (mentre K–ioni fuoriescono) e l'aumentata pressione osmotica intracellulare determinerebbe richiamo di acqua. Tale ipotesi richiede che l'aumento dell'acqua cellulare e la somma dei K– e Na–ioni, riferita a unità di sostanza secca, aumentino proporzionatamente.

I nostri risultati mostrano che il contenuto in acqua del tessuto riferito a peso secco aumenta ma che la somma molare dei cationi Na e K, sempre per unità di peso secco, resta costante. Tale fatto fa escludere che il meccanismo dell'aumento dell'acqua nel tessuto irradiato sia quello della terza ipotesi. L'irradiazione del tessuto con 35 Kr non determina, almeno per la prima ora dopo l'irradiazione, né inibizione delle ossidazioni cellulari [7, 8], né della sintesi di ATP da P^{32} [13]. Tale fatto verosimilmente fa escludere che possa mancare energia per il trasporto « attivo » dell'acqua ammesso nella seconda ipotesi e fa concludere o che (*a*) il sistema di trasporto vero e proprio nella membrana è alterato, o che (*b*) compaiono nella cellula sostanze osmoticamente attive, come si ammette nella prima ipotesi. Le differenze nelle modificazioni in acqua ed elettroliti dei nuclei e dei mitocondri è verosimilmente conseguenza della diversa struttura e funzione dei due organuli cellulari. Probabilmente nel caso dei nuclei, per la cui membrana sinora non si conoscono funzioni di trasporto « attivo » analoghe a quelle della membrana mitocondriale, l'aumento del contenuto in sodio è da riportare ad aumento del sodio citoplasmatico e la riduzione dell'acqua a eventuale maggiore aumento della pressione osmotica nel citoplasma. La mancata riduzione dei K–ioni nucleari potrebbe dipendere da eventuale presenza di complessi dello ione con proteine nucleari. Non è infatti esclusa l'esistenza di tali complessi nella cellula. Per i mitocondri la riduzione dei K–ioni e quella contemporanea lieve dei Na–ioni verosimilmente dipende da alterazioni delle funzioni della loro membrana che, è necessario sottolineare, si comporta nei rispetti del sodio analogamente come per il potassio. Nei mitocondri isolati, infatti, viene mantenuto attivamente un gradiente sia per il potassio che per il sodio rispetto al liquido d'incubazione [10].

In conclusione si può dire che l'irradiazione con 35 Kr altera profondamente la permeabilità cellulare e i risultati riportati nel presente lavoro sono

a sostegno che tale effetto dipenda da alterazioni del meccanismo del trasporto degli ioni attraverso le membrane. Modificazioni delle concentrazioni di ioni e acqua si determinano anche nel nucleo e nei mitocondri ma è per adesso difficile dire quanto ciò dipenda dalle modificazioni che si avverano nel citoplasma e quanto da alterazioni specifiche della loro permeabilità. Sembra che il nucleo si comporti passivamente rispetto alle modificazioni citoplasmatiche mentre, invece, i mitocondri subiscano alterazioni della loro permeabilità specifica. Tali fatti sarebbero in accordo con la comune nozione che la membrana mitocondriale possiede funzioni di trasporto attivo mentre sinora ciò non è conosciuto per la membrana nucleare. Si rimanda ad altri lavori [7, 8, 9, 21] per la discussione del significato che le modificazioni in elettroliti possono avere nella patogenesi delle alterazioni metaboliche nella cellula irradiata.

Bibliografia.

[1] E. S. G. Barron, S. Dickman, « J. Gen. Physiol. », *32*, 595 (1949).
[2] E. S. G. Barron, S. Dickmann, J. H. Muntz and T. P. Singer, « J. Gen. Physiol. », *32*, 537 (1949).
[3] E. S. G. Barron and V. Flood, « J. Gen. Physiol. », *33*, 229 (1950).
[4] H. A. Künkel, G. Hohne, H. Maas e G. Schubert, in *Progress in Radiobiology* (p. 52, C. C. Thomas, Springfield, Illinois, 1956).
[5] F. Hutchinson, « Radiation Research », *7*, 473 (1957).
[6] F. Hutchinson, A. Preston and V. Vogal, « Radiation Research », *7*, 465 (1957).
[7] F. Bresciani, K. Dose und B. Rajewsky, « Z. Naturforschg », *14-b*, 158 (1959).
[8] F. Bresciani, F. Fragomele e S. Imperato, in corso di stampa sul « G. di Radiobiol. ».
[9] K. Dose und U. Dose, « Biochem. Z. », *332*, 214 (1959).
[10] M. S. McFarlane and A. G. Spencer, « Bioch. J. », *54*, 569 (1953).
[11] A. Rothstein, *Proceedings of the International Congress of Radiation Research*, p. 357, Academic Prews Inc. New York, 1959.
[12] W. C. Schneider and G. H. Hogeboom, « J. Biol. Chem. », *183*, 123 (1950).
[13] F. Bresciani e K. Dose, osservazioni non pubblicate.
[14] E. J. Conway, « Science », *113*, 270 (1951).
[15] J. R. Robinson, « Proc. Roy. Soc. » (London) B, *137*, 378 (1950).
[16] J. R. Robinson, « Biol. Rev. », *28*, 158 (1953).
[17] E. J. Conway, H. Geoghegan and J. I. McCormack, « J. Physiol. », *137*, 427 (1955).
[18] T. H. Wilson, « Science », *120*, 104 (1954).
[19] A. Leaf, « Biochem. J. », *62*, 241 (1956).
[20] Cramer, « Angew. Chem. », *68*, 115, (1956).
[21] F. Bresciani e F. Sgambati, « Arch. Sci. Biol. », *44*, 110 (1960).

Biologia. — *Esperienze di asportazione dell'ependima presuntivo in embrioni di Anfibi anuri* (*). Nota di Aldo Rossi, presentata (**) dal Corrisp. A. Stefanelli.

Fra i vari fattori che influiscono sullo sviluppo del tubo neurale (vedi Lehmann 1926–1935 [1–2]; Holtfreter 1934 [3]), si ritiene che il liquido ventricolare abbia un ruolo fondamentale sulla distensione delle pareti dei ventricoli e del canale ependimale (Weiss 1934–1955 [4–5]). Nei casi di idrocefalia risulta infatti che l'abnorme pressione esercitata dal liquido ventricolare provoca alterazioni nella morfogenesi del cervello (Lunghetti 1938 [6]; Spadolini 1943 [7]; Chiarugi 1944 [8]; Russel 1949 [9]). L'idrocefalia, che è dovuta a cause diverse può iniziarsi in stadi molto precoci della vita uterina (*idrocefalo interno congenito*) e in tal caso il liquido ventricolare (che può raggiungere i cinque litri) distende talmente gli emisferi cerebrali da farli diventare due enormi sacche con pareti formate da una sottile membrana costituita dalle meningi e da pochi resti di sostanza cerebrale.

È interessante notare che anche l'occhio, similmente ai ventricoli cerebrali, per accrescersi necessita della pressione endoculare esercitata dal progressivo aumento del vitreo. Coulombre (1959 [10]) ha dimostrato infatti che facendo defluire il vitreo da un occhio di un embrione di pulcino, l'occhio resta considerevolmente più piccolo di quello normale.

Cotronei (1915–1921–1922 [11–12–13]) ha osservato che i sali di litio provocano negli Anfibi anuri una riduzione sensibile del cervello precordale e ha supposto che ciò sia dovuto all'arresto della migrazione dei neuroblasti e al blocco della secrezione del liquido ventricolare. Poiché la riduzione del cervello precordale è di solito accompagnata dalle tipiche anomalie della monorrinia, della ciclopia e dalla inibizione dello sviluppo del vestibolo boccale, Cotronei ritiene che il cervello precordale con la sua normale espansione separi gli abbozzi pari delle vescicole olfattorie e di quelle ottiche e regoli in generale tutta la morfogenesi della parte precordale della testa. Quando il cervello precordale rimane atrofico, gli abbozzi pari delle vescicole olfattorie e di quelle ottiche non vengono separati e quindi per mancanza di spazio fra essi (occupato normalmente dal cervello precordale), si fondono dando luogo alla monorrinia e alla ciclopia.

Adelmann (1936 [14]) ritiene che la monorrinia, la ciclopia e la riduzione del cervello precordale, siano dovuti invece ad alterazioni del substrato precordale (entomesoderma). Alla stessa conclusione è giunto Mangold (1931 [15]) che ha ottenuto una tipica ciclopia asportando la porzione precordale del

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia comparata « G. B. Grassi » dell'Università di Roma, con i mezzi del Centro di studio di Neuroembriologia del C.N.R.

(**) Nella seduta del 19 novembre 1960.

subtrato in *Triton* e anche Lehmann (1933 [16]) che ha ottenuto larve ciclopi di Urodelo in seguito all'azione dei sali di litio. Recentemente anche Clarke e McCallion (1959 [17]) hanno ottenuto con un nuovo metodo (omogenati di cervello e di cuore di rana adulta) l'inibizione del cervello e una incipiente ciclopia in embrioni di *Rana pipiens*. Gli Autori però non hanno preso in esame le cause morfologiche che hanno provocato queste anomalie.

Nel presente lavoro, allo scopo di indagare se effettivamente la mancanza del liquido ventricolare provoca delle riduzioni del cervello precordale, è stato asportato lo strato dell'ependima presuntivo da embrioni di *Bufo bufo* e di *Bufo viridis* prima della chiusura del tubo neurale.

L'asportazione del solo strato dell'ependima presuntivo, è stata eseguita con l'aiuto di sottili capelli innestati in bacchette di vetro. Tale asportazione che richiede molta accuratezza, è stata eseguita agli stadi 12, 13, 14 (placca neurale, pieghe neurali e rotazione, secondo le tabelle di sviluppo del *Bufo bufo* compilate da Rossi 1958 [18]). Tutte le operazioni sono state eseguite in soluzione Holtfreter. Gli individui operati sono stati fissati da 2 a 39 giorni dopo l'operazione, ma non a intervalli regolari (bensì: 2, 3, 4, 5, 7, 14, 15, 17, 18, 20, 23, 37, 39 giorni dopo l'operazione). Come fissativo si è impiegato il Goldsmith per gli embrioni con il tuorlo e il Sanfelice e il Bouin per le larve. Le sezioni seriate di 10 μ sono state colorate con emallume di Mayer ed eosina.

Dopo l'operazione, le prime fasi dello sviluppo dell'embrione apparentemente si svolgono regolarmente. Gli embrioni in gran parte giungono alla vita larvale; durante questo secondo periodo si nota invece che le larve operate si accrescono molto lentamente e restano molto più piccole dei controlli di pari età; anche l'attività natatoria si riduce e in alcuni casi le larve diventano quasi immobili. È interessante notare che in 8 casi su 37 presi in esame le larve presentano evidente monorrinia. In nessun caso ciclopia.

Da un esame generale di tutti gli individui operati risulta che le cavità ventricolari progressivamente si riducono per cui, in alcuni casi, il cervello diventa praticamente pieno. Tuttavia, in generale nelle varie parti del cervello restano delle piccole cavità che progressivamente si ingrandiscono. L'esame istologico ha rivelato che, nelle larve fissate 15 giorni dopo l'operazione, tali cavità sono tappezzate da cellule di forma allungata di tipo ependimale.

Il telencefalo degli embrioni, quando manca il ventricolo, si presenta formato da un'unica massa di cellule con due piccole cavità, una dorsale e una ventrale; in questo caso, malgrado la riduzione della parte cefalica del telencefalo, le vescicole olfattorie restano ugualmente distanziate. Quando invece gli abbozzi delle due vescicole olfattorie risultano fusi, si constata che il telencefalo è ventralmente molto ridotto, mentre dorsalmente è formato da un ammasso rotondeggiante di cellule. Nelle larve il telencefalo può essere formato da un unico corpo senza cavità, e si osserva che se questo corpo è di piccole dimensioni spesso vi è anche monorrinia (figg. 1–2). Il telencefalo però può essere formato anche dai due emisferi più o meno grandi, con o senza cavità ventricolari.

Il diencefalo degli embrioni si può presentare discretamente inspessito alla base e quindi con cavità ventricolare molto ridotta, oppure completamente pieno, con una o due piccole cavità lungo il piano sagittale mediano (residui del ventricolo). Nelle larve, il diencefalo è risultato in due casi completamente pieno, mentre negli altri presenta delle cavità di variabile grandezza (fig. 3). In queste cavità si sviluppano i plessi corioidei che in alcuni individui fissati tardivamente risultano abbastanza sviluppati. Si è constatato inoltre che le vescicole ottiche nella maggior parte dei casi si trovano molto vicine al diencefalo, e poiché in esse manca il vitreo, il cristallino poggia direttamente sulla retina.

Il quadro malformativo del mesencefalo è molto caratteristico e si ripete frequentemente nei vari casi. Già negli embrioni si osserva che fra i neuroblasti del mesencefalo vi sono tre cavità (due dorsali e una ventrale) che nelle larve si ingrandiscono discretamente (fig. 4). Le due cavità dorsali sono separate da un setto (formato di sostanza bianca e di sostanza grigia) che si continua nel rombencefalo. Vi sono casi in cui il mesencefalo è però pieno e in questi si osserva che le cellule nervose sono caratteristicamente disposte ad Y.

L'esame degli embrioni fissati pochi giorni dopo l'operazione mette in evidenza che inizialmente il ventricolo rombencefalico si oblitera per saldatura della parte dorsale delle pareti laterali; di conseguenza ventralmente resta compresa una parte del ventricolo che si occlude successivamente. Nelle larve il rombencefalo, similmente al mesencefalo, presenta un quadro malformativo caratteristico; in seguito alla fusione delle pareti laterali si forma un unico corpo costituito ventro–lateralmente dalla sostanza bianca e dorso–medialmente da quella grigia. Dorsalmente si formano i plessi corioidei, e fra questi e il sottostante corpo unico del rombencefalo si delimita uno spazio più o meno ampio. Questo spazio è generalmente diviso medialmente da un setto (formato da sostanza bianca e da sostanza grigia), continuazione di quello formatosi nel mesencefalo (fig. 5). Tale setto si estende per una lunghezza variabile, ma in ogni caso si riduce e scompare verso le parti caudali dell'allungato.

L'obliterazione del canale neurale si arresta dopo l'allungato e nella maggior parte dei casi il canale ependimale del midollo spinale risulta completamente pervio; solo in tre casi su 37, il canale ependimale è mancante lungo una buona parte del tubo neurale.

Si nota inoltre che in tutte le larve operate le vescicole otiche (similmente alle vescicole ottiche) si trovano molto vicine e spesso addossate alle pareti esterne del rombencefalo (fig. 5). Da un esame istologico generale si constata che anche gli elementi scheletrici, muscolari, nervosi e viscerali delle larve operate hanno poco spazio fra di loro e analizzando più dettagliatamente si osserva che pure gli spazi intercellulari, particolarmente quelli tra le cellule mesenchimatiche, sono molto ridotti (confronta figg. 1, 2, 3, 4, 5, 6 con figg. 7, 8, 9, 10, 11, 12).

Si potrebbe pensare che questo ammassamento tra gli organi e tra le cellule sia dovuto a una deficienza idrica generale, provocata da un'altera-

zione del metabolismo degli elettroliti in seguito alla distruzione dei centri nervosi deputati a questa funzione. È stata prospettata l'ipotesi (Mazzi 1960 [19]), che negli Ittiopsidi il metabolismo degli elettroliti possa venire regolato dal sistema organo sottocommessurale–ipofisi caudale, tramite le fibre di Reissner.

Si può supporre che anche negli Anfibi (dove però non esiste un'ipofisi caudale) l'organo sottocommessurale (O.S.) possa avere importanza nel metabolismo degli elettroliti durante il periodo della loro vita acquatica e che, data l'origine ependimale dell'O.S., esso sia stato asportato con l'operazione. L'esame dei preparati ha messo in evidenza però che in qualche caso si individua nell'ependima una zona con cellule che presentano caratteri simili a quelle dell'O.S., mentre in altri casi l'O.S. non si è morfologicamente individuato. In questi casi però non si può escludere con certezza la sua presenza, in quanto i cervelli presentano nella regione diencefalo–mesencefalica delle alterazioni strutturali; inoltre non essendo stata fatta una colorazione specifica (Gomori), non si è potuto mettere in evidenza la probabile attività secretoria di cellule dell'O.S. Quindi, anche se le attuali osservazioni non comprovano che la deficienza idrica delle larve operate sia dovuta all'ablazione dell'O.S., successive ricerche, condotte su altro materiale (nel *Bufo* infatti è difficile la identificazione del secreto dell'O.S. con il metodo della ematossilina cromica di Gomori) preciseranno questo punto della ricerca.

L'esame dell'encefalo degli animali operati dimostra che l'asportazione dalla placca neurale dello strato dell'ependima presuntivo, provoca l'obliterazione o la riduzione delle cavità ventricolari e nell'insieme un minor sviluppo volumetrico di tutto l'encefalo. La causa dell'obliterazione dei ventricoli va molto probabilmente ricercata nella mancata formazione del liquido ventricolare in seguito all'asportazione dell'ependima che verosimilmente dopo la chiusura del tubo neurale, inizia la sua secrezione (Weiss 1955).

Cotronei (1915–1921–1922) sostiene infatti che una delle principali cause della riduzione volumetrica dei cervelli delle larve trattate con il litio, sia proprio il blocco della secrezione del liquido ventricolare. Anche Weiss (1934–1955) ritiene che il turgore del liquido secreto dalle cellule ependimali, abbia un importante ruolo morfogenetico nell'impedire l'afflosciamento delle pareti del tubo neurale e quindi a mantenere la distensione delle cavità ventricolari.

Nel presente lavoro, dove con l'ablazione dell'ependima presuntivo si è enormemente diminuita la secrezione del liquido ventricolare, si osserva che in seguito all'ispessimento delle pareti del tubo neurale si ha l'obliterazione delle cavità ventricolari. Infatti in embrioni fissati da 2 a 5 giorni dopo l'operazione, dove le pareti del tubo neurale sono ancora sottili (perché costituite da pochi strati cellulari) si osserva ancora in più casi la presenza di cavità ventricolari quasi normali. Nelle larve fissate 7 giorni dopo l'operazione, dove le pareti del tubo neurale si sono già fortemente ispessite, si osserva invece che le cavità ventricolari sono molto ridotte e nella maggior parte dei casi completamente obliterate.

Le cavità che si formano nei cervelli di alcune larve operate, con ogni probabilità contengono liquido ventricolare, in quanto essendo comunicanti

fra loro si mettono in rapporto con i plessi corioidei diencefalici e rombencefalici. È interessante notare che malgrado l'asportazione dello strato presuntivo dell'ependima queste cavità sono tappezzate da un epitelio di tipo ependimale e che nella maggior parte dei casi si sono formati i plessi corioidei. Si deve ritenere pertanto che dopo l'ablazione dell'ependima presuntivo, elementi della placca neurale, probabilmente spongioblasti, si evolvono a formare il nuovo ependima e data la comune origine organologica (Kappers–Huber–Crosby, 1936, p. 45 [20]), anche la parte epiteliale dei plessi corioidei.

La riduzione volumetrica del cervello delle larve operate è particolarmente evidente nel telencefalo. Già negli embrioni si osserva che l'atrofia del ventricolo prosencefalico provoca una retrazione dell'estremità cefalica del tubo neurale e contemporaneamente si ha la fusione delle vescicole olfattorie. Cotronei (1915–1921–1922) ritiene a tal proposito che il cervello precordale con la sua espansione separi gli abbozzi pari olfattori e ottici, che nell'embrione si trovano dislocati presso la linea sagittale mediana. Se il cervello precordale rimane atrofico (per arresto della migrazione dei neuroblasti e per il blocco della secrezione del liquido ventricolare) i rispettivi abbozzi duplici olfattori e ottici, restano vicini e di conseguenza si fondono per mancanza di quello *spazio* che normalmente viene occupato dal cervello precordale.

Adelmann (1936) pur riconoscendo che la ciclopia e la monorrinia sono in ultima analisi una espressione di un anormale sviluppo del cervello, sostiene che la fusione degli abbozzi olfattori e di quelli ottici sono causati da una alterazione del substrato entomesodermico. La sua ipotesi viene sostenuta dalle esperienze di Mangold (1931) e recentissimamente da quelle di Sato Todao e Eguchi Goro (1960 [21]) che hanno ottenuto una evidente ciclopia asportando un lembo di substrato entomesodermico nella regione cefalica precordale.

Come contropartita, le presenti esperienze hanno dimostrato che si può ottenere ugualmente la monorrinia senza ledere il substrato entomesodermico, semplicemente provocando la riduzione del cervello precordale mediante l'asportazione del solo strato dell'ependima presuntivo. Quindi si deve concludere che le condizioni di monorrinia e di ciclopia sono la conseguenza di una riduzione del cervello precordale comunque provocata, sia per azione dei sali di litio, sia per asportazione dell'entomesoderma sia, come nel presente lavoro, per riduzione della secrezione del liquido ventricolare.

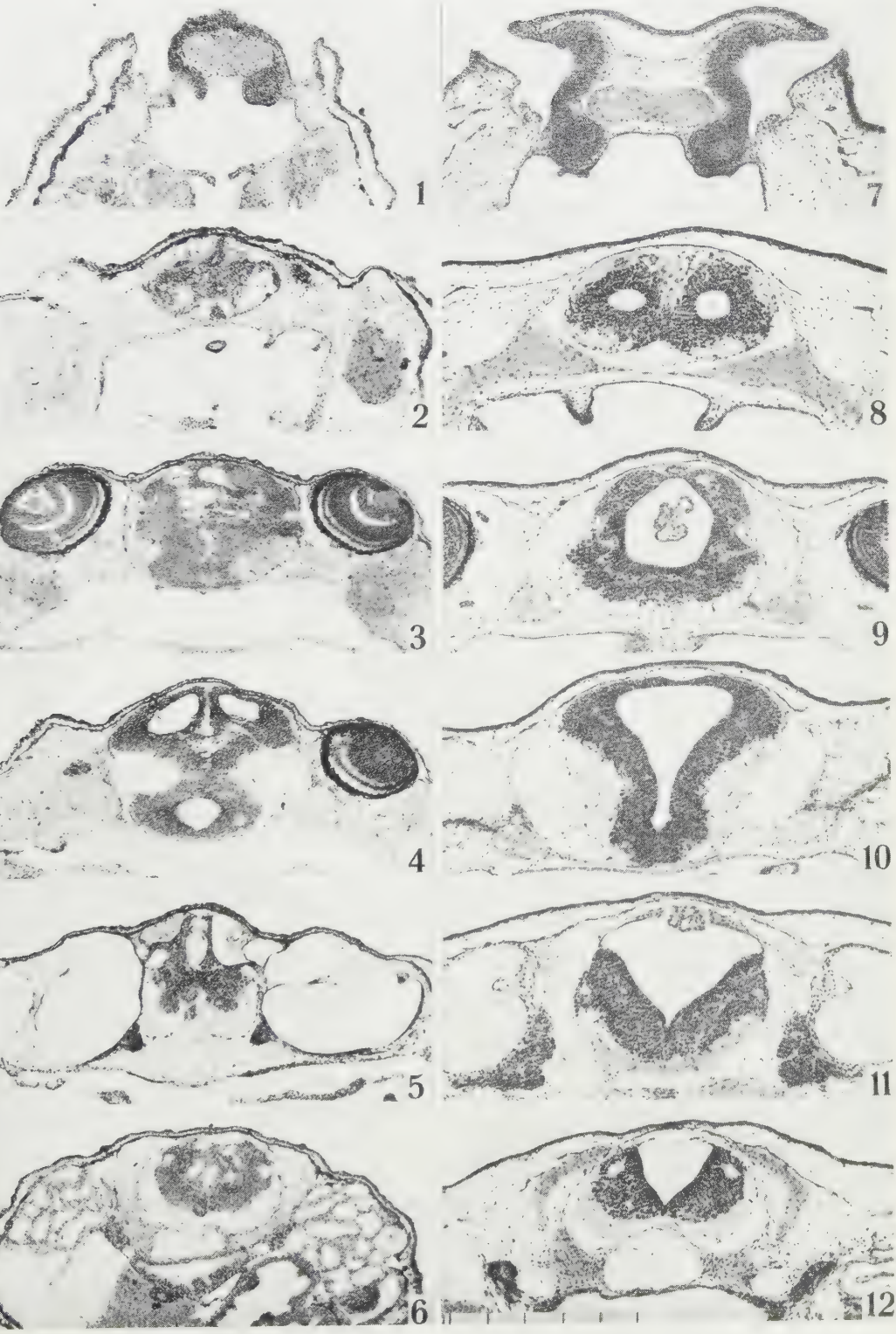
Bibliografia.

[1] F. E. Lehmann, *Entwicklungsstörungen in der Medullaranlage von Triton, erzeugt durch Unterlagerungsdefekte*, « Arch. Entw. mech. », *108*, 243 (1926).

[2] F. E. Lehmann, *Die Entwicklung von Rückenmark Spinalganglien und Wirbelanlagen in chordalosen Körperregionen von Tritonlarven*, « Rev. Suisse Zool. », *42*, 405 (1935).

[3] J. Holtfreter, *Formative Reize in der Embryonalentwicklung der Amphibien dargestellt an Explantationsversuchen*, « Arch. exp. Zell–forsch. », *15*, 281 (1934).

[4] P. A. Weiss, *Secretory activity of the inner layer of the embryonic midbrain of the chick, as revealed by tissue culture*, « Anat. Rec. », *58*, 299 (1934).


1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12

[5] P. A. WEISS, *Nervous system*, in *Analysis of development* (B. H. WILLIER, P. A. WEISS, V. HAMBURGER) Edito da W. B. Saunders Company, Philadelphia e London (1955).
[6] B. LUNGHETTI, *Anatomia patologica del sistema nervoso*, vol. I del *Trattato di Anatomia patologica* (F. VANZETTI, A. CESARIS-DEMEL, G. SCOTTI, B. DE VECCHI, A. FABRIS, B. LUNGHETTI) Edito da U.T.E.T. (1938).
[7] I. SPADOLINI, *Fisiologia umana*, Edito da U.T.E.T. (1943).
[8] G. CHIARUGI, *Trattato di Embriologia*, Edito da Società Editrice Libraria, Milano (1944).
[9] D. S. RUSSEL, *Observations on the pathology of hydrocephalus*, (Privy Council, Medical Research Council Special, Report series No. 265) London: Her Majesty's Stationery Office (1949).
[10] A. J. COULOMBRE, *The role of intraocular pressure in the development of the chick eye.* – I. *Control of eye size*, « J. Exp. Zool. », *133*, 211 (1956).
[11] G. COTRONEI, *Correlazioni e differenziazioni. Ricerche sullo sviluppo degli Anfibi Anuri*, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (ser. 5ª), *24*, 1248 (1915).
[12] G. COTRONEI, *Sulla morfologia causale dello sviluppo oculare* (*Verifica sperimentale sul* Bufo vulgaris *delle ricerche di Carlo Rabl*), « Ricerche di Morfologia », *2*, 103 (1921).
[13] G. COTRONEI, *I processi di inibizione differenziale nella regione olfattoria degli Anfibi anuri*, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (ser. 5ª), *31*, 433 (1922).
[14] H. B. ADELMANN, *The problem of cyclopia*, « Quart. Rev. Biol. », *11*, 284 (1936).
[15] O. MANGOLD, *Das Determinationsproblem.* – III. *Das Wirbeltierauge in der Entwicklung und Regeneration*, « Ergeb. d. Biol. », *7*, 193 (1931).
[16] F. E. LEHMANN, *Die Augen- und Linsenbildung von Amphibien-embryonen unter dem Einfluss chemischer Mittel*, « Rev. Suisse Zool. », 40, 251 (1933).
[17] R. B. CLARKE and D. J. MCCALLION, *Specific inhibition of differentiation in the frog embryo by cell-free homogenates of adult tissues*, « Canad. J. Zool. », *37*, 129 (1959).
[18] A. ROSSI, *Tavole cronologiche dello sviluppo embrionale e larvale del* Bufo bufo (*L.*), « Monit. Zool. Ital. », *66*, 133 (1958).
[19] V. MAZZI, *L'organo sottocommessurale*, « Scientia », *95*, 287 (1960).
[20] A. KAPPERS. G. C. HUBER, E. C. CROSBY, *The comparative anatomy of the nervous system of vertebrates, including man*, Editio da: McMillan Company, New York (1936).
[21] TODAO SATO und GORO EGUCHI, *Über Linsenregeneration bei Zyklopenlarven von* Triturus pyrrhogaster, « Arch. Entw. mech. », *152*, 373 (1960).

SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA I

Figg. 1, 2, 3, 4, 5, 6. – Sezioni seriate (al livello delle vescicole olfattorie, del telencefalo, del diencefalo, del mesencefalo, del rombencefalo e dell'allungato) di una larva di *Bufo bufo* a cui è stato asportato lo strato presuntivo dell'ependima.

Figg. 7, 8, 9, 10, 11, 12. – Sezioni seriate di una larva di *Bufo bufo* di pari età a quella operata, rispettivamente al livello delle vescicole olfattorie, del telencefalo, del diencefalo, del mesencefalo, del rombencefalo e dell'allungato. Ogni unità della scala in calce alla tavola è uguale a 100 μ.

Biologia. — *Nuove possibilità di studio del ricambio strutturale del tessuto osseo con ossitetraciclina* (*). Nota di Erminio Muzii, presentata (**) dal Corrisp. A. Stefanelli.

Le difficoltà tecniche dipendenti dalla presenza dei sali minerali hanno sempre ostacolato lo studio morfologico del tessuto osseo. Infatti se si decalcificano frammenti di osso così da rendere possibile l'impiego dei comuni metodi istologici, si perde la possibilità di studiare la distribuzione e le caratteristiche della componente minerale.

D'altra parte se si evita la decalcificazione e si preparano sezioni per usura, l'osservazione è limitata al tessuto osseo compatto e si esclude quasi completamente lo studio dei tessuti non calcificati presenti nell'osso.

Nell'ultimo decennio l'inclusione in materie plastiche (metacrilato di metile, araldite, ecc.) è divenuta una tecnica corrente per la preparazione si sezioni per usura da tessuto osseo. Così è possibile studiare la componente minerale, non solo nell'osso compatto ma anche nell'osso spongioso ed in quello indebolito nelle sue caratteristiche meccaniche da processi patologici e così pure le strutture non calcificate presenti.

Inoltre le difficoltà incontrate nella interpretazione morfo–funzionale dei quadri microscopici dell'osso, che sono relativamente monotoni, hanno sempre postulato l'impiego di coloranti vitali. Questo problema è stato affrontato e spesso risolto con l'impiego di alcuni isotopi radioattivi e con l'analisi autoradiografica della loro distribuzione.

Si deve riconoscere che queste tecniche sono di uso piuttosto delicato e complesso.

Di recente Milch, Rall e Tobie [1, 2] hanno osservato che gli antibiotici della serie delle tetracicline hanno la proprietà di fissarsi specificamente al tessuto osseo neoformato, cioè esclusivamente a quello deposto durante la somministrazione di queste sostanze. Nello scheletro di animali trattati con tetracicline le parti fluorescenti restano tali finché l'animale vive, e solo il rimaneggiamento strutturale può determinare la scomparsa delle zone fluorescenti attraverso il normale riassorbimento lacunare delle aree di tessuto osseo che avevano fissato l'antibiotico.

Queste osservazioni sono state realizzate utilizzando una proprietà caratteristica delle tetracicline, quella di emettere luce di fluorescenza gialla quando illuminate con luce U.V. [3] e conservare questa proprietà anche quando sono state fissate al tessuto osseo [1, 2]. È stato perciò possibile rilevare la presenza e la distribuzione microscopica delle tetracicline nel tessuto osseo con la microscopia di fluorescenza.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia Comparata «G. B. Grassi» della Università di Roma.

(**) Nella seduta del 19 novembre 1960.

Per quanto ora ricordato si può, attraverso lo studio della distribuzione della fluorescenza, determinare la data di formazione delle strutture ossee, ovviamente, conoscendo le date di somministrazione delle tetracicline o gli intervalli fra di queste.

Conseguentemente il fenomeno della fissazione delle tetracicline all'osso consente lo studio del ricambio strutturale dello scheletro, e deve essere considerato alla stregua di un vero e proprio metodo di colorazione vitale, stabile e specifica, del tessuto osseo, addirittura preferibile, da alcuni punti di vista, all'uso del Ca 45 e del P 32 in quanto il potere di risoluzione della microscopia di fluorescenza è praticamente quello della microscopia in luce bianca; invece il potere di risoluzione del metodo autoradiografico rimane sempre costretto nei limiti della granularità delle emulsioni autoradiografiche disponibili in commercio.

Tutte le osservazioni già pubblicate su questo argomento da altri Autori [1, 2, 4, 5, 6] sono limitate a sezioni di osso compatto ottenute per usura [4, 5], o a frammenti di sezioni di osso compatto e spongioso ottenuti, senza decalcificazione, con microtomo congelatore [1, 2, 6].

Queste ricerche sono state limitate dalla necessità di non decalcificare l'osso onde evitare la scomparsa della fluorescenza, cioè della tetraciclina, che è solubile in acidi come i sali di calcio e dalla impossibilità di ottenere regolarmente sezioni estese (da osso non decalcificato) con il microtomo congelatore.

Perciò ho voluto applicare il metodo di inclusione in metacrilato di metile [7], così da ottenere sezioni di grande superficie, nelle quali fosse possibile studiare non solo le sottili trabecole dell'osso spongioso, fragili e facilmente danneggiabili con gli abrasivi del processo di usura, ma anche le strutture istologiche non calcificate [8].

Ho limitato lo studio a materiale trattato *in vivo* con ossitetraciclina, ottenuto da biopsie chirurgiche o da animali da esperimento. La fluorescenza della tetraciclina fissata all'osso non è alterata dai fissativi istologici come la formalina, l'alcol etilico o l'acetone e nemmeno è alterata dal calore sviluppato dalla polimerizzazione del metacrilato di metile [9].

Le osservazioni sono state eseguite con un microscopio per fluorescenza della ditta Zeiss–Winkel; la sorgente di luce U.V. è una lampada Osram HB 200 a vapori di mercurio ad alta pressione; filtro selezionatore dell'U.V. in vetro Schott tipo UG5 da 2 mm; condensatore di Abbe con A.N. 1,3; filtro di sbarramento per l'infrarosso tipo BG23 e filtro di protezione anti U.V. tipo GG4, situati nell'oculare.

Le sezioni sono state montate in olio di cedro esente da fluorescenza, tra portaoggetti e coprioggetti in vetro normale.

Le microfotografie sono state riprese a colori con pellicola invertibile Ferraniacolor e trasformate in bianco e nero compensando il bleu del fondo con filtro Kodack Wratten n. 22.

Le microradiografie sono state eseguite con lastre M. R. Kodack; tubo generatore di raggi X Machlett OEG60, alimentato con 8 KV e 10 mAmp.;

l'esposizione è stata di 15 minuti primi tenendo l'emulsione ad una distanza di 5 cm dalla finestra di berillio.

Nelle sezioni per usura preparate dopo inclusione in metacrilato di metile la fluorescenza appare distribuita secondo la struttura del tessuto osseo; nelle ossa che sono in fase di attivo accrescimento, composte di osso a fibre intrecciate, si osservano aree fluorescenti in giallo alternate con altre non fluorescenti (fig. 1 B). In genere l'epoca di deposizione dell'osso, rilevata microradiograficamente, attraverso l'analisi delle differenze di mineralizzazione (fig. 1 A), è confermata dal rilievo della distribuzione della fluorescenza da ossitetraciclina somministrata a date note (fig. 1 B e confronta con fig. 1 A).

La stessa corrispondenza è stata constatata anche nel tessuto osseo adulto a struttura lamellare; quì si osservano anelli o bande continue di fluorescenza gialla, composti di varie lamelle, intervallati da bande prive di fluorescenza, corrispondenti alle pause tra l'una somministrazione e l'altra di ossitetraciclina (cfr. figg. 2 e 2 B).

Altre volte, in uno stesso osteone, si osservano sottili linee o anelli fluorescenti in giallo, singoli o multipli, disposti concentricamente, composti di una sola lamella o di frazioni di lamelle contigue.

La fluorescenza manca sempre sui bordi liberi dei canali haversiani, quando la somministrazione della ossitetraciclina è stata sospesa almeno 48 ore prima della biopsia o della uccisione dell'animale.

Quelle parti dei bordi liberi dei canali haversiani che appaiono a contorni frastagliati, così da far supporre che siano sede di fenomeni di riassorbimento lacunare in atto, non risultano fluorescenti, mentre altre parti del bordo libero dello stesso canale haversiano sono chiaramente fluorescenti (fig. 2 B).

L'esame microradiografico delle stesse sezioni dimostra che le aree corrispondenti ai bordi liberi non fluorescenti e frastagliati sono intensamente calcificate come le zone che corrispondono ai residui di osteoni antichi in gran parte riassorbiti, mentre le aree che corrispondono ai bordi continui e fluorescenti sono poco calcificate, cioè di recente o recentissima deposizione (confr. figg. 2 e 2 B).

Ciò implica una considerazione importante riguardo al problema della natura chimica della fissazione delle tetracicline all'osso.

Era già noto che queste sostanze si fissano al tessuto osseo in formazione [1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9] ma non era stato dimostrato che esse non possono fissarsi al tessuto osseo che abbia già raggiunto una elevata mineralizzazione. Si deve dedurre che l'osso intensamente mineralizzato non è più capace di legare le tetracicline.

Questo dato risulta contraddittorio con la ipotesi che il fenomeno di fissazione delle tetracicline all'osso sia una chelazione, come avviene *in vitro* tra ioni calcio e tetraciclina [10].

Infatti sembra oggi acquisito che la differenza tra osso deposto da molto tempo e intensamente mineralizzato da una parte ed osso di recente formazione e poco mineralizzato dall'altra, sia quasi soltanto nella differente inten-

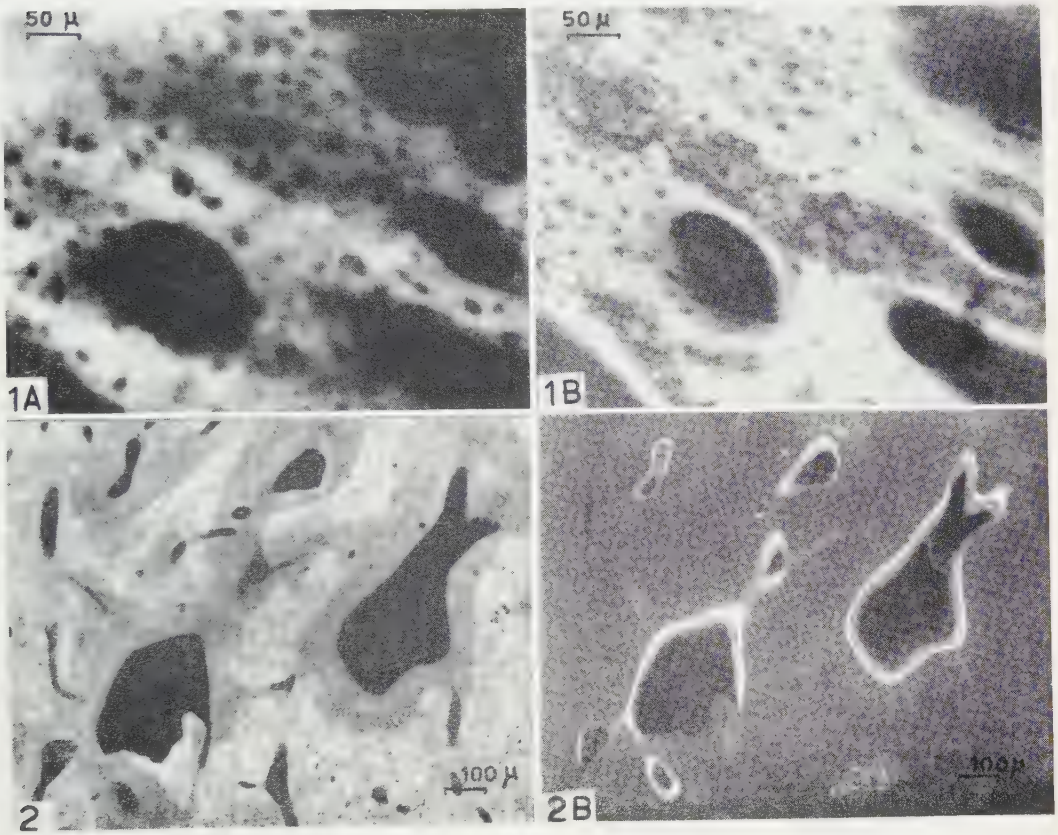


Fig. 1 A. – Microradiografia ingrandita di sezione non decalcificata, preparata per usura, secondo il piano longitudinale frontale, della epifisi distale del radio di un cane di 20 giorni di età; la ossitetraciclina è stata somministrata per sei giorni, continuativamente; l'animale è stato sacrificato 48 ore dopo la ultima somministrazione. (Spessore della sezione = 35 micron).

Fig. 1 B. – Microfotografia del campo corrispondente a quello della fig. 1 A; osservazione al microscopio di fluorescenza; le parti in bianco apparivano fluorescenti in giallo.

Fig. 2. – Microradiografia ingrandita di sezione non decalcificata, preparata per usura, secondo il piano trasversale, dalla diafisi del femore di una donna di 18 anni di età; prelievo bioptico in territorio normale a 5 cm di distanza dal limite di un focolaio osteomielitico in fase di riparazione; la ossitetraciclina è stata somministrata due volte, 72 e 48 ore prima della biopsia. (Spessore della sezione 55 micron).

Fig. 2. B. – Microfotografia del campo corrispondente a quello della fig. 2 A; osservazione al microscopio di fluorescenza; le due linee bianche, (che apparivano fluorescenti in giallo) rappresentano le due somministrazioni di ossitetraciclina, separate da una linea oscura che rappresenta la lamella deposta durante l'intervallo tra le due somministrazioni.

sità di mineralizzazione; allora quanto sopra esposto induce a ritenere che la fissazione delle tetracicline all'osso richieda l'efficienza di un meccanismo biologico complesso quale è presente certamente nella ossificazione e non soltanto alcune condizioni chimico–fisiche.

Anche se la natura chimica della fissazione delle tetracicline all'osso non è di facile definizione, la inclusione in metacrilato di metile di frammenti di osso, (onde ottenerne sezioni per usura complete) per lo studio al microscopio della fluorescenza da ossitetraciclina fissata *in vivo*, permette l'analisi di molte condizioni fisiologiche e patologiche dello scheletro nelle quali è necessario determinare l'età delle strutture.

BIBLIOGRAFIA.

[1] R. A MILCH, D. P. RALL, J. E. TOBIE, *Bone localisation of tetracyclines*, « J. Nat. Cancer Inst. », 87, vol. 19 (1957).

[2] IDEM, *Fluorescence of tetracycline antibiotics in bone*, « J. Bone Joint Surg. », 897, vol. 40 A (1958).

[3] P. P. REGNA, I. A. SOLOMONS, *The chemical and physical properties of terramycine*, « Ann. N. Y. Acad. Sciences », 229, vol. 53 (1950).

[4] H. M. FROST, A. R. VILLANUEVA, *Tetracycline staining of newly forming bone and mineralizing cartilage* in vivo, « Stain Techn. », 135, vol. 35 (1960).

[5] H. M. FROST, *A new bone affection: Feathering*, « J. Bone Joint Surg. », 447, vol. 42 A (1960).

[6] J. PLAZA–ROCA, *The accumulation of Oxtyetracycline in osteogenetic zones as measured by observation of fluorescence*, « Antibiotics Ann. », 850 (1959–1960).

[7] R. F. SOGNNAES, J. H. SHAW, A. K. SOLOMON, E. HARVOLD, *A method for radioautography of specimens composed of both hard and soft structures*, « Anat. Rec. », 319, vol. 104 (1949).

[8] M. BRUNI, E. MUZII, F. PECORELLI, M. PITZURRA, *Attività antibiotica del tessuto osseo di animali trattati con ossitetraciclina*, « Annali Sclavo », 213, vol. 2 (1960).

[9] E MUZII, *Improvement in detection of oxytetracycline (Terramycine) in vitally labelled bone*, « Nature » (in corso di stampa).

[10] E. D. WEINBERG, *The mutual effects of antimicrobial compounds and metallic cations*, « Bacteriol. Rev. », 46, vol. 21 (1957).

Biologia. — *Prime osservazioni sull'ultrastruttura dell'epitelio branchiale in larve di Anfibî urodeli* (*). Nota di MILENA MARINI, presentata (**) dal Corrisp. A. STEFANELLI.

La precisa conoscenza della struttura dell'epitelio branchiale degli Anfibî è di notevole interesse poiché questo pur conservando molte caratteristiche morfologiche e fisiologiche del tegumento si specializza per favorire gli scambi gassosi.

Nel riprendere in esame, con l'ausilio del microscopio elettronico, la struttura di questo epitelio ho scelto le larve degli Anfibî urodeli dove esso, secondo i dati dell'istologia classica, differisce dall'epidermide per il fatto di essere più sottile e in certi punti apparentemente privo di membrana basale. Mi è parso pertanto di un certo interesse stabilire un confronto tra la fine struttura dell'epitelio branchiale e quella dell'epidermide tenendo in particolare considerazione le modificazioni che avvengono all'inizio del differenziamento.

Nella presente Nota mi limito alla descrizione di un aspetto: cioè della struttura del bordo libero delle sue cellule, riservandomi di trattare in un futuro lavoro degli organiti cellulari, dell'assenza della membrana basale, dei rapporti tra le cellule ecc.

Ricordo in proposito che dell'ultrastruttura dell'epitelio branchiale degli Anfibî si sono occupati solamente Schulz e De Paola [1], i quali, integrando le osservazioni al microscopio elettronico con dati istochimici, si soffermano essenzialmente nello studio di determinate strutture (*d*–citomembrane e citosomi) rinvenute nelle cellule dell'epitelio branchiale dell'Axolotl, che essi mettono in rapporto con l'attività secretoria di queste cellule. Per quanto riguarda la superficie libera delle cellule esterne accennano solo al fatto che essa è fornita di piedini citoplasmatici a forma di tentacolo (« tentakelartige Cytoplasmafüsschen ») immersi in un materiale extracellulare omogeneo; questo materiale è PAS–positivo.

Va notato inoltre che le osservazioni di Schulz e De Paola si riferiscono alle branchie di Axolotl le quali, al dire degli stessi Autori, presentano una struttura che denuncia una limitata attività respiratoria.

L'epidermide delle larve di Anfibî, invece, è stata studiata al microscopio elettronico da diversi ricercatori (Porter [2], Weiss e Ferris [3], Salpeter e

(*) Ricerca eseguita nell'Istituto di Anatomia comparata « G. B. Grassi » dell'Università di Roma.

(**) Nella seduta del 19 novembre 1960.

(1) H. SCHULZ e D. DE PAOLA, « Z. Zellforsch. Mikr. Anat. », *49*, p. 125 (1958); H. SCHULZ (1958) in W. BARGMANN et alii, *Vierter internationaler Kongress für Elektronenmikroskopie*, *2*, p. 421 (Berlin 1960).

(2) K. PORTER, *Proceding international Conference Electron Microscopy*, p. 539 (London 1954); « Anat. Rec. », *118*, p. 433 (1954).

(3) P. WEISS e W. FERRIS, « Exptl. Cell Res. », *6*, p. 546 (1954); « Proc. Natl. Acad. Sci. », U.S., *40*, p. 528 (1954); « Journ. Biophys. Biochem. Cytol. », *2*, p. 275 (1956).

Singer[4], Kemp[5]), tuttavia ben poco si sa, a quanto mi consta, circa l'ultrastruttura del bordo libero delle sue cellule.

Hay[6], in un lavoro sulla struttura dei nervi nell'epidermide di arti rigeneranti in *Amblystoma* larvale, accenna tra l'altro alla superficie dell'epidermide e dimostra che essa è fornita di numerosi corti microvilli.

Maggiori ragguagli ci sono forniti da Eakin e Lehmann[7] sebbene le loro osservazioni, intese a precisare l'ultrastruttura dell'ectoderma in embrioni di *Xenopus* durante la determinazione ed il differenziamento, si arrestino allo stadio di bottone codale, quando l'epidermide è appena formata. A questo stadio la zona superficiale delle cellule epidermiche esterne è costituita da uno strato basale con reticolo relativamente denso e da un bordo distale di vescicole secretorie ovoidali. Alcune di queste vescicole appaiono vuote avendo già scaricato all'esterno il loro secreto. Secondo gli Autori, l'attività secretoria delle cellule epidermiche a questo stadio può essere ciclica, infatti alcune di esse non hanno vescicole o solo dei residui, mentre presentano nel loro citoplasma corpi sferici che si spostano verso la superficie, dove presumibilmente coalescono nelle suddette vescicole. Gli Autori ritengono che tale secrezione sia di natura lipoide o mucoide e serva a lubrificare il tegumento dell'embrione per facilitarne i movimenti; essa può anche contenere enzimi adibiti alla digestione degli involucri ovulari.

Questi Autori hanno esaminato anche qualche stadio di *Triturus alpestris*, le osservazioni a riguardo si arrestano però alla gastrula precoce.

Il materiale impiegato nella presente ricerca è il *Triturus cristatus* (Laur.) agli stadî 36–40 secondo la classificazione di Glücksohn[8].

Le branchie, isolate in soluzione di Holtfreter, sono state fissate per 1 h in osmio all'1 % in soluzione isotonica a pH 7,2 ed incluse nella miscela di metacrilati secondo la tecnica di Sjöstrand[9]. Le sezioni sono state eseguite con ultramicrotomo Sjöstrand LKB 3314 A, le microfotografie con microscopio Philips tipo 11980 da 100 kV. Alcuni pezzi, fissati in osmio ed inclusi in metacrilati, sono stati sezionati con microtomo normale a 2–3 μ di spessore per le osservazioni a contrasto di fase. Di altri pezzi infine, fissati in Bouin e Sanfelice, sono stati eseguiti preparati istologici colorati con il metodo dell'ematossilina–floxina di Gomori modificato da Bargmann[10] e con la PAS-reazione secondo McManus[11].

(4) M. M. SALPETER e M. SINGER, « Journ. Biophys. Biochem. Cytol. », *6*, p. 35 (1959).

(5) N. E. KEMP, « Anat. Rec. », *134*, p. 593 (1959); « Devel. Biol. », *1*, p. 459 (1959).

(6) E. D. HAY, « Exptl. Cell Res. », *19*, p. 299 (1960).

(7) R. M. EAKIN e F. E. LEHMANN, « Roux' Arch. Entw-mech », *150*, p. 177 (1957).

(8) S. GLÜCKSOHN, « Roux' Arch. Entw-mech », *125*, p. 341 (1932).

(9) F. S. SJÖSTRAND, « Phys. Tech. in Biol. Res. », *3*, p. 241 (1956).

(10) W. BARGMANN, « Mikroskopie », *5*, p. 289 (1950).

(11) J. F. A. MCMANUS, « Nature », *158*, p. 202 (1946).

In embrioni allo stadio 40 l'epitelio branchiale è in gran parte monostratificato con cellule povere di citoplasma, talora molto appiattite; è bistratificato, con cellule più o meno alte, in alcune zone come nella regione dorsale della branchia dorsale e nelle estremità prossimali dei tronchi branchiali; il bordo libero delle cellule talora è curvo, cosicché l'epitelio assume un aspetto ondulato; inoltre qualche cellula è provvista di ciglia. Quanto sopra pertanto rientra nel quadro istologico generale relativo alle branchie delle larve di Anfibî urodeli (cfr. Oppel [12], Rauther [13], Bond [14].

La superficie esterna delle cellule è in genere delimitata da uno strato di piccoli granuli che si colorano intensamente con l'ematossilina cromica del metodo Gomori–Bargmann e che risultano PAS–positivi (vedi figg. 1 e 2). Questo bordo granulare non è di eguale spessore su tutta la superficie branchiale e talora sembra addirittura assente. Di norma è più spesso quando le cellule sono più alte, come nella branchia dorsale, ma varia anche da cellula a cellula in una stessa zona.

I granuli in gran parte sono disposti immediatamente al di sotto della membrana cellulare, altri sembrano esterni ad essa, alcuni infine, come si osserva nelle cellule più ricche di citoplasma, sono disseminati nella zona compresa tra il nucleo e la superficie libera.

Osservazioni a contrasto di fase (su sezioni ricavate da pezzi inclusi in metacrilati) hanno messo in evidenza che l'epitelio branchiale è delimitato da un bordo costituito da minute strutture; qualche granulo dello stesso aspetto è presente anche nel citoplasma sopranucleare.

Da quanto sopra appare evidente che i quadri osservati con i diversi metodi coincidono, per cui ritengo che le strutture granulari osservate a contrasto di fase siano da identificarsi con i granuli PAS–positivi.

Negli embrioni allo stadio 36 non si può ancora parlare di un epitelio branchiale ben differenziato in quanto le branchie, ancora non irrorate, sono costituite da abbozzi epiteliali con scarsa infiltrazione connettivale. Tuttavia anche a questo stadio la superficie libera delle cellule esterne è delimitata da un bordo granulare che presenta le stesse caratteristiche descritte per lo stadio 40 (cfr. figg. 1 e 2).

Nelle sezioni trasversali osservate al microscopio elettronico, il bordo libero delle cellule dell'epitelio branchiale appare delimitato da una serie di vescicole di forma ovale o rotondeggiante con diametro maggiore da 0,3 a 1 μ (vedi figg. 3–4–6). Esse sono circondate da una membrana che in certi punti sembra doppia; il loro contenuto è costituito da una sostanza trasparente e da minute granulazioni opache agli elettroni.

(12) A. Oppel, *Lehrbuch der vergleichenden Mikroskopischen Anatomie der Wirbeltiere* (Jena 1905).

(13) M. Rauther in L. Bolk et alii, *Handbuch der vergleichenden Anatomie der Wirbeltiere* (Berlin, Wien 1937).

(14) A. N. Bond, « Devel. Biol. », *2*, p. 1 (1960).

Le vescicole, tranne qualcuna (in genere meno voluminosa) disseminata nel citoplasma tra nucleo e bordo esterno, sono per lo più disposte in un'unica fila immediatamente sotto la membrana cellulare; infatti spesso si osservano dei corti microvilli che sporgono al di sopra di esse (vedi figg. 3 e 4). In qualche caso ho osservato interruzione della membrana cellulare e della parete della vescicola con fuoriuscita di secreto (vedi fig. 6 S).

La frequenza delle vescicole non è eguale in tutte le cellule né su tutta la superficie di una stessa cellula: infatti mentre in alcuni casi esse sono addossate l'una all'altra o tuttalpiù è tra loro interposta una piccola zona di citoplasma fondamentale, in altri casi sono poche e distanziate lungo il bordo cellulare. Ciò è illustrato nella fig. 3 dove nelle due cellule vicine si possono osservare le diverse condizioni.

In sezione tangenziale il bordo libero delle cellule epiteliali appare in genere suddiviso in tante piccole aree poligonali più o meno ravvicinate, delimitate da una sottile membrana. All'interno presentano una sostanza trasparente agli elettroni punteggiata da sottilissimi granuli.

Queste aree poligonali non sono altro che le sezioni delle vescicole sopra descritte, come ho potuto appurare in quei casi in cui una parte di questa struttura è stata sezionata trasversalmente e l'altra tangenzialmente (vedi fig. 5).

Queste strutture sono comuni sia allo stadio 36 che allo stadio 40, solo le dimensioni delle vescicole allo stadio 36 appaiono lievemente inferiori.

In base alle osservazioni eseguite con l'ausilio del microscopio elettronico, è risultato che le cellule dell'epitelio branchiale di *Triturus* a stadî precoci di sviluppo (st. 36–40) presentano, nella regione superficiale, un allineamento più o meno continuo di vescicole contenenti una sostanza meno densa rispetto al restante citoplasma e limitate da una distinta membrana; alcune di esse sono disseminate anche nel citoplasma sottostante.

Poiché queste vescicole hanno la stessa disposizione e lo stesso ordine di grandezza dei granuli PAS–positivi osservati al microscopio ottico vanno identificate con essi; pertanto se ne deduce che nelle vescicole sia contenuto del secreto, di probabile natura mucoide, che elaborato nell'interno della cellula coalesce nelle suddette vescicole.

L'affollarsi delle vescicole sul bordo delle cellule ed i casi di lacerazione della membrana cellulare e della parete della vescicola con versamento del suo secreto fanno pensare che le vescicole, raccolto il secreto, lo trasportino verso la superficie per riversarlo all'esterno.

I quadri da me osservati sul bordo libero dell'epitelio branchiale di *Triturus* hanno una certa somiglianza con i quadri secretori descritti da Eakin e Lehman [7] nell'epidermide di *Xenopus*; le differenze morfologiche del secreto e le maggiori dimensioni delle vescicole secretorie descritte nell'Anfibio anuro possono essere imputate, oltre che alle differenti tecniche, alla diversità del materiale impiegato.

Ricerche in corso sono intese a completare queste osservazioni preliminari e a precisare se, come sembra, i quadri descritti nell'epitelio branchiale sono comuni a tutta l'epidermide di *Triturus* a stadî precoci di sviluppo (*).

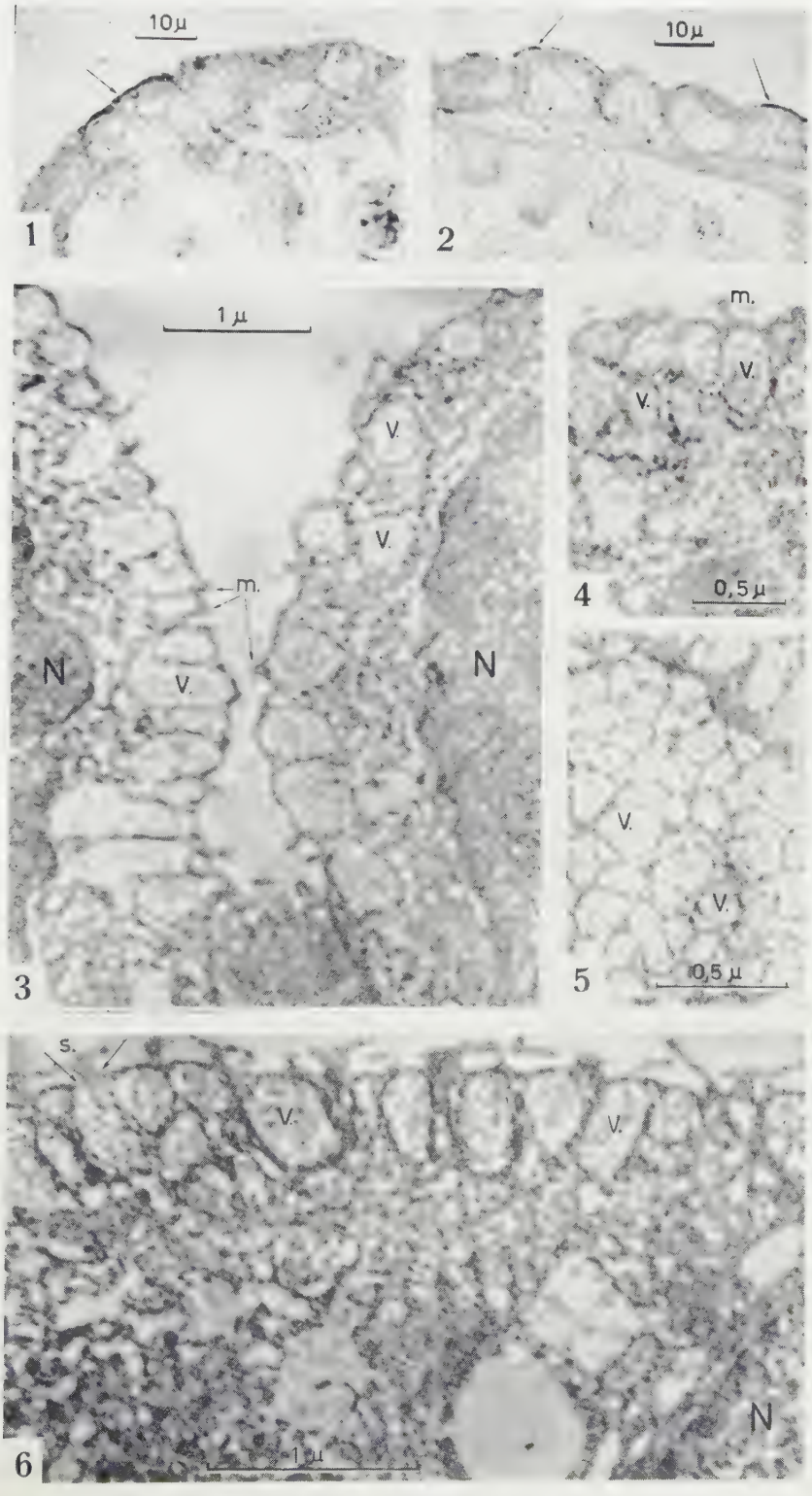
SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA I

1–2. Epitelio branchiale di *Triturus* a stadio 36 (1) e 40 (2); (PAS–reazione. Le frecce indicano i granuli di secreto).

3–6. Aspetto del bordo libero dell'epitelio branchiale al microscopio elettronico (3–4–6 sezioni normali alla superficie branchiale in embrioni a stadio 40; 5 sezione tangenziale in embrione a stadio 36).

(N = nucleo; V = vescicole di secreto; *m* = microvilli; *s* = secreto che fuoriesce dalla vescicola).

(*) Ringrazio il prof. Caglioti, direttore dell'Istituto di Chimica dell'Università di Roma, per avermi permesso l'uso del microscopio elettronico ed il sig. Tiribelli per l'assistenza tecnica nell'esecuzione delle microfotografie.


10μ
1
10μ
2
1 μ
V.
V.
m.
N
V.
N
3
m.
V.
V.
4
0,5 μ
V.
V.
5
0,5 μ
s.
V.
V.
N
6
1 μ

PERSONALE ACCADEMICO

Il Socio Anziano Cassinis desidera porgere il più vivo ringraziamento della Classe a tutti gli scienziati stranieri che hanno preso parte, questa mattina, alla celebrazione del centenario della nascita di Vito Volterra ed è particolarmente lieto di salutare quelli di essi che sono intervenuti alla presente adunanza e cioè il Socio Straniero Joseph Pérès, dell'« Académie des Sciences de l'Institut de France » e dell'Università di Parigi; il prof. Marcel Brelot, Presidente della « Société Mathématique de France »; i proff. Arnaud Denjoy e René Garnier, dell'« Académie des Sciences de l'Institut de France »; il prof. Grigore Moisil, dell'Istituto Matematico dell'Accademia della Repubblica Popolare Romena.

Sono inoltre presenti il prof. Adam Bielecki, dell'Università di Lublino, e il prof. Hauras Kósa, dell'Università di Budapest.

Il prof. Denjoy esprime il desiderio di ricordare anche in questa sede Vito Volterra e la sua opera scientifica, e pronuncia le seguenti parole:

« Je ressens pleinement l'honneur de parler devant cette auguste Académie dei Lincei, la plus ancienne de l'Europe. Mon antériorité au tableau des membres de notre Académie des Sciences de Paris me faisait, selon la règle de celle–ci, un devoir d'être son porte–parole à la cérémonie de celle–ci. Mon confrère Pérès, actuellement et depuis plusieurs années doyen de la Faculté des Sciences de Paris, disciple et ami constant de Vito Volterra, avait tous les titres pour rendre hommage à la mémoire de l'illustre savant dont il connaissait mieux que quiconque les divers et fréquents rapports avec l'Université de Paris, la Sorbonne, l'Institut Henri Poincaré et le Collège de France.

« À la cérimonie de ce matin, M. Pérès a excellemment dit avec quel plaisir notre Académie de Paris avait accepté de prendre part à la commémoration par l'Académie des Lincei, de l'un de leur plus éminents membres communs. Il a de même parlé des liens sentimentaux et scientifiques ayant uni à Vito Volterra l'Ecole mathématique française d'avant 1940. Je dis d'abord sentimentaux, parce que à cet égard, la France, me semble–t–il, pouvait prétendre se distinguer de tant d'autres pays où l'oeuvre de votre glorieux sociétaire avait étendue son action. Une amitié quasi fraternelle l'unissait à Jacques Hadamard, qui va dans quelques semaines clore la quatre–vingt quinzieme année de son âge, à Emile Borel, à Henri Lebesgue. Quand Volterra se trouvait au milieu de ses collègues parisiens, si la définition politique de la nationalité nous interdisait de voir en lui un français, personne n'eût songé à le regarder comme un véritable étranger. Quand, face au régime despotique s'imposant à l'Italie, il se dressa courageusement, le respect qu'il inspirait grandit encore. Nous souffrimes pour lui de ses épreuves et de celles que subissait son entourage. Il eut le soutien moral de tous ceux qui chez

nous n'admettent pas d'atténuation au droit de chacun à la maîtrise de sa propre pensée, au droit de la communiquer librement, au droit de la defendre.

« Sur le plan scientifique nous lui dûmes beaucoup. En ce qui touche l'un des sujets dont je me suis le plus occupé, je rappellerai que Volterra donne le premier exemple d'une fonction qui, étant la dérivée d'une fonction continue, est bornée sans être integrable par le procédé de Riemann. Cette fonction posait imperieusement le problème de decouvrir un nouveau calcul integral permettant d'obtenir la primitive de toute dérivée bornée. Quelques années plus tard, Lebesgue devait répondre à cet appel.

« Ayant créé l'Analyse fonctionelle, en offrant à ses continuateurs une voie largement ouverte et déblayée, Volterra pouvait justement revendiquer une paternité dans les travaux considérables publiés par Hadamard, Paul Lévy, Fréchet, dans cette discipline.

« Volterra a initié à la recherche mathématique M. Pérès et il a inspiré l'importante oeuvre d'analyste de mon confrère.

« Si, par un oubli, une négligence impensable, l'Académie des Lincei avait omis de célébrer ce centenaire, les mathématiciens français auraient simplement acquitté une dette de reconnaissance, si, pour leur compte, ils avaient rendu cet hommage.

« Pour toutes ces raisons, entre bien d'autres, l'Académie des Sciences de Paris a été heureuse de s'associer à son ainée, l'Académie des Lincei, pour féter solennellement une illustre mémoire ».

Il Presidente ringrazia l'oratore per le sue elevate parole e, riferendosi all'avvenuta celebrazione del centenario di Vito Volterra, ricorda che quest'anno cade anche il centenario della nascita di un altro illustre Socio Linceo, che del Volterra fu amico fraterno: Carlo Somigliana. Assicura, in proposito, che l'Accademia non mancherà di celebrare la ricorrenza per opera del Collega Signorini.

Il Socio Anziano Cassinis comunica quindi che sono stati eletti, nella scorsa estate, i seguenti nuovi Soci:

Soci Nazionali: Alessandro Terracini, Luigi Solaini, Gleb Wataghin, Umberto D'Ancona, Oliviero Mario Olivo.

Soci Corrispondenti: Guido Zappa, Livio Gratton, Stefano Bonatti, Giacomo Mottura.

Soci Stranieri: Hideki Yukawa, Martin J. Buerger, Kennet V. Thimann.

A tutti i suddetti Colleghi, il Presidente porge il più cordiale saluto e augurio della Classe e suo personale, rivolgendosi in particolare ai nuovi Soci presenti alla seduta.

È lieto poi di rinnovare l'espressione del più sincero compiacimento e del più vivo plauso all'illustre Collega Polvani, per la sua nomina all'alta carica di Presidente del Consiglio Nazionale delle Ricerche, formulando fervidi voti augurali per l'opera che egli ha intrapreso e confermandogli la piena solidarietà e l'impegno di sincera collaborazione di quei Soci Lincei che fanno parte del C.N.R.

Il Socio Polvani ringrazia e assicura che l'appoggio dei Colleghi dell'Accademia gli sarà di valido aiuto e conforto nello svolgimento del lavoro che gli è stato affidato.

Il Socio Anziano Cassinis ha il dolore di partecipare la notizia della morte del Socio Nazionale Giovanni Negri, della V Categoria – Sezione Botanica – deceduto il 15 settembre 1960; del Socio Nazionale Luigi Rolla, della III Categoria – Sezione Chimica – deceduto l'8 novembre 1960; del Socio Straniero Paul Fallot, della IV Categoria, deceduto il 22 ottobre 1960.

Giovanni Negri, Socio Corrispondente dal 1930 e Nazionale dal 1947, fu Professore di Botanica a Firenze. In molti anni di ininterrotto lavoro affrontò per primo e, sotto molti aspetti risolse, in Italia molti problemi di fitogeografia, materia della quale egli fu il più autorevole cultore. La regione piemontese, la Toscana, l'Etiopia, furono tra i campi da lui più ampiamente studiati. Egli trattò anche problemi di carattere generale: le considerazioni sull'ecoide come unità sinecologica fondamentale e la graduale demolizione del concetto di associazione vegetale furono principalmente opera sua. Nei congressi internazionali gli furono più volte affidati compiti preminenti nello studio dei limiti altitudinari della vegetazione.

Luigi Rolla, già Direttore dell'Istituto Chimico dell'Università di Genova, fu nominato Socio Corrispondente dell'Accademia dal luglio 1926 e Socio Nazionale dal 1947. Egli compì interessanti ricerche sulla chimica delle terre rare, sui potenziali di ionizzazione degli elementi, sulle cellule fotoelettriche e sui sistemi di telegrafia e di telefonia con fasci di radiazioni ultrarosse, dando impulso alle ricerche nei campi più moderni della chimica-fisica. Il lavoro assiduo che egli svolse per il frazionamento delle terre rare, con personale sacrificio, lo condusse a dare nuovi ed importanti metodi di isolamento dei composti puri e ad ottenerne ingenti quantitativi, che servirono per numerose ricerche sue e di altri sperimentatori, ai quali egli ne fornì sempre con grande liberalità.

Il prof. Paul Fallot – Socio Straniero della Categoria IV dal 1958 – fu Professore di Geologia al Collège de France. Egli si occupò principalmente della geologia del Mediterraneo Occidentale, con particolare riguardo alle catene montuose dell'Africa Settentrionale, come il Rif e l'Atlante, ed alle Isole Baleari. Ultimamente la sua inesausta attività si era rivolta allo studio delle Alpi Marittime francesi e italiane. Era capo di una scuola scientifica molto attiva e la sua inattesa scomparsa ha suscitato larga eco di rimpianto anche nei geologi italiani, fra i quali il Fallot era universalmente conosciuto ed apprezzato.

Alla memoria dei tre illustri Colleghi scomparsi, il prof. Cassinis eleva un pensiero di reverente omaggio.

Il Presidente Cassinis invia poi un affettuoso pensiero all'illustre Collega Giorgio Dal Piaz, al quale è stata recentemente conferita la Medaglia d'Oro per i benemeriti della cultura.

Il Socio Signorini desidera informare i Colleghi che il 12 novembre si è svolta, presso il Politecnico di Milano, una solenne cerimonia in onore del

Rettore Cassinis, in occasione del suo ritiro dall'insegnamento per limiti di età.

A nome della Classe, il prof. Signorini porge al Collega Cassinis un affettuoso saluto e un sincero augurio per l'attività scientifica che l'illustre studioso continuerà ad esplicare anche se costretto ad abbandonare materialmente la direzione di quel Politecnico, al quale per tanti anni ha dato la sua preziosa opera.

Il Socio Anziano Cassinis ringrazia.

COMUNICAZIONI VARIE

Il Socio Segre riferisce sulle manifestazioni per il III centenario della Royal Society, con le seguenti parole:

« Le celebrazioni per il III centenario della *Royal Society* si svolsero a Londra dal 18 al 26 luglio 1960 con grande sfarzo e solennità e con la partecipazione di centinaia e centinaia di rappresentanti di Accademie ed Università convenuti da tutte le parti del mondo. Esse consistettero in conferenze generali su argomenti scientifici ad alto livello, visite a varie Università ed Istituzioni, escursioni e ricevimenti.

« Il 18 luglio presentai al Vice Presidente della Royal Society l'indirizzo rivolto a quest'ultima dalla nostra Accademia; tale indirizzo fu poi esposto a Burlington House, nella sede cioè della Royal Society, in occasione di un ricevimento dato ivi il 23 luglio.

« Le celebrazioni provocarono un'eco vastissima nella stampa ed alla televisione, ed il 19 luglio il " Times " ebbe a dedicare alla Royal Society uno speciale supplemento di ben 24 pagine. A quelle presero parte attiva le più alte autorità dello Stato, dalla regina Elisabetta, che il 19 luglio tenne il discorso inaugurale all'Albert Hall, di fronte a parecchie migliaia di intervenuti, fino al primo ministro Macmillan che partecipò al grande banchetto di chiusura pronunciandovi un discorso di alto apprezzamento per la Royal Society e per la ricerca scientifica.

« In varie occasioni venne asserito pubblicamente che la Royal Society è la più vecchia società scientifica del mondo, trascurando il fatto che l'Accademia dei Lincei fu fondata 57 anni prima di quella. Essendo ciò stato da me osservato a vari Colleghi inglesi, mi si obiettò che la Royal Society ha avuto dal 1660 in qua una continuità che non poteva invece vantare la nostra Accademia. Un riflesso di tale atteggiamento si ebbe alla solenne cerimonia inaugurale, nella quale vennero letti messaggi di congratulazione da rappresentanti delle Accademie di Francia e di Australia e dal prof. Dario Graffi, in rappresentanza dell'Università di Bologna, mentre all'Accademia dei Lincei non venne accordato speciale risalto alcuno.

« Aggiungo infine che sono da poco usciti due bei volumi sulla storia della Royal Society, uno dei quali di circa 300 pagine, editi da questa e riccamente illustrati. Io ritengo che l'Accademia dei Lincei dovrebbe prov-

vedere nei propri riguardi ad una pubblicazione consimile, che vada al di là di quella pregevolissima del prof. Picone. Tale pubblicazione potrebbe fra l'altro mostrare come le interruzioni nella vita della nostra Accademia debbano ascriversi a cagioni storiche e politiche legate pure all'autonomia ed originalità di pensiero dell'Accademia stessa; ma che appunto così, la tradizione scientifica di questa riuscì a perpetuarsi nei secoli anche attraverso le più amare vicissitudini ».

Il Presidente ringrazia l'oratore e, associandosi pienamente a nome della Classe e suo personale alla proposta, assicura che provvederà ad informarne la Presidenza.

Dà quindi notizia della costituzione, da parte del Consiglio dell'Ordine degli Ingegneri della Provincia di Roma, di un Comitato di agitazione per la difesa dei valori culturali delle professioni tecniche, costituitosi in relazione all'approvazione al Senato della proposta di legge per l'ammissione dei diplomati geometri e periti alla Facoltà d'Ingegneria e di Architettura.

Comunica infine che avrà inizio, in data 9 gennaio 1961, presso l'Istituto Superiore P. T., un corso di specializzazione in telecomunicazioni, avente grado universitario, ai sensi del R. D. n. 2483 del 19 agosto 1923, modificato con la Legge n. 317 del 5 giugno 1954.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio Pérès presenta un volume di Vito ed Enrico Volterra dal titolo « Sur les distorsions des Corps élastiques (Théorie et applications) » e lo illustra brevemente con le seguenti parole: « Cette publication vient remplir un souhait formé par Vito Volterra dans les dernières années de sa vie: celui de voir les Leçons qu'il avait faites à Paris sur le sujet complétées par son fils Enrico en ce qui concerne les développements ultérieurs et les applications à la technique des constructions.

« Après l'émouvante cérémonie de cette matinée, le livre exprime donc un hommage à l'inoubliable Savant dont nous célébrons aujourd'hui le centenaire de naissance ».

Il Socio Anziano Cassinis ringrazia il Collega Pérès per aver voluto cortesemente offrire in omaggio all'Accademia il citato studio, proprio nella ricorrenza del centenario della nascita di Vito Volterra.

Il Socio Segre, a nome del Comitato accademico per l'Edizione delle Opere Matematiche di Vito Volterra, presenta il IV volume delle Opere stesse con le seguenti parole: « Nella cerimonia di stamane – con la quale il centenario della nascita di Vito Volterra è stato solennemente celebrato dalla nostra Accademia – fu detto che, fra le più importanti iniziative prese da questa ultima dopo la sua ricostituzione, va annoverata la pubblicazione delle *Opere matematiche* di quell'eminente scienziato, al quale Guido Castelnuovo giustamente riconobbe il merito di avere « tenuta alta per mezzo secolo la gloria della scuola italiana fra tutti i popoli civili ».

« I primi tre volumi di tali *Opere*, apparsi negli anni 1954, 1956 e 1957, furono curati con alta competenza ed appassionata dedizione da Ugo Amaldi, che già ebbe a presentare all'Accademia i primi due volumi, ma al quale purtroppo la morte impedì di fare altrettanto per il terzo. È certamente superfluo aggiungere alcunché su quei volumi, ormai universalmente noti ed apprezzati. Ad essi fa ora seguito il volume quarto, che – a nome del Comitato per l'edizione delle *Opere* – ho oggi l'onore di presentare all'Accademia.

« Questo volume, stampato con l'usuale encomiabile perizia dalla Tipografia dell'Accademia, contiene le Memorie e Note apparse negli anni dal 1914 al 1925, in numero di venticinque ed ordinate cronologicamente. Esso offre un panorama estremamente vario e suggestivo, mostrando – oltre alla acutezza ed alla geniale profondità delle vedute e dei risultati del Volterra – la vastità e multiformità dei suoi interessi e delle sue attività in quel periodo condizionato dalla prima guerra mondiale, nonché l'altissima rinomanza da lui raggiunta, che lo faceva acclamare quale maestro nei più importanti centri del sapere di Europa e di America.

« La partecipazione volontaria al fronte in quella guerra – che a lui, ormai cinquantaseienne, valse un encomio solenne, una promozione militare ed una decorazione al valore – ebbe a suggerirgli due dei lavori del presente volume, dedicati al calcolo delle velocità dei dirigibili e degli elementi di tiro per artiglieria aeronautica. In questi lavori, come in tutta l'opera del Volterra, non si perdono mai di vista i fini pratici; ma qui vien dato loro posto preminente, fino ad ottenere esplicite tavole di tiro.

« Il volume contiene poi testi lucidissimi di corsi e conferenze tenute dal Volterra alla Società matematica di Berlino sulle funzioni di linee, alle Università di Princeton e di Buenos Aires sulle funzioni permutabili e sulle relazioni fra analisi funzionale e calcolo delle variazioni, al Rice Institute su teoria delle onde e metodo di Green, sulle funzioni di composizione, e sulle relazioni di isogeneità conseguite quale estensione al campo funzionale della teoria delle funzioni analitiche. Queste lezioni, ammirevoli per l'elevatezza e la originalità del contenuto ed il magistero della forma, hanno anche il pregio di fare ben comprendere lo sviluppo storico delle superbe concezioni del Nostro e l'arduo fecondo travaglio che, fin dagli anni giovanili, lo aveva condotto alle sue immortali scoperte nel calcolo funzionale.

« Tali scoperte, rielaborate riassuntivamente nelle suddette lezioni, sono poi state completate dallo stesso Volterra in altri lavori, vari dei quali trovansi nel presente volume. Questi concernono le equazioni integrali, integro-differenziali ed alle derivate funzionali, le funzioni permutabili e le funzioni di composizione; fra essi viene ad avere speciale risalto la bella e poderosa Memoria che trasporta l'uso delle potenze frazionarie e dei logaritmi nell'ambito dell'analisi funzionale. Vi sono infine alcune fondamentali ricerche di fisica matematica, fra le quali basti menzionare la grande Memoria dedicata allo studio del flusso dell'elettricità in un campo magnetico, ed inoltre numerosi discorsi, rapporti, relazioni, necrologi, ecc.

« Aggiungo da ultimo che le *Opere matematiche* di Vito Volterra verranno a comprendere in tutto cinque volumi, invece dei sei inizialmente previsti; e ch'esse saranno ben presto completate, in quanto il quinto ed ultimo volume è ora già completamente pronto per la stampa e quasi per metà composto. Con ciò la nostra Accademia avrà assolto il compito propostosi, ed eretto così il più bel monumento alla memoria del Grande celebrato stamane! ».

Il Presidente ringrazia il Collega Segre e si congratula vivamente con lui e con i membri del Comitato per la realizzazione della importante impresa che costituisce il migliore omaggio reso dall'Accademia alla memoria dell'insigne Scienziato scomparso.

Il Socio A. Terracini presenta i due volumi delle *Opere* di Eugenio Elia Levi, editi a cura dell'Unione Matematica Italiana, col contributo del C.N.R. La materia è stata ordinata dal Collega Picone che ha anche redatto, con grande competenza e con vivo affetto, l'introduzione sulla vita e sulle opere del Levi, mentre la stampa è stata curata dal prof. Domenico Caligo.

Il Socio Terracini illustra la nobile figura di Uomo e di Scienziato di Eugenio Elia Levi, ricordando che questi iniziò la sua carriera scientifica quale assistente alla cattedra di analisi infinitesimale di Ulisse Dini, dal 1906 al 1909. Nominato in quell'anno professore della stessa disciplina nell'Università di Genova, lasciò l'insegnamento nel marzo del 1916, per recarsi al fronte, ove cadde eroicamente nel 1917, a soli 34 anni di età, combattendo sull'Altipiano della Bainsizza. Sebbene la sua operosità scientifica abbia purtroppo avuto la durata di soli dieci anni, Eugenio Elia Levi ha dato alla scienza numerosi contributi, alcuni dei quali di importanza fondamentale, nei vari campi della Matematica: nella geometria differenziale, nella teoria dei gruppi, in quella delle funzioni, nelle teorie delle equazioni a derivate parziali e a derivate parziali del tipo ellittico e parabolico, e nel calcolo delle variazioni.

Il Presidente ringrazia il Socio Terracini e informa i Colleghi che fra breve uscirà anche il IV volume delle *Opere* di Levi Civita che è già in bozze.

Il Socio Anziano Cassinis comunica poi che è uscito il fascicolo VI (giugno 1960), dei Rendiconti e che, a giorni, sarà spedito ai Soci il fascicolo 1–2 (luglio–agosto) delle ferie. Ringrazia pertanto i Segretari Accademici Signorini e Cotronei per la competenza e la solerzia con le quali seguono i Rendiconti.

Il Segretario Accademico presenta le pubblicazioni inviate in omaggio all'Accademia.

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Il Socio Anziano Cassinis comunica che è pervenuto all'Accademia un lavoro (che per il numero delle pagine si può considerare come una Memoria) del Socio Severi e dell'ing. Francesco Pannaria trasmesso dal Socio Severi per la pubblicazione negli Atti. Il Socio Picone presenta una sua Memoria

dal titolo: « Criteri sufficienti per il minimo assoluto di una funzione reale di variabili reali ».

Presentano Note per la pubblicazione nei Rendiconti i Soci Sansone, Trevisan, Pensa, G. B. Dal Piaz, Segre, Picone, Tonzig, Quilico, Margaria, Cotronei, Califano, Supino, Imbò, Cicala, Zappa.

Su proposta del Socio Picone e con l'autorizzazione del Presidente, il prof. Kósa presenta personalmente un suo lavoro per i Rendiconti.

Viene letto l'elenco delle Note pervenute alla Cancelleria.

Le seguenti Note saranno pubblicate in fascicoli successivi:

Cambi L. e Dubini Paglia E. – Monocloruri e ipocloruri di Rh^{III}. Nota V (pres. dal Socio L. Cambi).

Supino G. – Sopra le onde di traslazione nei canali. – *A*) L'equazione linearizzata. Nota II.

Bracchi F., Cattorini M. e Gualtierotti T. – Distribuzione della frequenza di scarica della singola fibra nel sistema muscolare dell'uomo durante contrazioni isometriche massimali (pres. dal Socio R. Margaria).

Caglioti L., Cainelli G. e Minutilli F. – Isolamento di un nuovo acido triterpenico dalle sanse dell'*Olea europea* (pres. dal Socio A. Quilico).

Graziadei P. – Particolari nuovi sulla struttura dell'apparato nervoso destinato alla ventosa di *Ommatostrephes sagittatus* (pres. dal Socio A. Pensa).

Marchi E. – Sul moto uniforme turbolento delle correnti liquide. Nota II (pres. dal Socio G. Supino).

Roche J., Covelli I. e Salvatore G. – Penetrazione e metabolismo degli ormoni tiroidei nelle cellule isolate di adenocarcinoma Ehrlich–ascite (pres. dal Socio L. Califano).

Testa C. e Bordoni U. – Le lesioni del labirinto nelle rane sottoposte a centrifugazione (pres. dal Socio R. Margaria).

Il Presidente, per incarico del Socio G. Levi, impossibilitato ad intervenire alla seduta, presenta una Memoria del prof. Francesco Loreti dal titolo: « Reperti ed interpretazioni sui muscoli piramidale e retto dell'addome e sulle relative guaine nell'Uomo ed in alcuni generi tra i Primati, gli Insettivori ed i Chirotteri ».

Per l'esame della suddetta Memoria viene nominata una Commissione, composta dallo stesso Socio G. Levi e dai Colleghi Margaria e Olivo.

RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Socio Zagar, anche a nome dei Soci Abetti e Righini, legge la relazione sulla Memoria di Giovanni G. Godoli dal titolo: « Nuove riduzioni delle osservazioni di protuberanze eseguite all'Osservatorio di Arcetri durante i cicli 17, 18, 19 ».

La relazione, che conclude proponendo la stampa del suddetto lavoro nelle Memorie accademiche, è messa ai voti dal Presidente e approvata all'unanimità.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 19 novembre 1960

ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'U.R.S.S. — *La face cachée de la lune.* Traduit de l'Anglais par Hugo Fourmier. Paris..., Pergamon Press, 1960. Pp. 36, in–8°, con figg.

ANDERSON Jean H. — Vedi: *Search (A) for faint blue stars.*

BANNA Pietro. — *Spazio e materia.* Estr. da « Rivista Aeronautica », 1960, n. 7.

Bor'ba s pyl'ju pri pnevmeudarnom burenii. Alma–Ata, Izdatel'stvo Akademii Nauk Kazahskoj SSR, 1960. Pp. 110, in–8°, con figg.

BOUSFIELD E. L. — *Canadian Atlantic Sea Shells.* Photography by F. J. Cooke. Art Work by John Crosby. Issued under the authority of the Honourable Alvin Hamilton P. C., M. P. Minister of Northern Affairs and National Resources. Ottawa, Department of Northern Affairs and National Resources, National Museum of Canada, 1960. Pp. 72, in–8°, con figg.

BRUNETTI Leandro. — *I fenomeni della luce. Teoria sulla trasmissione della luce che dà ragione degli aspetti contraddittori delle esperienze sulla velocità di propagazione.* Orvieto, Roberto Brunetti, 1960. Pp. 43, in–8°.

CAMERON Austin W. — *Les mammifères du Canada.* Illustrations de John Crosby. Publié avec l'autorisation de l'Honorable Alvin Hamilton C. P. Ministre du Nord Canadien et des Rossources Nationales. Ottawa, Musée National du Canada, Ministère du Nord Canadien et des Ressources Nationales, 1960. Pp. 89, in–8°, con figg.

Caryologia. Giornale di Citologia, Citosistematica e Genetica. Fondato da Alberto Chiarugi. Vol. XI, 1958–59, nn. 2–3; vol. XII, 1959–60, nn. 1–3; vol. XIII, 1960, n. 1.

Catalogo della collezione dei coleotteri del Dr. Roberto Haas. Varallo Sesia, Museo Calderini, 1960. Pp. 203, in–8°.

ČIŽEVSKIJ A. L. — *Aéroionifikacija v narodnom hozjajstve.* Pod obščej redakciej i s predisloviem A. G. Pogosova i F. T. Sadovskogo. Moskva, Gosplanizdat, 1960. Pp. 758, in–8°, con figg.

— *Strukturnyj analiz dvižuščejsja krovi.* Moskva, Izdatel'stvo Akademii Nauk SSSR, 1959. Pp. 474, in–8°, con figg.

CRESCENZI Sante e GAFFURINI Ubaldo. — *Tentativo di ricostruzione paleografica. La Sicilia attraverso il Neogene e il Quartenario.* Estr. da « Rivista Mineraria Siciliana », a. VI, 1955, n. 32.

— e PETROCCHI Pio. — *Le manifestazioni d'idrocarburi in Sicilia (Elenco, ubicazione e bibliografia).* Estr. da « Rivista Mineraria Siciliana », a. V, 1954, n. 28–29.

DEL GUERRA G. — Vedi: MITOLO M. e DEL GUERRA G.

D'ERASMO Geremia. — *Nuovi avanzi ittiolitici della « serie di Lugh » in Somalia conservati nel Museo Geologico di Firenze.* Estr. da « Palaeontographia Italica », vol. LV (n. s. XXV), 1960.

D'OLIVEIRA FEIJÃO Raúl. — *Elucidário fitológico. Plantas vulgares de Portugal continental, insular e ultramarino. (Classificação, nomes vernáculos e aplicações).* Vol. I: *A–H.* Lisboa, Instituto Botânico, 1960. Pp. 472, in–8° (Artigo de Divulgação, n. 8).

ENTE NAZIONALE IDROCARBURI. — *Energia e idrocarburi nel 1959.* Studio allegato alla Relazione dell'E. N. I. al 30 aprile 1960. Roma, Stab. Tip. Carlo Colombo, [1960]. Pp. 207, in–4°, con figg.

ERGALIEV A. E. — *Razrabotka mestorožděnij žil'nogo tipa.* Alma–Ata, Izdatel'stvo Akademii Nauk Kazahskoj SSR, 1960. Pp. 306, in–8°, con figg.

FÀNTOLI Amilcare. — *Alcuni elementi relativi alla climatologia della Somalia.* Estr. da « Rivista di Meteorologia Aeronautica », 1960, n. 2.

FÀNTOLI Amilcare — *Climatologia.* Estr. da « Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei XL », s. 4ª, vol. XI, 1960 (Fa parte della « Biogeografia delle Isole Pelagie » di Edoardo Zavattari e Coll.).

— *Le precipitazioni atmosferiche in Somalia.* Estr. da « Rivista di Agricoltura Subtropicale e Tropicale », a. LIV, 1960, nn. 4–6, 7–9.

FOURMIER Hugo. — Vedi: ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'U.R.S.S.

GAFFURINI Ubaldo. — Vedi: CRESCENZI Sante e GAFFURINI Ubaldo.

GIORGI Maurizio. — *Sull'Osservatorio Magnetico Sperimentale dell'Isola di La Maddalena.* Genova, Tipo-Litografia dell'Istituto Idrografico della Marina, 1960. Pp. 7, in–8° (Istituto Idrografico della Marina. Divisione Geofisica. Reparto del Magnetismo Terrestre).

GOLDSCHMIDT Richard B. — *In and out of the ivory tower. Autobiography.* Seattle, University of Washington Press, 1960. Pp. XIII–352, in—8°.

GRUMĂZESCU M. — *Măsurători acustice in construcţii.* Bucureşti, Editura Academiei Republicii Populare Romîne, 1960. Pp. 160, in 8°, con figg. e tavv. (Acustică in Construcţii).

HALBWACHS Francis. — *Théorie relativiste de fluides à spin. Recherche sur la dynamique du corpuscule tournant relativiste et l'hydrodynamique relativiste des fluides dotés d'une densité de moment angulaire interne.* Paris, Gauthier-Villars Éditeur-Imprimeur-Libraire, 1960. Pp. X–294, in–8°, con figg. (Les grands problèmes des Sciences. Ouvrages réunis par M^me^ P. Février, X).

HANZAWA S. — Vedi: *Professor Shoshiro Hanzawa.*

Hearings before the Subcommittee on Reorganization and International Organizations of the Committee on Government Operations United States Senate eighty-sixth Congress, first Session. International Health Study (pursuant to S. Res. 347, 85^th^ Cong. S. Res. 42, and S. Res. 255, 86^th^ Cong.). July 9 and 16, 1959. P. I: (*Includes transcript of Conferences in Europe, November-December, 1958*). Washington, Government Printing Office, 1960. Pp. 310, in–8°, con tavv. (The U. S. Government and the Future of the International Medical Research).

ISTITUTO IDROGRAFICO DELLA MARINA. — *Basi misurate lungo le coste d'Italia per la determinazione della velocità delle navi.* Edizione 1960. Genova, Tipo-Litografia dell'Istituto Idrografico della Marina, 1960. Pp. XXIV–162, in–8°, con figg.

IVANOV Ju. V. — *Éffektivnoe sžiganie nadslojnyh gorjučih gazov v topokah.* Tallin, Éstonskoe Gosudarstvennoe Izdatel'stvo, 1959. Pp. 32, in–8°, con figg.

KJUNG V. A. — *Slancevyj pnevmokonioz* (*pnevmokonioz, vyzyvaemyj pyl 'ju kukersitnyh gorjoučih slancev*). Tallin, Akademija Nauk Éstonskoj SSR, 1959. Pp. 200, in 8°, con tavv.

KOWALSKY Kazimierz. — *Katalog ssaków plejstocenu Polski.* Warszawa-Wrocław, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1959. Pp. 267, in–8°, con figg. (Polska Akademia Nauk. Instytut Zoologiczny, Oddział w Krakowie).

LEVI Eugenio Elia. — *Opere.* A cura dell'Unione Matematica Italiana e col contributo del Consiglio Nazionale delle Ricerche. Vol. I e II. Roma, Edizioni Cremonese, 1959–60. Voll. 2, in–8°.

LUYTEN Willem J. — Vedi: *Search (A) for faint blue stars.*

Max Planck zum Gedenken. Herausgegeben von der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Berlin, Akademie-Verlag, 1959. Pp. 64, in–8°, con tavv.

MITOLO M. e DEL GUERRA G. — *Vittorio Aducco fisiologo dell'Ateneo Pisano e l'epistolario di scienziati suoi amici.* Pisa, Editrice U. Giardini, 1960. Pp. 65, in–8° (Scientia Veterum. Collana di Studi di Storia della Medicina).

MOISIL Gr. C. — *Funcţionarea în mai mulţi timpi a schemelor cu relee ideale.* Bucureşti, Editura Academiei Republicii Populare Romîne, 1960. Pp. 279, in–4°.

NECŞULEA A. — *Bazele acustici clădirilor.* Bucureşti, Editura Academiei Republicii Populare Romîne, 1960. Pp. 158, in–8°, con figg. (Acustică in Construcţii).

NICOLAU Edmond. — *Propagarea undelor electromagnetice.* Vol. I: *Proprietăţile generale ale undelor electromagnetice.* Bucureşti, Editura Academiei Republicii Populare Romîne, 1960. Pp. 311, in–8°, con figg.

PARAVJAN A. V. — *Opyt akklimatizacii čajnogo kusta v gornyh uslovijah Srednej Azii.*

Alma-Ata, Izdatel'stvo Akademii Nauk Kazahskoj SSR, 1960. Pp. 265, in 8°, con figg.

PARR A. E. — *Mostly about Museums from the papers.* [New York], The American Museum of Natural History, 1959. Pp. 112, in-8°.

PETROCCHI Pio. — Vedi: CRESCENZI Sante e PETROCCHI Pio.

Professor Shoshiro Hanzawa Memorial Volume. Science Reports of the Tohoku University. S. 2ª (Geologia), 1960, vol. speciale, n. 4.

RESTORI Vasco. — *La clorofilla artificiale e l'uomo artificiale non sono che sogni della mente umana, romanzi di fanta-pseudo-scienza.* Gorizia, Sociale, s. d. Pp. 4 n. num., in-8°.

ROGLIANO Giuseppe. — *Geotecnica. Dissesti idrogeologici e movimenti franosi in genere. Casi pratici diversi.* Cosenza, Tipografia-Linotypia Eredi Serafino, 1960. Pp. 221, in-8°, con tavv.

— *Strada: Gioiosa Superiore-Caulonia in provincia di Reggio Calabria. Rilevamento geognostico del tracciato.* Cosenza, Tipografia-Linotypia Eredi Serafino, 1960. Pp. 38, in-8°, con figg.

SCORZA Gaetano. — *Opere scelte.* Pubblicate a cura dell'Unione Matematica Italiana e col contributo del Consiglio Nazionale delle Ricerche. Vol. I: (*1899-1915*). Roma, Edizioni Cremonese, 1960. Pp. 513, in-8°.

Search (A) for faint blue stars. XVIII: *The far southern hemisphere*; XIX: *The Region of the Horsehead Nebula.* By Willem J. Luyten and Jean H. Anderson; XX: *The Rho Ophiuchi Region.* By Willem J. Luyten. Minneapolis, The Observatory, University of Minnesota, 1959. Pp. 7, in-8°.

SEMAT Henry. — *Introduction à la physique atomique et nucléaire.* Troisième édition revue et augmentée de l'« Introduction à la physique nucléaire ». Traduction par Chantal Shafroth. Paris, Gauthier-Villars, 1960. Pp. XVI-599, in-8°, con figg.

SERIO Calogero. — *Studio chimico comparativo tra due gruppi di sorgenti termominerali nel Trapanese (Sicilia).* Estr. da « Rivista Mineraria Siciliana », a. V, n. 30.

SHAFROTH Chantal. — Vedi: SEMAT Henry.

SOVEŠČANIE (VII) PO LJUMINESCENCII (KRISTALLOFOSFORY). MOSKVA, 26 IJUNJA – 3 IJULJA 1958 G. — *Materialy.* Tartu, Akademija Nauk Éstonskoj SSR, 1959. Pp. 390, in-8°, con figg.

SPERANZA Francesco. — *La caccia alla balena.* Catania, Tipografia Zuccarello e Izzi, 1953. Pp. 21, in-8° (Università degli Studi di Catania. Istituto di Geografia).

— *La coltivazione dei fiori in Sicilia.* Estr. da « Tecnica Agricola », a. X, 1958, n. 6.

— *Dei limiti altimetrici della vegetazione sull'Etna.* Catania, Tipografia dell'Università di Catania, 1960. Pp. 110, in-8°, con tavv. (Università degli Studi di Catania. Facoltà di Economia e Commercio. Istituto di Geografia).

— *Dei movimenti sismici e delle « timpe » sul versante orientale dell'Etna.* Catania, s. t., 1960, Pp. 16, in-8° (Università degli Studi di Catania. Facoltà di Economia e Commercio. Istituto di Geografia).

VINOKUROV E. F. — *Raščety osnovanij i fundamentov.* Minsk, Izdatel' stvo Akademii Nauk Belorusskoj SSR, 1960. Pp. 295, in-8°, con figg.

VITTORIA Vincenzo. — *Il solaio a fungo e la trave con momento d'inerzia infinito agli estremi.* Estr. da « Giornale del Genio Civile », 1959, fasc. 12.

Vodnoénergetičeskij kadastr Belorusskoj SSR. Potencial'nye godroénergoresursy. T. I. Pod redakciej prof. T. L. Zolotareva. Minsk, Izdatel'stvo Akademii Nauk BSSR, 1960. Pp. 282, in-8°, con figg. e 1 vol. di tavv.

VOLTERRA Enrico. — Vedi: VOLTERRA Vito e VOLTERRA Enrico.

VOLTERRA Vito. — *Opere matematiche. Memorie e Note.* Vol. IV: *1914-1925.* Roma, Accademia Nazionale dei Lincei, 1960. Pp. 540, in-8°, con figg.

VOLTERRA Vito e VOLTERRA Enrico. — *Sur les distorsions des corps élastiques (théorie et applications).* Paris, Gauthier-Villars Éditeur – Imprimeur – Libraire, 1960. Pp. 119, in-8° (Mémorial des Sciences Mathématiques, fasc. CXLVII).

VRĂNCEANU Gheorghe. — *Lecții de geometrie diferențială.* Vol. III: *Proprietăți globale*

ale grupurilor lie. Teoria corespondențelor. Spații omogene. Tensori armonici. Grupuri de olonomie. București, Editura Academiei Republicii Populare Romîne, 1960. Pp. 453, in–8°.

WARD A. G. — *Science and art in leather manufacture.* An inaugural lecture. Leeds, Leeds University Press, 1960. Pp. 20, in–8°, con tavv.

WEGENER N. — *Elemente de proiectare acustică in construcții.* București, Editura Academiei Republicii Populare Romîne, 1960. Pp. 175, in–8°, con figg. e tavv. (Acustică in Construcții).

A. SIGNORINI e G. COTRONEI.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 10 dicembre 1960

Presiede il Socio anziano GINO CASSINIS

NOTE DI SOCI

Matematica. — *Intorno al numero degli zeri di un polinomio nel campo reale* (*). Nota III (**) del Socio BENIAMINO SEGRE.

Il cor. 3 (Nota I, § 3) offre una nitida condizione necessaria e sufficiente affinché tutte le radici di un polinomio $f(x)$ risultino reali; questa è però valida nell'ipotesi che certe funzioni D_k dei coefficienti – fra cui il discriminante D di $f(x)$ – siano diverse da zero, ed importa la determinazione del segno di esse, ciò che in pratica esige sovente calcoli laboriosi.

Un criterio concettualmente più semplice – anche se conduce a conclusioni che presentano maggiori complicazioni formali – ed altresì più generale, in quanto valido sotto la sola ipotesi che sia $D \neq 0$, verrà qui ottenuto nel § 9 quale conseguenza di proprietà geometriche – in sè non prive di interesse e forse in parte note – le quali verranno esposte nel § 8. Daremo infine (§ 10) alcuni esempi, che ci permetteranno di verificare e raffrontare i due criteri in casi particolari.

(*) Presentata nella seduta del 10 dicembre 1960.

(**) Continuazione delle Note I e II, apparse alle pp. 155–161 e 225–231 del vol. 29 (serie VIII) di questi « Rendiconti »; di esse vengono qui proseguite le numerazioni dei paragrafi, delle proposizioni e delle formule.

8. – Proprietà topologiche dei gruppi di punti di una retta e dei relativi gruppi polari.

Una retta proiettiva reale, r (topologicamente equivalente ad una circonferenza), viene spezzata in n segmenti da un qualunque gruppo G di $n \geq 2$ suoi punti distinti (e reali), ciascuno di quelli avendo per estremi due consecutivi di questi. Preso un qualsiasi punto P (reale) di r, e detto G' il gruppo 1° polare di P rispetto a G, ci proponiamo anzitutto di stabilire il

Lemma 2. – *Il gruppo* G' *consta in ogni caso di* $n-1$ *punti reali e distinti. Più precisamente, se* P *non appartiene a* G, *gli* $n-1$ *punti di* G' *si distribuiscono uno entro ciascuno degli* $n-1$ *segmenti determinati da* G *su* r *e non contenenti* P; *mentre invece, se* P *appartiene a* G, *il gruppo* G' *consta di* P *e di* $n-2$ *punti distribuiti uno entro ciascuno degli* $n-2$ *segmenti determinati da* G *su* r *e non aventi un estremo in* P.

Nel primo caso infatti, introdotta su r una coordinata proiettiva non omogena, x, assumente il valore $x = \infty$ in P, il gruppo G avrà un'equazione della forma $f(x) = 0$, dove $f(x)$ denoti un polinomio di grado n, a coefficienti reali, avente n zeri reali e distinti. Poiché G' viene ad avere l'equazione $f'(x) = 0$, il lemma segue attualmente senz'altro dal teorema di Rolle. Il secondo caso si riconduce poi subito al primo, dopo avere osservato che – se $G = P + G_1$ – risulta $G' = P + G'_1$, essendo G'_1 il gruppo 1° polare di P rispetto a G_1.

L'hessiano H di G non è altro notoriamente che il jacobiano della g^1_{n-1} costituita dai gruppi G' primi polari di G; pertanto, il G' contenente un eventuale punto Q reale di H riuscirebbe reale (e quindi gruppo polare di un punto P reale di r) e verrebbe ad avere un punto multiplo in Q, il che – in virtù del lemma 2 – non può essere nell'ipotesi che G consti di punti tutti reali e distinti. Ne discende il

Corollario 4. – *L'hessiano di un gruppo di punti reali e distinti di una retta risulta privo di punti reali.*

L'inversa di questa proprietà non è vera, come seguirà ad esempio dal terzo capoverso del § 10.

Denotiamo ora con G un qualunque gruppo reale di $n \geq 2$ punti distinti (ma non necessariamente reali) di r, n_r dei quali siano reali, e con G' il gruppo 1° polare di un punto P reale di r rispetto a G. È chiaro che anche G' risulterà reale, e consterà di $n-1$ punti, n'_r dei quali siano reali. Si ha manifestamente

$$0 \leq n_r \leq n \quad , \quad n_r \equiv n \pmod 2,$$
$$0 \leq n'_r \leq n-1 \quad , \quad n'_r \equiv n-1 \pmod 2;$$

inoltre, un'argomentazione consimile a quella impiegata nello stabilire il lemma 4 mostra che è

$$n'_r \geq n_r - 1 . \tag{47}$$

La corrispondenza algebrica, T, associante a ciascun punto P di r i singoli punti P′ del relativo G′ è ovviamente reale; essa – nel campo complesso – ha gli indici $(1, n-1)$, ammette quali punti uniti (semplici) i punti di G, e risulta localmente invertibile nell'intorno di ogni coppia (P, P') il cui P′ non appartenga all'hessiano H di G; si noti inoltre che H e G non hanno alcun punto a comune, in forza dell'ipotesi che G consti di n punti distinti. Proveremo ora il

LEMMA 3. – *Nell'intorno di un qualunque punto* O *reale di* G (*unito per* T), *la corrispondenza* T *suddetta risulta discorde.*

Introduciamo su r una coordinata proiettiva non omogenea, x, nulla in O. Allora il gruppo G potrà venire rappresentato coll'equazione $f(x) = 0$, ove

$$f(x) = x + ax^2 + \cdots$$

denota un polinomio di grado n, a coefficienti reali, di cui abbiamo scritto esplicitamente soltanto i termini di grado più basso. Il gruppo G′, polare rispetto a G di un punto $P(\varepsilon)$ dell'intorno di O, ha l'equazione

$$0 = \varepsilon f'(x) + [nf(x) - xf'(x)] = \varepsilon [1 + 2ax + \cdots] + [(n-1)x + \cdots];$$

esso contiene uno ed un sol punto P′ nell'intorno di O, la coordinata x' del quale è data dalla radice x di quest'equazione prossima allo zero, e si esprime quindi mediante una serie di potenze nella ε (convergente per $|\varepsilon|$ abbastanza piccolo) della quale ci basterà considerare il primo termine:

$$x' = -\varepsilon/(n-1) + \cdots.$$

Poiché il coefficiente di tale termine risulta negativo, ne consegue l'asserto.

Conservando le precedenti ipotesi e notazioni, osserviamo che, se supponiamo l'hessiano H di G privo di punti reali, quando P percorre la retta r – muovendosi su essa con continuità in un determinato verso – gli n'_r punti P′ reali di G′ variano pure con continuità su r, mantenendosi distinti e senza mai potere invertire il proprio senso di movimento. Ne discende che il numero n'_r di quei punti rimane fisso, ond'è certamente

$$n'_r \geq 1,$$

e ch'essi vengono a muoversi su r tutti nello stesso verso; quest'ultimo può concordare o meno col verso di movimento di P, il che esprimeremo dicendo rispettivamente che T è concorde o discorde in grande. Ciò premesso, dimostriamo il

LEMMA 4. – *Se l'hessiano* H *di* G *è privo di punti reali, e se* $n'_r \geq 2$, *allora* T *risulta discorde in grande, onde nella* (47) *viene necessariamente a valere il segno di uguaglianza.*

Il gruppo G' polare rispetto a G di un punto P genericamente fissato su r non contiene P e comprende n'_r punti reali, i quali spezzano r in n'_r segmenti, uno determinato dei quali ammette P quale punto interno. Siano $P'_1, P'_2, \cdots, P'_{n'_r}$ tali punti succedentisi in uno dei due versi di r, per modo che P cada entro il segmento $P'_{n'_r} P'_1$; quando il punto P' di r, muovendosi in quel verso, descrive il segmento $P'_1 P'_2$, il corrispondente punto P percorre tutta la retta r (nel medesimo verso o nell'opposto, secondoché T è concorde o discorde) e viene quindi a coincidere con P' almeno una volta. Una siffatta coincidenza ha luogo in un punto O (reale) di G; poiché, in base al lemma 3, la corrispondenza T risulta discorde nell'intorno di O, essa è quindi pure tale in grande. Ma ciò implica che T abbia esattamente $n'_r + 1$ coincidenze, e precisamente una entro ciascuno degli $n'_r - 1$ segmenti $P'_1 P'_2, P'_2 P'_3, \cdots, P'_{n'_r - 1} P'_{n'_r}$ e due entro $P'_{n'_r} P'_1$, onde risulta appunto $n_r = n'_r + 1$.

9. – Sulle condizioni affinché un polinomio ammetta unicamente radici reali.

Poggiando sul § 8, stabiliremo agevolmente il

Teorema 2. – *Affinché un gruppo* G *reale d'ordine* $n \geq 3$ *di punti distinti di una retta r non comprenda che punti reali, occorre e basta che – fissato un qualunque intero i soddisfacente alle* $1 \leq i \leq n-2$ *– ogni gruppo polare (semplice o misto) di i punti reali di r rispetto a* G *consti di* $n - i$ *punti reali e distinti.*

Si prova subito la necessità della suddetta condizione, usufruendo i volte del lemma 2.

In quanto alla sufficienza, basterà dimostrarla per $i = 1$, in quanto essa ne seguirà tosto per induzione applicando convenientemente i volte il risultato parziale relativo al caso $i = 1$.

Al fine suddetto, ammettiamo dunque di sapere che ogni gruppo 1° polare di G consti di $n - 1$ punti reali e distinti. Con le precedenti notazioni, ciò implica che l'hessiano H di G risulti privo di punti reali, e che si abbia $n'_r = n - 1 \geq 2$. Possiamo quindi applicare il lemma 4, e dedurne che è

$$n_r = n'_r + 1 = n;$$

sicché G comprende n punti reali, eppertanto non può di fatto contenerne altri.

Il criterio accennato al principio della presente Nota III si ottiene ora subito, applicando il teorema 2 nel caso particolare $i = n-2$, e viene espresso dal

Teorema 3. – *La forma binaria a coefficienti reali*

$$f(x_1, x_2) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a_i x_1^i x_2^{n-i}, \tag{48}$$

di grado $n \geq 3$, *abbia discriminante non nullo. Introdotte* $n-2$ *coppie di variabili* (y_{1s}, y_{2s}) $(s = 1, 2, \cdots, n-2)$, *pongasi per abbreviare*

$$(49)\qquad \begin{cases} A = \sum_{k=0}^{n-2} \sum_{(s)_k} y_{1s_1} y_{1s_2} \cdots y_{1s_k} y_{2s_{k+1}} \cdots y_{2s_{n-2}} a_{k+2} \\ B = \sum_{k=0}^{n-2} \sum_{(s)_k} y_{1s_1} y_{1s_2} \cdots y_{1s_k} y_{2s_{k+1}} \cdots y_{2s_{n-2}} a_{k+1} \\ C = \sum_{k=0}^{n-2} \sum_{(s)_k} y_{1s_1} y_{1s_2} \cdots y_{1s_k} y_{2s_{k+1}} \cdots y_{2s_{n-2}} a_k, \end{cases}$$

le $\sum_{(s)_k}$ *essendo qui estese alle* $\binom{n-2}{k}$ *partizioni degli interi* $1, 2, \cdots, n-2$ *in coppie di combinazioni complementari* $(s_1, s_2, \cdots, s_k)$ *ed* $(s_{k+1}, \cdots, s_{n-2})$. *Allora, condizione necessaria e sufficiente affinché* $f(x_1, x_2)$ *ammetta n distinte radici* $x_1 : x_2$ *reali, è che la forma quadratica in ciascuna delle* $n-2$ *coppie* (y_{1s}, y_{2s}):

$$(50)\qquad \varphi(a \mid y) = B^2 - AC$$

risulti definita positiva.

Basta infatti osservare che, interpretate le (x_1, x_2) quali coordinate omogenee di punto su di una retta r, la $f(x_1, x_2) = 0$ rappresenta ivi un gruppo G reale di n punti distinti. Presi comunque $n-2$ punti reali (y_{1s}, y_{2s}) di r $(s = 1, 2, \cdots, n-2)$, e avuto riguardo alle (48), (49), il gruppo polare di tali punti rispetto a G è dato da:

$$\prod_{s=1}^{n-2} \left(y_{1s} \frac{\partial}{\partial x_1} + y_{2s} \frac{\partial}{\partial x_2} \right) f(x_1, x_2) = \frac{n!}{2} (Ax_1^2 + 2Bx_1 x_2 + Cx_2^2) = 0;$$

ond'esso consta di due punti reali e distinti se, e soltanto se, l'espressione (50) è positiva.

Va rilevato che, in base alle (49), la (50) risulta una forma quadratica nelle a; sicché la

$$(51)\qquad \varphi(a \mid y) > 0,$$

ove si fissino comunque i rapporti $y_{1s} : y_{2s}$, fornisce delle *disuguaglianze quadratiche nelle a* quali condizioni necessarie per la realtà delle n radici della (48). Così, ad esempio, assumendo

$$y_{2s_1} = y_{2s_2} = \cdots = y_{2s_k} = y_{1s_{k+1}} = \cdots = y_{1s_{n-2}} = 0$$

(e le altre y arbitrarie, purché non nulle), si ottiene in tal guisa la condizione

$$a_{k+1}^2 - a_k a_{k+2} > 0;$$

per $k = n-2$ (ed $x_1 = x$, $x_2 = 1$) questa si riduce alla $D_1 > 0$, ove D_1 è l'espressione già analizzata nella Nota I, verso la fine del § 3.

10. – Esempi.

Per $n = 3$, la (51) diventa

$$(y_1 a_2 + y_2 a_1)^2 - (y_1 a_1 + y_2 a_0)(y_1 a_3 + y_2 a_2) > 0,$$

ed equivale quindi alle

$$a_2^2 - a_1 a_3 > 0,$$

$$4(a_1^2 - a_0 a_2)(a_2^2 - a_1 a_3) - (a_0 a_3 - a_1 a_2)^2 > 0,$$

le quali non differiscono rispettivamente dalle condizioni $D_1 > 0$, $D_2 > 0$ fornite dal corollario 3 (Nota I, § 3).

Si noti che, in forza del corollario 2 (Nota I, § 3), la seconda di queste condizioni implica la prima; il che, naturalmente, può anche venire stabilito in modo diretto.

Supponiamo ora $n = 4$, e riferiamoci per semplicità al caso particolare della forma binaria

$$f(x_1, x_2) = a x_1^4 + 6 b x_1^2 x_2^2 + c x_2^4, \tag{52}$$

sotto la condizione

$$ac(9b^2 - ac) \neq 0$$

esprimente il non annullarsi del discriminante. L'hessiano di $f(x_1, x_2)$, a meno del fattore numerico 144, vale

$$h(x_1, x_2) = ab x_1^2 + (ac - 3b^2) x_1^2 x_2^2 + bc x_2^2;$$

esso è quindi p r i v o d i r a d i c i r e a l i non banali se e soltanto se, essendo $abc \neq 0$, risulta

$$(ac - 3b^2)^2 - 4ab^2c = (b^2 - ac)(9b^2 - ac) < 0,$$

oppure se in $h(x_1, x_2)$ non compaiono due coefficienti di segni opposti: condizioni queste che, d'accordo col corollario 4 (§ 8), vengono o l'una o l'altra manifestamente a valere se $f(x_1, x_2)$ possiede quattro radici reali.

È subito visto che, nella suddetta ipotesi per $h(x_1, x_2)$, la $f(x_1, x_2)$ può ammettere o 0 o 4 (ma non 2) radici $x_1 : x_2$ reali, entrambe le alternative potendo aver luogo; e che, in conformità col lemma 4 (§ 8), la prima di queste due possibilità rimane esclusa qualora si supponga che uno (e quindi ciascuno) dei gruppi primi polari di f consti di tre punti reali.

Controlliamo ora il teorema 3 (§ 9) relativamente alla (52). Per essa, in base alle (49), (50), risulta:

$$\varphi(a \mid y) = b^2(y_{11} y_{22} + y_{21} y_{12})^2 - (a y_{11} y_{12} + b y_{21} y_{22})(b y_{11} y_{12} + c y_{21} y_{22}) =$$

$$= [b^2 y_{21}^2 - ab y_{11}^2] y_{12}^2 + [(b^2 - ac) y_{11} y_{21}] y_{12} y_{22} + [b^2 y_{11}^2 - bc y_{21}^2] y_{22}^2.$$

Dunque, affinché sussista la (51) comunque si scelgano sia le y_{12}, y_{22} che le y_{11}, y_{21} reali e non entrambe nulle, occorre e basta che si abbia

$$b \neq 0 \quad , \quad ab < 0 \quad , \quad bc < 0$$

(e quindi $ac > 0$), ed inoltre che, per ogni scelta delle y_{11}, y_{21} reali e non entrambe nulle, risulti

$$4\,[b^2 y_{21}^2 - aby_{11}^2]\,[b^2 y_{11}^2 - bcy_{21}^2] - [(b^2 - ac)\,y_{11}\,y_{21}]^2 =$$
$$= -4\,ab^3 y_{11}^4 + (3b^4 + 6\,acb^2 - a^2c^2)\,y_{11}^2\,y_{21}^2 - 4\,b^3 c y_{21}^4 > 0\,;$$

all'uopo, attualmente, occorre e basta che sia

$$3b^4 + 6\,acb^2 - a^2c^2 > 0\,,$$

oppure

$$(3b^4 + 6\,acb^2 - a^2c^2)^2 - 64\,acb^6 = (b^2 - ac)^3\,(9b^2 - ac) < 0\,.$$

Sia nell'uno che nell'altro caso deve dunque essere $9\,b^2 - ac > 0$, e la (52) viene conseguentemente ad ammettere quattro radici reali.

Notiamo da ultimo che, relativamente alla (52), i determinanti (5) – dopo aver soppresso da ciascuno dei loro elementi il fattore 4 – si riducono a quelli racchiusi entro quadrati nella tabella:

0	0	0	0	0	a
$3b$	0	0	0	a	0
0	$3b$	0	a	0	$3b$
c	0	$3b$	0	$3b$	0
0	c	0	$3b$	0	0
0	0	c	0	0	0

Pertanto, le condizioni offerte dal corallario 3 (Nota I, § 3) per la realtà di tutte le radici della (52) – date dalla positività di quei determinanti – si scrivono nella forma:

$$-3\,ab > 0 \quad , \quad -3\,ab\,(9\,b^2 - ac) > 0 \quad , \quad ac\,(9\,b^2 - ac)^2 > 0\,,$$

e permettono una verifica immediata della validità di detto corollario nel caso attuale.

Idrodinamica. — *Sopra le onde di traslazione nei canali.* – A) *La equazione linearizzata.* Nota II (*) del Corrisp. GIULIO SUPINO.

1. Nella Nota precedente si sono ottenute le soluzioni delle equazioni linearizzate della forma

$$\varphi = \frac{A}{2} e^{\lambda x} \operatorname{sen} \nu \left(t - \frac{x}{\omega} \right).$$

Ricordiamo – *en passant* – che tali soluzioni non hanno carattere generale: esse rappresentano soltanto quelle onde che si propagano con celerità costante – eguale per le portate e le altezze d'acqua – e che pertanto possono chiamarsi onde di regime (1).

In base alle soluzioni ottenute nella Nota precedente vogliamo ora assegnare alcune limitazioni ed approssimazioni per λ (coefficiente di attenuazione) e per ω (celerità).

A questo scopo osserviamo che, sostituita la (7) nella (6) si ottiene

$$\omega = \frac{-2(1-F)^2 Y_o X}{i_f (2+F) + 2F(1-F) Y_o X} U_o \tag{8}$$

sicché λ ed ω sono note una volta determinato X (2).

Scriviamo allora

$$X^2 = \frac{-9 i_f^2 - \dfrac{4 Y_o \nu^2}{g}}{8(1-F)^2 Y_o^2} + S(1+h)^{1/2} \tag{8'}$$

con

$$h = \frac{16(1-F)(4-F)(\nu i_f)^2 Y_o}{\left[9 i_f^2 + \dfrac{4 Y_o \nu^2}{g} \right]^2 g F}$$

ed osserviamo che è $h < \dfrac{(1-F)(4-F)}{9F}$ e pertanto è $h < 1$ appena $F < 0{,}3$ (3). In tale ipotesi si può sviluppare il termine tra parentesi in serie binomiale.

(*) Presentata nella seduta del 19 novembre 1960.

(1) Per la soluzione generale della equazione linearizzata si veda: G. SUPINO, *La propagazione delle onde di traslazione* ne « L'Energia Elettrica », aprile 1953.

(2) Dalla (7) si ricava che per $F < 1$ è $|X| > \dfrac{3 i_f}{2(1-F) Y_o}$ (altrimenti λ non potrebbe diventare negativa per le onde discendenti). Di qui si ricava per la (8) che nelle onde ascendenti (con $F < 1$) è $|\omega| > \dfrac{3(1-F)}{2+4F} U_o$.

(3) L'affermazione di fonda sulla diseguaglianza

$$\left(9 i_f^2 + \frac{4 Y_o \nu^2}{g} \right)^2 > 4 (9 i_f^2) \left(\frac{4 Y_o \nu^2}{g} \right).$$

La limitazione non è molto stretta e perciò nei casi concreti, quando sia $F < 0{,}3$ converrà controllare direttamente se sia $h < 1$.

2. Consideriamo dapprima il caso di $F < 1$ (correnti lente). Risulta allora

$$X^2 < \frac{9 i_f^2 - \frac{4 Y_0 \nu^2}{g}}{8 (1-F)^2 Y_0^2} + S\left(1 + \frac{h}{2}\right) \tag{9}$$

ed insieme

$$X^2 > \frac{9 i_f^2 - \frac{4 Y_0 \nu^2}{g}}{8 (1-F)^2 Y_0^2} + S\left(1 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{8}\right). \tag{10}$$

Dalla (9) si ricava, tenendo conto del valore di S e ponendo

$$k = \frac{4 (1-F)(4-F) Y_0 \nu^2}{9\left(9 i_f^2 + \frac{4 Y_0 \nu^2}{g}\right) g F},$$

$$X^2 < \frac{9 i_f^2}{4 (1-F)^2 Y_0^2} (1 + k)$$

e poiché per $0{,}3 < F$ è certamente anche $k < 1$ [4] così segue

$$|X| < \frac{3 i_f}{2 (1-F) Y_0}\left(1 + \frac{k}{2}\right).$$

Volendo anche una limitazione superiore utilizzeremo la (10). Posto

$$l = \frac{8 (1-F)^2 (4-F)^2 Y_0^2}{9\left[9 + \frac{4 Y_0}{g}\left(\frac{\nu}{i_f}\right)^2\right]^3 g^2 F^2}\left(\frac{\nu}{i_f}\right)^4$$

segue

$$|X| > \frac{3 i_f}{2 (1-F) Y_0}\left(1 + \frac{k}{2} - l\right).$$

Dalle limitazioni per X si ricava subito:

1° Per l'attenuazione dell'onda:

a) onde ascendenti (X positivo)

$$\frac{3 i_f}{(1-F) Y_0}\left(1 + \frac{k}{4} - \frac{l}{2}\right) < \lambda < \frac{3 i_f}{(1-F) Y_0}\left(1 + \frac{k}{4}\right);$$

b) onde discendenti (X negativo) [5]

$$\frac{3 i_f k}{4 (1-F) Y_0}\left(1 - \frac{2 l}{k}\right) < |\lambda| < \frac{3 i_f k}{4 (1-F) Y_0}.$$

(4) La verifica diretta è immediata. Si aggiunga che è

$$\frac{k}{h} = \frac{1}{4} + \frac{1}{9}\frac{Y_0 \nu^2}{g i_f^2}.$$

(5) Si osservi che è

$$\frac{2 l}{k} = \frac{4 (1-F)(4-F) Y_0}{\left[9 + \frac{4 Y_0 \nu^2}{9 i_f^2}\right]^2 g F}\left(\frac{\nu}{i_f}\right)^2 < \frac{(1-F)(4-F)}{36 F}.$$

2° Per la velocità di propagazione si ricava, relativamente alle onde ascendenti (X positivo)

$$\frac{3(1-F)\left(1+\frac{k}{2}-l\right)}{2(1+2F)+\frac{3Fk}{2}}U_0 < |\omega| < \frac{3(1-F)\left(1+\frac{k}{2}\right)}{2(1+2F)+3F\left(\frac{k}{2}-l\right)}U_0.$$

Per le onde discendenti (X negativo) valgono invece le limitazioni seguenti

$$\frac{3(1-F)\left(1+\frac{k}{2}-l\right)}{2(1-F)-\frac{3Fk}{2}}U_0 < \omega < \frac{3(1-F)\left(1+\frac{k}{2}\right)}{2(1-F)-3F\left(\frac{k}{2}-l\right)}U_0.$$

Si noti che la velocità di propagazione risulta molto differente in confronto a quella ricavata dalla teoria delle caratteristiche. Supposto per esempio che sia $i_f = 0{,}0006$ (pendenza del Po presso la foce), $Y_0 = 4\ m$, $F = 0{,}15$ [6], consideriamo la propagazione di un'onda di marea all'interno del corso d'acqua. È allora $T = 44715''$ e perciò $\nu = 2\pi/T = 0{,}00014$. Segue $h = 0{,}023$, $k = 0{,}043$, $l = 0{,}00027$ e quindi $1{,}0147\ U_0 < |\omega| < 1{,}0156\ U_0$.

Con la teoria delle caratteristiche si sarebbe ottenuto $\omega = U_0(1 - 1/\sqrt{F}) = -1{,}58\ U_0$. Quanto a λ sarebbe $0{,}000535 < \lambda < 0{,}000536$ e poiché è $e^{-\lambda x} = 1/2$ per $\lambda x = 0{,}69315$ così occorrerebbero circa 1300 m perché l'onda riduca a metà la sua ampiezza (e occorrerebbero 4300 m per ridurla ad 1/10).

Per le onde discendenti con la teoria delle caratteristiche si ricaverebbe $\omega = 3{,}58\ U_0$ mentre qui si avrebbe $1{,}581\ U_0 < \omega < 1{,}583\ U_0$. Per λ seguirebbe $-0{,}00000583 < \lambda < -0{,}00000567$ sicché occorrerebbero circa 120000 metri per ridurre l'ampiezza dell'onda alla metà.

Se il periodo dell'onda fosse soltanto 1 ora sarebbe $v = 0{,}00174$ e quindi si ricaverebbe $h = 2{,}327$. Essendo $h > 1$ occorre proseguire direttamente i calcoli. Si trova $(1+h)^{1/2} = 1{,}822$ e quindi dalla (8′):

$$X^2 = \frac{9\,i_f^2}{4(1-F)^2\,Y_0^2}\,2{,}273 \quad , \quad X = \frac{2{,}265\,i_f}{(1-F)\,Y_0}.$$

A questo punto, utilizzando la (8) e la (7) si ottiene:

per le onde ascendenti $\omega = -1{,}36\ U_0$ $\lambda = 0{,}00065$;

per le onde discendenti $\omega = 2{,}62\ U_0$ $\lambda = -0{,}00013$.

La teoria delle caratteristiche darebbe per ω gli stessi valori prima determinati e cioè $-1{,}58\ U_0$ e $+3{,}58\ U_0$.

3. – Consideriamo ora il caso di $F > 1$, caso che limitiamo ad $F < 4$ perché l'esame delle onde che tendono ad esaltarsi richiederebbe ulteriori precisazioni che rimandiamo alla trattazione non lineare.

(6) Si ricordi che sussiste la relazione $F = i_f/i_c$ con i_c pendenza critica e mediamente uguale al 4 ‰.

Per $1 < F < 4$ risulta $h < 0$ e se è $|h| < 1$ si può utilizzare ancora la (9) (in quanto la serie binomiale contiene tutti termini negativi e qui ci si ferma al 2° termine), ma la (10) non è più valida; al suo posto conviene scrivere (per $|h| < 1$):

$$(10') \qquad X^2 < \frac{9 i_f^2 - \frac{4 Y_0 \nu^2}{g}}{8 (1-F)^2 Y_0^2} + S\left(1 - \frac{|h|}{2} - \frac{1}{8}\frac{h^2}{1-|h|}\right).$$

Questa formula si ottiene sostituendo ai termini della serie binomiale successivi al 2° la serie $+ h^2/8\ (1 + |h| + h^2 + \cdots)$ maggiorante (in valore assoluto) alla serie binomiale.

Dalla (9) si ricava $|X| < \frac{3 i_f}{2 (F-1) Y_0}\left(1 + \frac{k}{2}\right)$ (si osservi che anche k è negativo); mentre dalla (10') si ottiene $|X| < \frac{3 i_f}{2 (F-1) Y_0}\left(1 + \frac{k}{2} - l'\right)$ essendo

$$l' = \frac{8 (F-1)^2 (4-F)^2 (\nu/i_f)^4 Y_0}{9\left[9 + \frac{4 Y_0 \nu^2}{g i_f^2}\right]^3 g^2 F^2 - \left[9 + \frac{4 Y_0 \nu^2}{g i_f^2}\right](F-1)(4-F)\left(\frac{\nu}{i_f}\right)^2 Y_0}.$$

Da queste limitazioni si ricava subito:

1° per l'attenuazione dell'onda

$$\frac{-3 i_f (k - 2 l')}{4 (F-1) Y_0} < \lambda < \frac{-3 i_f |k|}{4 (F-1) Y_0} \qquad \text{(X positivo)}$$

$$\frac{-3 i_f}{(F-1) Y_0}\left(1 + \frac{|k|}{4} + \frac{l'}{2}\right) < \lambda < \frac{-3 i_f}{(F-1) Y_0}\left(1 + \frac{|k|}{4}\right) \qquad \text{(X negativo)}.$$

Tutti e due i tipi di onde si propagano verso valle.

2° per la velocità di propagazione

$$a) \qquad \frac{3 (F-1)\left(1 + \frac{k}{2} - l'\right)}{2 (F-1) + \frac{3 F k}{2}} U_0 < \omega < \frac{3 (F-1)\left(1 + \frac{k}{2}\right)}{2 (F-1) + 3 F\left(\frac{k}{2} - l'\right)} U_0 \qquad \text{(X positivo)}$$

$$b) \qquad \frac{3 (F-1)\left(1 + \frac{k}{2} - l'\right)}{2 (1 + 2F) + \frac{3 F k}{2}} U_0 < \omega < \frac{3 (F-1)\left(1 + \frac{k}{2}\right)}{2 (1 + 2F) + 3 F\left(\frac{k}{2} - l'\right)} U_0 \text{ (X negativo)}.$$

Per esempio se $Y_0 = 1\ m$, $F = 2$, $\nu = 1/4\ i_f$ si ottiene per ω nel caso a) (con $k/2 = 0{,}0014$ e l' trascurabile) $\omega = 1{,}504\ U_0$; nel caso b) $\omega = 0{,}300\ U_0$.

Con la teoria delle caratteristiche si ricaverebbe $\omega = U_0 (1 \pm 1/\sqrt{F}) = (1 \pm 0{,}707)$ e pertanto $\omega = 1{,}707\ U_0$ oppure $\omega = 0{,}293\ U_0$.

5. Riprendiamo infine le (5) per mettere in evidenza alcune situazioni limite. Se $\nu \to 0$ (onde di periodo molto lungo) si ricava dalla prima delle (5): $(1 - F)\lambda^2 - \frac{3 i_f}{Y_0}\lambda = 0$. Pertanto si hanno due valori di λ: $\lambda = 0$ e

$\lambda = \frac{3\,i_f}{(1-F)\,Y_0}$. In corrispondenza di questi valori si ricava dalla seconda delle (5): *a*) per $\lambda = 0$, $\omega = \frac{3}{2}U_0$; *b*) per $\lambda = \frac{3\,i_f}{(1-F)\,Y_0}$, $\omega = -\frac{3\,(1-F)}{2+4\,F}U_0$.

Se invece consideriamo $\nu \to \infty$ (periodo piccolissimo) allora dividendo la prima delle (5) per ν^2 si ottiene $\omega = U_0 \pm \sqrt{g\,Y_0}$ e dalla seconda delle (5) si ricavano i corrispondenti valori di λ. I casi effettivi con periodo limitato sono compresi tra i due ora ricavati.

Si osservi peraltro che mentre non vi è alcuna difficoltà a considerare $\nu \to 0$ (onde estremamente lunghe) invece al limite $\nu \to \infty$ (cioè $T \to 0$) non ci si può avvicinare troppo perché la equazione idraulica non vale più se è $A/L > \varepsilon$ (ved. Nota I). Pertanto essendo $T = L/\omega$ per far tendere T a zero occorre che anche L tenda a zero e quindi A si mantenga $< \varepsilon L$. Il risultato ottenuto nel caso di $\nu \to \infty$ varrebbe quindi per onde di ampiezza $\to 0$. Ciò mostra che ci si può avvicinare alla celerità data dalla teoria delle caratteristiche, ma raggiungendo tale celerità *con onde periodiche* la equazione di partenza perde il suo significato fisico perché non sono più soddisfatte le ipotesi poste a base di essa.

Magnetofluidodinamica. — *Sulla stabilità dei moti magnetofluidodinamici stazionari.* Nota I (*) del Corrisp. CATALDO AGOSTINELLI.

1. Il problema della stabilità in magnetofluidodinamica, che inizialmente attirò l'attenzione dei fisici nucleari in relazione alla questione del contenimento del plasma ad alta temperatura negli apparecchi termonucleari, successivamente, per la sua importanza anche nelle applicazioni alla dinamica cosmica e a quella stellare, è stato oggetto di numerose ricerche da parte di Chandraseckhar (1) e dei suoi allievi, che hanno studiato la stabilità di vari casi di equilibrio. Più recentemente, in una Memoria scritta in collaborazione da J. B. Bernstein, E. A. Friman, M. D. Kruskal ed R. M. Kulsrud (2), è stata effettuata una indagine molto estesa della *stabilità statica* di un plasma altamente conduttore e completamente ionizzato, applicando il *principio di energia* secondo l'idea originaria di Lord Rayleigh (3), principio che era già stato utilizzato da Lundquist (4). Ma l'applicazione di questo principio al caso più interessante della stabilità di un generico moto magnetofluidodinamico stazionario si presenta più completa e difficile.

Questa questione viene qui studiata considerando un fluido barotropico di alta conduttività elettrica il quale si muove in un campo limitato da una parete rigida perfettamente conduttrice. Supposto di conoscere un moto permanente del fluido, soddisfacente alle dovute condizioni in superficie, considero quindi un moto perturbato, assumendo come incognita lo spostamento ξ che riceve una particella fluida rispetto alla simultanea posizione che occuperebbe se il moto non fosse perturbato, spostamento che deve soddisfare alla condizione di essere tangente in superficie.

Considerando d'altra parte il movimento generale dal punto di vista lagrangiano, determino la densità e la pressione in funzione delle analoghe quantità che si hanno nel moto permanente e dello spostamento ξ, qualunque sia la grandezza di questo spostamento. Stabilisco quindi un'equazione differenziale per il campo magnetico analoga all'equazione di Helmholtz per i vortici. L'integrale di detta equazione, che è conforme all'equazione di Cau-

(*) Presentata nella seduta del 10 dicembre 1960.

(1) S. CHANDRASEKHAR, *On the inhibition of convection by a magnetic fluid*, « Phil. Mag. » [7], *43*, 501–32 (1952); IDEM, *The stability of viscous flow between rotating cylinders in the presence of a magnetic field*, « Proc. Roy. Soc. », A *216*, 293–309 (1953); IDEM, *The instability of a layer of fluid heated below and subject to Coriolis forces*, « Proc. Roy. Soc. », A *257*, 306–27 (1953); IDEM, *The gravitational instability of an infinite homogeneous medium when Coriolis force is acting and a magnetic field is present*, « Astrophys. J. », *119*, 7–9 (1954).

(2) J. B. BERNSTEIN, E. A. FRIEMAN, M. D. KRUSKAL and R. M. KULSRUD, *An energy principle for hydromagnetic stability problems*, «Proc. Roy. Soc. London», A *244*, 17–40 (1958).

(3) Lord RAYLEIGH, *The theory of sound*, 1877.

(4) S. LUNDQUIST, *On the stability of magneto-hydrostatic fields*, « Phys. Rev. » [2], *83*, 307–311 (1951).

chy dell'idrodinamica, fornisce l'intensità del campo magnetico in funzione dei dati iniziali e quindi in funzione del corrispondente campo magnetico che si ha nel moto permanente e dello spostamento ξ.

Supponendo poi che lo spostamento ξ sia infinitesimo e tale da poter trascurare i termini di ordine superiore al primo rispetto ad esso e sue derivate, deduco l'equazione differenziale delle piccole oscillazioni e quindi un'equazione di secondo grado completa nella pulsazione Ω. Osservando che l'esistenza di uno spostamento che rende immaginaria la frequenza di oscillazione, o la pulsazione, dà luogo ad instabilità, stabilisco una disuguaglianza che consente di ricavare un limite di instabilità per quelle oscillazioni. Quella disuguaglianza esprime una generalizzazione del principio di energia che si ha nel caso statico, al quale si riduce quando il moto permanente si annulla. Dimostro ancora come i valori estremi della pulsazione Ω appartengono all'insieme degli autovalori di essa. Se perciò Ω ammette un massimo o un minimo, ciascuno di questi valori può servire per stabilire un limite di instabilità per le frequenze di oscillazione.

Considero infine il caso dei moti rotatori uniformi intorno ad un asse, che hanno particolare importanza nella dinamica stellare, nel qual caso, come ho mostrato in precedenti lavori [5], dovrà sussistere la simmetria assiale. In questo caso la relazione di instabilità qui stabilita consente di studiare nei vari casi l'influenza delle azioni centrifughe.

2. Con riferimento ad un fluido di alta conduttività elettrica, come un plasma completamente ionizzato, costituito di elettroni e di ioni positivi, le equazioni che ne reggono il movimento, scritte nelle unità gaussiane razionalizzate, col ben noto significato dei simboli, sono:

$$\rho \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\operatorname{grad} p + \mathbf{J} \wedge \mathbf{B} - \rho \operatorname{grad} \Phi \tag{1}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho \boldsymbol{v}) = 0 \tag{2}$$

$$\mathbf{E} + \boldsymbol{v} \wedge \mathbf{B} = 0 \tag{3}$$

$$p \rho^{-\gamma} = \text{cost.} \tag{4}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{5}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mathbf{J} \tag{6}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \tag{7}$$

dove Φ rappresenta l'energia potenziale esterna riferita all'unità di massa.

(5) C. Agostinelli, *Sulle equazioni dell'equilibrio adiabatico magneto-dinamico di una massa gassosa uniformemente rotante e gravitante*, « Rendiconti dell'Accad. Naz. dei Lincei », serie VIII, vol. XXVI, fasc. 5, Maggio 1959; Idem, *Sull'equilibrio adiabatico magneto-dinamico di una massa fluida gassosa gravitante, in rotazione non uniforme*, ibidem, serie VIII, vol. XXVIII, fasc. 3, Marzo 1960.

Nel caso dei moti stazionari, indicando con P la particella fluida, queste equazioni si riducono alle seguenti:

$$\rho \frac{d\boldsymbol{v}}{d\mathrm{P}} \boldsymbol{v} = -\operatorname{grad} p + \operatorname{rot} \mathbf{B} \wedge \mathbf{B} - \rho \operatorname{grad} \Phi \tag{8}$$

$$\operatorname{div} (\rho \boldsymbol{v}) = 0 \tag{9}$$

$$\rho p^{-\gamma} = \text{cost.} \tag{10}$$

$$\operatorname{rot} (\boldsymbol{v} \wedge \mathbf{B}) = 0 \tag{11}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \tag{12}$$

Supposta nota una soluzione di queste equazioni, con assegnate condizioni ai limiti, corrispondente a un dato moto magnetofluidodinamico stazionario, consideriamo un moto perturbato nell'intorno di esso e contrassegniamo con un apice gli elementi del campo e del moto in questo moto perturbato.

Essendo P_0 la posizione della particella fluida all'istante iniziale, P quella all'istante t nel moto stazionario considerato, e P′ la simultanea posizione della stessa particella nel moto perturbato, poniamo

$$\mathrm{P}' = \mathrm{P} + \xi \tag{13}$$

dove ξ è uno spostamento, funzione di P e di t, che va ritenuto infinitesimo. Si ricava allora per la velocità $\boldsymbol{v}'$ del punto P′ il valore

$$\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v} + \frac{d\xi}{dt} = \boldsymbol{v} + \frac{d\xi}{d\mathrm{P}} \boldsymbol{v} + \frac{\partial \xi}{\partial t}. \tag{14}$$

Osserviamo ora che se si considera il moto dal punto di vista lagrangiano e quindi si suppone la posizione P funzione della posizione iniziale P_0, e così pure P′ funzione di P_0, introducendo le omografie vettoriali:

$$\alpha = \frac{d\mathrm{P}}{d\mathrm{P}_0} \quad , \quad \alpha' = \frac{d\mathrm{P}'}{d\mathrm{P}_0} \quad , \quad \beta = \frac{d\mathrm{P}'}{d\mathrm{P}} = 1 + \frac{d\xi}{d\mathrm{P}} \tag{15}$$

si ha

$$\alpha' = \frac{d\mathrm{P}'}{d\mathrm{P}} \frac{d\mathrm{P}}{d\mathrm{P}_0} = \beta\alpha. \tag{16}$$

Essendo allora $\mathrm{I}_3 \alpha'$ l'invariante terzo dell'omografia α' (o se si vuole l'jacobiano delle coordinate x', y', z' di P′ rispetto alle coordinate x_0, y_0, z_0 di P_0), dall'equazione lagrangiana di continuità nel moto stazionario e nel moto perturbato si ha

$$\rho = \rho_0 / \mathrm{I}_3 \alpha \quad , \quad \rho' = \rho_0 / \mathrm{I}_3 \alpha'.$$

Ma $\mathrm{I}_3 \alpha' = \mathrm{I}_3 \alpha \cdot \mathrm{I}_3 \beta$, ne segue

$$\rho' = \rho / \mathrm{I}_3 \beta = \rho / \mathrm{I}_3 \left(1 + \frac{d\xi}{d\mathrm{P}}\right). \tag{17}$$

La pressione p' in virtù della (4) sarà data da

$$p' = C\rho'^{\gamma} = C\rho^{\gamma}/(I_3\beta)^{\gamma} = p/(I_3\beta)^{\gamma}, \tag{18}$$

dove C è una costante.

In quanto all'intensità $\mathbf{B}'$ del campo magnetico, dalle equazioni (3) e (5) si ha

$$\frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t} + \mathrm{rot}_{P'}(\mathbf{B} \wedge \boldsymbol{v}') = 0,$$

cioè, essendo $\mathrm{div}_{P'} \mathbf{B}' = 0$, si ha ancora

$$\frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t} + \left(\mathrm{div}_{P'} \boldsymbol{v}' - \frac{d\boldsymbol{v}'}{dP'}\right)\mathbf{B}' + \frac{d\mathbf{B}'}{dP'}\boldsymbol{v}' = 0.$$

Ma

$$\mathrm{div}_{P'} \boldsymbol{v}' = -\frac{1}{\rho'}\frac{d\rho'}{dt},$$

sostituendo nell'equazione precedente, e dividendo quindi ambo i membri per ρ', si ottiene facilmente

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{B}'}{\rho'}\right) - \frac{d\boldsymbol{v}'}{dP'}\frac{\mathbf{B}'}{\rho'} = 0 \tag{19}$$

che è analoga all'equazione di Helmholtz cui soddisfa il vettore vortice.

Ora risulta

$$\frac{d\boldsymbol{v}'}{dP'} = \frac{d\boldsymbol{v}'}{dP_0}\frac{dP_0}{dP'} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dP'}{dP_0}\right)\frac{dP_0}{dP'} = \frac{d\alpha'}{dt}\alpha'^{-1}.$$

Applicando allora a sinistra di ambo i membri della (19) l'omografia α'^{-1}, e osservando che $\alpha'^{-1}\frac{d\alpha'}{dt}\alpha'^{-1} = -\frac{d\alpha^{-1}}{dt}$, si ricava

$$\frac{d}{dt}(\alpha'^{-1}\mathbf{B}'/\rho') = 0,$$

da cui, integrando e osservando che per $t = 0$ è $\alpha' = 1$, $\mathbf{B}' = \mathbf{B}_0$, $\rho' = \rho_0$, si ha

$$\alpha'^{-1}\mathbf{B}'/\rho' = \mathbf{B}_0/\rho_0 \tag{20}$$

che è la corrispondente dell'equazione di Cauchy per il vortice.

Analogamente nel moto stazionario non perturbato dalla (11) si deduce

$$\alpha^{-1}\mathbf{B}/\rho = \mathbf{B}_0/\rho_0 .$$

Dal confronto con la (20), tenendo conto della (17), segue

$$\mathbf{B}' = \beta\mathbf{B}/I_3\beta. \tag{21}$$

Nell'ipotesi fatta in cui lo spostamento ξ sia infinitesimo, trascurando i termini di ordine superiore al primo rispetto a ξ e sue derivate, dalle equazioni (17), (18) e (21) si ottiene

$$\rho' = \rho\,(1 - \operatorname{div}\xi) \tag{22}$$

$$p' = p\,(1 - \gamma\ \operatorname{div}\xi) \tag{23}$$

$$\mathrm{B}' = \left(1 - \operatorname{div}\xi + \frac{d\xi}{d\mathrm{P}}\right)\mathbf{B} = \mathbf{B} + \frac{d\mathbf{B}}{d\mathrm{P}}\,\xi + \operatorname{rot}(\xi \wedge \mathbf{B}), \tag{24}$$

le quali esprimono la densità, la pressione e l'intensità del campo magnetico nel moto perturbato, in funzione degli analoghi elementi del dato moto stazionario, e per mezzo dello spostamento ξ.

L'energia potenziale Φ' sarà data infine da

$$\Phi' = \Phi(\mathrm{P}') = \Phi(\mathrm{P} + \xi)$$

e con la stessa approssimazione

$$\Phi' = \Phi(\mathrm{P}) + \operatorname{grad}\Phi \times \xi. \tag{25}$$

3. Per ricavare ora dalla (1) l'equazione differenziale cui deve soddisfare lo spostamento ξ nel moto perturbato occorre calcolare ancora i valori di

$$\operatorname{grad}_{\mathrm{P}'} p' \quad , \quad \mathbf{J}' \wedge \mathbf{B}' = \operatorname{rot}_{\mathrm{P}'} \mathbf{B}' \wedge \mathbf{B}' \quad , \quad \operatorname{grad}_{\mathrm{P}'} \Phi'.$$

Indicando col simbolo K la *coniugata* (o la *trasposta*), di una omografia vettoriale, si ha

$$\operatorname{grad}_{\mathrm{P}'} p' = \mathrm{K}\beta^{-1} \operatorname{grad}_{\mathrm{P}} p',$$

e ricordando la (15) e la (23), nell'approssimazione considerata si ha

$$\operatorname{grad}_{\mathrm{P}'} p' = \operatorname{grad} p - \gamma \operatorname{grad}(p \operatorname{div}\xi) - \mathrm{K}\frac{d\xi}{d\mathrm{P}} \operatorname{grad} p. \tag{26}$$

Analogamente

$$\operatorname{grad}_{\mathrm{P}'} \Phi' = \operatorname{grad}\Phi + \operatorname{grad}(\operatorname{grad}\Phi \times \xi) - \mathrm{K}\frac{d\xi}{d\mathrm{P}} \operatorname{grad}\Phi = \tag{27}$$

$$= \operatorname{grad}\Phi + \frac{d \operatorname{grad}\Phi}{d\mathrm{P}}\,\xi$$

e

$$\rho' \operatorname{grad}_{\mathrm{P}'} \Phi' = \rho\,(1 - \operatorname{div}\xi) \operatorname{grad}\Phi + \rho \frac{d \operatorname{grad}\Phi}{d\mathrm{P}}\,\xi. \tag{27'}$$

Poiché $\operatorname{rot}_{\mathrm{P}'} \mathbf{B}'$ è uguale al *doppio vettore* [6] dell'omografia $\frac{d\mathbf{B}'}{d\mathrm{P}'} = \frac{d\mathbf{B}'}{d\mathrm{P}}\beta^{-1}$, tenendo conto della (24) si ricava

$$\operatorname{rot}_{\mathrm{P}'} \mathbf{B}' = \operatorname{rot}\mathbf{B} + \operatorname{rot}\operatorname{rot}(\xi \wedge \mathbf{B}) + \operatorname{rot}\left(\frac{d\mathbf{B}}{d\mathrm{P}}\,\xi\right) - 2\,\mathrm{V}\left(\frac{d\mathbf{B}}{d\mathrm{P}}\,\frac{d\xi}{d\mathrm{P}}\right).$$

(6) Cfr. C. BURALI FORTI e R. MARCOLONGO, *Analisi Vettoriale Generale, Trasformazioni lineari*, Cap. II, § 2. (Zanichelli, Bologna 1929).

Ma risulta (loco citato in [6], p. 177 (4'); e p. 213 (31)),

$$\operatorname{rot}\left(\frac{d\mathbf{B}}{d\mathrm{P}}\,\xi\right) - 2\,\mathrm{V}\left(\frac{d\mathbf{B}}{d\mathrm{P}}\,\frac{d\xi}{d\mathrm{P}}\right) = \frac{d\,\operatorname{rot}\mathbf{B}}{d\mathrm{P}}\,\xi,$$

perciò nell'approssimazione considerata si ha

$$\operatorname{rot}_{\mathrm{P}'}\mathbf{B}'\wedge\mathbf{B}' = \operatorname{rot}\mathbf{B}\wedge\left[\mathbf{B}+\left(\frac{d\xi}{d\mathrm{P}}-\operatorname{div}\xi\right)\mathbf{B}\right]+ \tag{28}$$

$$+\left[\operatorname{rot}\operatorname{rot}(\xi\wedge\mathbf{B})+\frac{d\,\operatorname{rot}\mathbf{B}}{d\mathrm{P}}\,\xi\right]\wedge\mathbf{B}.$$

Infine si ha

$$\frac{d\boldsymbol{v}'}{dt} = \frac{d\boldsymbol{v}}{d\mathrm{P}}\,\boldsymbol{v}+\frac{d^2\xi}{dt^2}, \tag{29}$$

$$\rho'\frac{d\boldsymbol{v}'}{dt} = \rho\left(\frac{d\boldsymbol{v}}{d\mathrm{P}}\,\boldsymbol{v}+\frac{d^2\xi}{dt^2}\right)-\rho\frac{d\boldsymbol{v}}{d\mathrm{P}}\,\boldsymbol{v}\cdot\operatorname{div}\xi. \tag{29'}$$

Sostituendo nell'equazione del moto

$$\rho'\frac{d\boldsymbol{v}'}{dt} = -\operatorname{grad}_{\mathrm{P}'}p'+\operatorname{rot}_{\mathrm{P}'}\mathbf{B}'\wedge\mathbf{B}'-\rho'\operatorname{grad}_{\mathrm{P}'}\Phi' \tag{30}$$

e tenendo conto che per il moto stazionario è verificata la (8), si ottiene l'equazione

$$\rho\frac{d^2\xi}{dt^2} = \gamma\operatorname{grad}(p\operatorname{div}\xi)-\operatorname{div}\xi\cdot\operatorname{grad}p+\mathrm{K}\frac{d\xi}{d\mathrm{P}}\operatorname{grad}p+ \tag{31}$$

$$+\operatorname{rot}\mathbf{B}\wedge\frac{d\xi}{d\mathrm{P}}\,\mathbf{B}+\left[\operatorname{rot}\operatorname{rot}(\xi\wedge\mathbf{B})+\frac{d\,\operatorname{rot}\mathbf{B}}{d\mathrm{P}}\,\xi\right]\wedge\mathbf{B}-\rho\frac{d\operatorname{grad}\Phi}{d\mathrm{P}}\,\xi.$$

La (31) è dunque l'equazione alla quale deve soddisfare lo spostamento ξ nel moto perturbato.

In quanto alle condizioni ai limiti, se ci limitiamo a considerare il caso di un fluido contenuto in un recipiente con parete perfettamente conduttrice, esse sono

$$\mathbf{B}\times\boldsymbol{n} = 0 \quad , \quad \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{n} = 0, \tag{32}$$

dove $\boldsymbol{n}$ è il versore della normale alla superficie. Esse devono essere verificate anche nel moto stazionario e per il moto perturbato dovrà essere

$$\xi\times\boldsymbol{n} = 0. \tag{32'}$$

4. È utile osservare come in generale il sistema di equazioni (1)–(7), nel caso in cui l'energia potenziale Φ del campo di forze esterne (non elettromagnetiche), non dipende esplicitamente dal tempo, ammette l'integrale dell'energia.

Invero, moltiplicando scalarmente ambo i membri della (1) per il vettore velocità $\boldsymbol{v}$ e integrando sopra tutto il volume τ occupato dal fluido si ha

$$\int_\tau \rho\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\times\boldsymbol{v}\cdot d\tau+\int_\tau\operatorname{grad}p\times\boldsymbol{v}\cdot d\tau- \tag{33}$$

$$-\int_\tau\operatorname{rot}\mathbf{B}\wedge\mathbf{B}\times\boldsymbol{v}\cdot d\tau+\int_\tau\rho\operatorname{grad}\Phi\times\boldsymbol{v}\cdot d\tau = 0.$$

Ora, tenendo conto dell'equazione di continuità, risulta

$$\rho \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \times \boldsymbol{v} = \frac{1}{2} \rho \frac{d\boldsymbol{v}^2}{dt} = \frac{1}{2} \left[\frac{d}{dt} (\rho \boldsymbol{v}^2) - \frac{d\rho}{dt} \boldsymbol{v}^2 \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho \boldsymbol{v}^2) + \operatorname{div} (\rho \boldsymbol{v}^2 \cdot \boldsymbol{v}) \right].$$

Integrando, applicando il teorema della divergenza e tenendo conto della seconda delle (32), si ha

$$\int_\tau \rho \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \times \boldsymbol{v} \cdot d\tau = \frac{1}{2} \int_\tau \frac{\partial}{\partial t} (\rho \boldsymbol{v}^2) \cdot d\tau = \frac{d}{dt} \int_\tau \frac{1}{2} \rho \boldsymbol{v}^2 \cdot d\tau.$$

Analogamente, poiché $\operatorname{grad} p \times \boldsymbol{v} = \operatorname{div} (p\, \boldsymbol{v}) - p \operatorname{div} \boldsymbol{v}$, e

$$- p \operatorname{div} \boldsymbol{v} = \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{\gamma} \frac{dp}{dt} = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{\partial p}{\partial t} + \operatorname{grad} p \times \boldsymbol{v} \right)$$

si ottiene

$$\int_\tau \operatorname{grad} p \times \boldsymbol{v} \cdot d\tau = \frac{1}{\gamma} \left[\int_\tau \frac{\partial p}{\partial t} d\tau + \int_\tau \operatorname{grad} p \times \boldsymbol{v} \cdot d\tau \right],$$

da cui

$$\int_\tau \operatorname{grad} p \times \boldsymbol{v} \cdot d\tau = \frac{d}{dt} \int_\tau \frac{p}{\gamma - 1} d\tau.$$

Osserviamo inoltre che per le (3) e (5) si ha

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} \wedge \mathbf{B} \times \boldsymbol{v} = \operatorname{rot} \mathbf{B} \times (\mathbf{B} \wedge \boldsymbol{v}) - \mathbf{B} \times \left[\operatorname{rot} (\mathbf{B} \wedge \boldsymbol{v}) + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right] =$$

$$= \operatorname{div} [\mathbf{B} \wedge (\mathbf{B} \wedge \boldsymbol{v})] - \mathbf{B} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \operatorname{div} (\mathbf{B} \times \boldsymbol{v} \cdot \mathbf{B} - \mathbf{B}^2 \boldsymbol{v}) - \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{B}^2}{\partial t}$$

e quindi

$$\int_\tau \operatorname{rot} \mathbf{B} \wedge \mathbf{B} \times \boldsymbol{v} \cdot d\tau = - \frac{1}{2} \int_\tau \frac{\partial \mathbf{B}^2}{\partial t} d\tau = - \frac{d}{dt} \int_\tau \frac{1}{2} \mathbf{B}^2 d\tau.$$

Infine si ha

$$\rho \operatorname{grad} \Phi \times \boldsymbol{v} = \operatorname{div} (\Phi \rho \boldsymbol{v}) - \Phi \operatorname{div} (\rho \boldsymbol{v}) = \operatorname{div} (\Phi \rho \boldsymbol{v}) + \Phi \frac{\partial \rho}{\partial t},$$

e se la funzione Φ non contiene esplicitamente il tempo si ottiene

$$\int_\tau \rho \operatorname{grad} \Phi \times \boldsymbol{v} \cdot d\tau = \int_\tau \Phi \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau = \frac{d}{dt} \int_\tau \rho \Phi \, d\tau.$$

Sostituendo nella (33) si ottiene subito

$$\int_\tau \left(\frac{1}{2} \rho \boldsymbol{v}^2 + \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \mathbf{B}^2 + \rho \Phi \right) d\tau = \text{cost.} \tag{34}$$

che è il noto integrale dell'energia. Esso sussisterà anche nel moto perturbato considerato, sempre nell'ipotesi che l'energia potenziale Φ' non contenga esplicitamente il tempo.

Essendo $d\tau'$ l'elemento di volume del campo perturbato, in cui si è trasformato l'elemento $d\tau$ del campo stazionario, poiché dall'equazione di continuità risulta $\rho' d\tau' = \rho d\tau$, e quindi $d\tau' = I_3 \beta \cdot d\tau$, ricordando le (17), (18) e (21), il corrispondente dell'integrale (34), relativo al campo τ', si trasforma nel seguente:

$$(35) \qquad \int_{\tau} \left[\frac{1}{2} \rho \boldsymbol{v}'^2 + \frac{p}{(\gamma - 1)(I_3 \beta)^{\gamma - 1}} + \frac{1}{2 I_3 \beta} (\beta \mathbf{B})^2 + \rho \Phi' \right] d\tau = \text{cost.}$$

Geofisica. — *L'effetto della firmo-viscosità sulla risultante del movimento associato alle onde di Rayleigh.* Nota (*) del Corrisp. PIETRO CALOI.

Nel caso di propagazione di onde di Rayleigh in mezzi elastici, che ammettono attrito interno, si prova che, per onde progressive, gli spostamenti orizzontale e verticale hanno l'espressione (1)

$$(1)\qquad \begin{cases} H = \{ R \sin p\,(t + gx) - S \cos p\,(t + gx) \}\, e^{-k_0 x} \\ Z = \{ -R' \cos p\,(t + gx) + S' \sin p\,(t + gx) \}\, e^{-k_0 x}, \end{cases}$$

dove R , R′ , S , S′ sono grandezze che assumono valori diversi a seconda del periodo e dei valori di μ/μ' (μ costante di Lamé; μ' coefficiente di attrito interno equivoluminale) (2) e g è determinata in funzione delle radici dell'equazione di Rayleigh in un mezzo firmo-elastico (3), del rapporto μ/μ' e della velocità v_s delle onde trasversali piane, proprie del mezzo. k_0 è il coefficiente di assorbimento.

Posto

$$U = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}}$$

dove

$$a = \alpha + \beta p \frac{\mu'}{\mu} \quad , \quad b = \beta - \alpha p \frac{\mu'}{\mu},$$

(α e β essendo già state calcolate per assegnati valori di p (T) e μ'/μ) (4), ricordiamo che

$$g = -\frac{U}{v_s \sqrt{1 + \left(p \frac{\mu'}{\mu}\right)^2}}.$$

Pertanto, posto

$$(2)\qquad \gamma = \frac{2\pi}{T} gx,$$

essendo x la distanza;

$$(3)\qquad A = \sqrt{R^2 + S^2} \quad ; \quad B = \sqrt{R'^2 + S'^2},$$

$$(4)\qquad \operatorname{tag} \omega_1 = \frac{R \sin\gamma - S \cos\gamma}{R \cos\gamma + S \sin\gamma} \quad ; \quad \operatorname{tang} \omega_2 = \frac{R' \sin\gamma + S' \cos\gamma}{R' \cos\gamma - S' \sin\gamma},$$

le (1) possono scriversi

$$(5)\qquad \begin{cases} H = A \sin (pt + \omega_1)\, e^{-k_0 x} \\ Z = -B \cos (pt + \omega_2)\, e^{-k_0 x}. \end{cases}$$

(*) Presentata nella seduta del 10 dicembre 1960.

(1) P. CALOI, *Comportamento delle onde di Rayleigh in un mezzo firmo-elastico indefinito*, «Ann. Geofis.», I, 4 (1948).

(2) P. CALOI, *Teoria delle onde di Rayleigh in mezzi elastici e firmo-elastici*, «Archiv f. Meteor. Geophys. und Bioklimat.», Band IV, Vienna (1951), p. 433.

(3) Vedi in (2) p. 431.

(4) P. CALOI, loc. cit. in (1).

Fatto inoltre

$$(6)\qquad \begin{cases} X = He^{k_0 x} \quad ; \quad Y = -Ze^{k_0 x} \\ \omega_2 = \omega_1 + \omega\,, \\ pt + \omega_1 = \Omega\,, \end{cases}$$

eliminando Ω dalle equazioni che così si ottengono dalle (5), si ha

$$(7)\qquad \frac{X^2}{A^2} + \frac{2\,XY}{AB}\sin\omega + \frac{Y^2}{B^2} = \cos^2\omega\,.$$

Gli assi della (7) fanno rispetto ad X , Y l'angolo ϑ, definito da

$$(8)\qquad \text{tang}\, 2\vartheta = 2\,\frac{AB}{B^2 - A^2}\sin\omega\,.$$

Come già ho osservato altrove [5], fra le varie altre proprietà, anche in un mezzo firmo-elastico, le onde di tipo Rayleigh costringono le particelle raggiunte su traiettorie ellittiche; però a differenza di quanto avviene in un mezzo puramente elastico, tali traiettorie non sono riferite ai propri assi. Solo per periodi infinitamente piccoli o infinitamente grandi (per i quali $\omega \to 0$) le traiettorie ellittiche tendono a quelle riferite ai propri assi, proprie di un mezzo puramente elastico.

Mi sono proposto di calcolare l'entità dell'effetto dell'attrito interno sulla deviazione degli assi delle ellissi dagli assi di riferimento.

Mi sono limitato al caso $\mu/\mu' = 50\ \text{sec}^{-1}$, come quello che meglio si concilia con l'osservazione.

Avevo già calcolato, in lavori precedenti [1, 2] i valori di R , S , R′, S′, g. Ciò mi ha permesso di ottenere, mediante le (4) – tenuto conto della (2) – i valori di ω_1 , ω_2 , e quindi di ω, per diversi valori di T. Le (3) consentono poi la determinazione di A, B e infine, la (8), dà ϑ in funzione di ω.

La tabella riassume i risultati ottenuti

$$\frac{\mu}{\mu'} = 50\ \text{sec}^{-1}$$

T sec	A	B	ω	$\frac{2\,AB}{B^2 - A^2}\sin\omega$	ϑ
0,05	0,44062	0,52421	13°03′	1,2933	26° 9′
0,1	0,458247	0,62575	14°36′	0,796161	19°16′
0,5	0,45964	0,76249	3°12′	0,143204	4° 4′
1,0	0,45969	0,67421	1°36′	0,07115	2° 2′
5,0	0,459703	0,67477	19′	0,014061	24′

(5) P. Caloi, loc. cit. in [2], p. 434.

Dalla tabella e dalle figg. 1 e 2 risulta chiaramente che, l'effetto della firmo-elasticità sulla deviazione degli assi dell'ellisse, cui sono costrette le particelle raggiunte da onde di Rayleigh, è sensibile solo per onde associate a piccoli periodi e diminuisce rapidamente al crescere di questi.

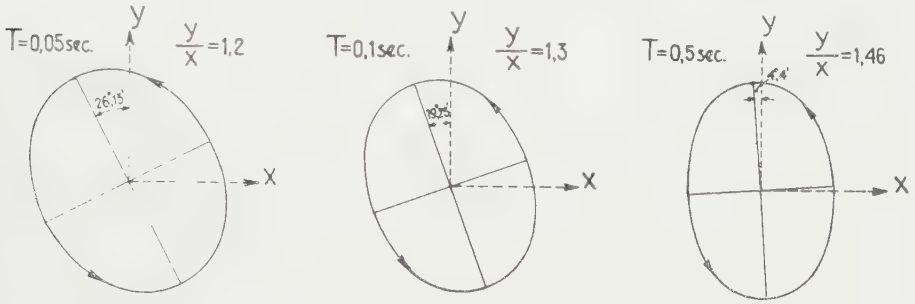


Fig. 1.

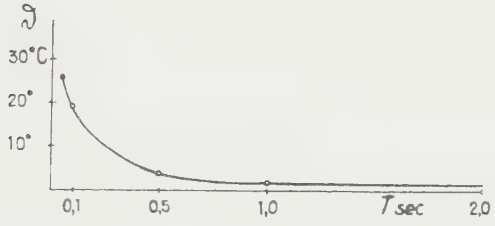


Fig. 2.

Si nota inoltre che, col tendere degli assi delle ellissi verso gli assi coordinati, cresce via via il rapporto fra le componenti verticale e orizzontale del movimento, che tende rapidamente verso il valore costante 1,47, previsto dalla classica teoria di Rayleigh.

La teoria delle onde di Rayleigh in mezzi firmo-elastici è stata da me sviluppata nell'ipotesi di un mezzo indefinito. In mezzi stratificati, l'effetto qui accennato può evidentemente assumere valori più cospicui.

Chimica inorganica. — *Monocloruri e ipocloruri idrazinici di* Rh^{III} (*). Nota V di Livio Cambi ed Ernestina Dubini Paglia, presentata (**) dal Socio L. Cambi.

Ci riferiamo alle nostre Note precedenti apparse in questi « Rendiconti » nell'anno corrente. Col termine di ipocloruri intendiamo i sali aventi rapporti alogeno rodio inferiori a 1, da noi ottenuti.

La ricerca attuale venne compiuta per definire la esistenza probabile di sali puramente idrazidici, corrispondenti agli schemi semplici od analoghi e misti:

$$\{Rh^{III}(NH \cdot NH_2)_3\} \; ; \; \{Rh_2^{III}(HN \cdot NH)_3\}.$$

In realtà, facendo agire l'esaclorosale K_3RhCl_6, su di un notevole eccesso di idrazina, a titolo dal 70 all'85 %, si ottengono soluzioni giallo oro dalle quali in generale precipitano con metanolo i monocloruri diamagnetici:

$$RhCl : nN_2H_4 : mH_2O.$$

Mediante precipitazione frazionata con metanolo, e con i più alti rapporti idrazina rodio, ottenemmo prodotti con tenori di Cl^- molto inferiori a 1 Cl^-/1 Rh, che accennano appunto a composti declorurati, ma, per lo scarso rendimento e la loro instabilità, finora non abbiamo potuto definirli esattamente. Le nostre osservazioni rendono però molto probabile il processo dello spostamento graduale del Cl^- fino alla eliminazione da parte dell'idrazina, seguendo uno schema del tipo:

$$RhCl_3 + 3\,NH_2 \cdot NH_2 \longrightarrow \{Rh^{III}(NH \cdot NH_2)_3\} + 3\,HCl$$

con formazione di cloridrato di idrazina. Abbiamo infatti isolati gli ipoalogenuri che descriviamo, che rappresentano stadi intermedi della declorurazione cui accenniamo. I sali, o miscele di sali, da noi ottenuti corrispondono ai dati riportati nella Tabella I.

Avvertiamo che questi prodotti vennero rapidamente lavati a freddo, in atmosfera inerte, ed essiccati infine nel vuoto per 12 ore, allo scopo di evitare ogni decomposizione. Sono tutti diamagnetici, presentano caratteri analoghi a quelli dei composti descritti nelle Note precedenti: con ogni probabilità derivano da Rh^{III}.

In base ai dati acquisiti non possiamo pronunciarci sulle strutture possibili. Le ricerche proseguono.

(*) Ricerca eseguita presso l'Istituto per la Laurea in Chimica Industriale dell'Università di Milano. Centro di Chimica Metallurgica.

(**) Nella seduta del 19 novembre 1960.

TABELLA I.

MONO- E IPOCLORURI IDRAZINICI DI Rh^{III}

Sali	COMPOSIZIONE ANALITICA E MOMENTO MAGNETICO						
	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*
	Rh	Cl	N	N_2H_4	Rapporto molecolare	Formule brute	$\chi_{mol} \cdot 10^6$
I_1	1	1	5	2,5	$RhCl : 2{,}5\ N_2H_4$	$RhClN_5H_8$	— 80
I_2	1	1	5,5	2,75	$RhCl : 2{,}75\ N_2H_4$	$RhClN_{5,5}H_9$	— 14
I_3	1	1	6,5	3,25	$RhCl : 3{,}25\ N_2H_4$	$RhClN_{6,5}H_{11}$	0
I_4	1	1	7	3,5	$RhCl : 3{,}5\ N_2H_4$	$RhClN_7H_{12}$	— 10
II	1	0,83	7,66	3,83	$Rh_6Cl_5 : 23\ N_2H_4$	$Rh_6Cl_5N_{46}H_{79}$	0
III	1	0,75	7,25	3,62	$Rh_4Cl_3 : 14{,}5\ N_2H_4$	$Rh_4Cl_3N_{29}H_{49}$	— 18
IV	1	0,67	5,67	2,83	$Rh_3Cl_2 : 8{,}5\ N_2H_4$	$Rh_3Cl_2N_{17}H_{27}$	127
V	1	0,33	3,67	1,83	$Rh_3Cl : 5{,}5\ N_2H_4$	$Rh_3Cl\ N_{11}H_{14}$	25

Le formule della colonna *f* sono state dedotte dalla ipotesi di Rh^{III} e dei radicali idrazinici anionoidi.

Riportiamo al n° I_1; I_2; I_3; I_4, i dati di ulteriori preparazioni del monocloruro, a completamento della serie precedente, in cui abbiamo descritto soltanto il sale sopraindicato al n° I_4 (vedi « Rend. Acc. Lincei », 8ª, XXVIII, 770 (1960).

PARTE SPERIMENTALE.

I_1) $\{RhCl(2{,}5\ N_2H_4—2\ H)\}$. – Alla soluzione al 5 % di K_3RhCl_6 venne aggiunto a freddo, sotto viva agitazione e in corrente di Argon idrato di idrazina al 75 % nel rapporto 300 N_2H_4/Rh. I clorosali che inizialmente si formano si disciolgono nell'eccesso di idrazina. Dalla soluzione limpida di colore giallo oro il metanolo precipita un sale giallo che viene lavato con metanolo al 50 %. Dopo essiccamento per 12 ore su H_2SO_4 alle analisi è risultato:

	trov. %	Rh 38,40	; Cl 13,25	; N 26,77	; H 4,79
per $\{RhClN_5H_8\} \cdot 3\ H_2O$	calc.	38,15	13,15	25,92	5,18

$$\chi_{mol} \cdot 10^6 = — 80.$$

I_2) $\{RhCl(2{,}75\ N_2H_4—2\ H)\}$. – Si è operato come per la preparazione precedente usando un rapporto 350 N_2H_4/Rh. Il sale essiccato è risultato:

	trov. %	Rh 37,30	; Cl 11,96	; N 27,46	; H 4,61
per $\{RhClN_{5,5}H_9\} \cdot 3\ H_2O$	calc.	37,06	12,70	27,70	5,38

$$\chi_{mol} \cdot 10^6 = — 14.$$

I$_3$) $\{RhCl(3{,}25\ N_2H_4—2\ H)\}$. – Alla soluzione al 5 % di K_3RhCl_6 a freddo e in corrente di argon, è stato aggiunto a gocce in due ore l'idrato di idrazina nel rapporto 350 moli N_2H_4/Rh. Dalla soluzione limpida di colore giallo il metanolo precipita un sale giallo, analogo ai precedenti. Essiccato è risultato alle analisi:

	trov. %	Rh 33,46	; Cl 12,18	; N 29,62	; H 4,25
per $\{RhClN_{6,5}H_{11}\}\cdot 3{,}5H_2O$	calc.	34,00	11,73	29,98	5,94

$$\chi_{mol}\cdot 10^6 = 0.$$

II) $\{Rh_6Cl_5(23\ N_2H_4—13\ H)\}$. – Alla soluzione al 2 % di K_3RhCl_6, a freddo, in corrente di argon è stato aggiunto molto lentamente, in due ore, idrato di idrazina al 75 % nel rapporto 400 N_2H_4/Rh.

Col metanolo si precipitano due frazioni saline: la seconda frazione separata alla centrifuga, lavata, essicata, ha dato all'analisi i risultati seguenti:

	trov. %	Rh 31,40	; Cl 9,00	; N 32,56
per $\{Rh_6Cl_5N_{46}H_{79}\}\cdot 25\ H_2O$	calc.	31,40	9,10	32,72

$$\chi_{mol}\cdot 10^6 = 0.$$

III) $\{Rh_4Cl_3(14{,}5\ N_2H_4—9\ H)\}$. – Il prodotto corrisponde alla frazione finale precipitata dal metanolo nella preparazione del sale V che segue. All'analisi è risultato:

	trov. %	Rh 33,60	; Cl 8,60	; N 32,81
per $\{Rh_4Cl_3N_{29}H_{49}\}\cdot 14\ H_2O$	calc.	33,60	8,65	33,10

$$\chi_{mol}\cdot 10^6 = -18.$$

IV) $\{Rh_3Cl_2(8{,}5\ N_2H_4—7\ H)\}$. – È la prima frazione che il metanolo precipita dalla soluzione fortemente idrazinica ottenuta nella preparazione del sale II. Il sale di colore giallo aranciato, essiccato ha dato alle analisi:

	trov. %	Rh 34,60	; Cl 7,25	; N 26,72
per $\{Rh_3Cl_2N_{17}H_{27}\}\cdot 14\ H_2O$	calc.	34,45	7,92	26,65

$$\chi_{mol}\cdot 10^6 = 127.$$

V) $\{Rh_3Cl(5{,}5\ N_2H_4—8\ H\}$. – Alla soluzione acquosa di K_3RhCl_6 molto concentrata si aggiunge idrato di idrazina al 75 % nel rapporto 500 N_2H_4/Rh. Il metanolo precipita come prima frazione un sale giallo che essiccato è risultato:

	trov. %	Rh 41,05	; Cl 4,30	; N 20,85
per $\{Rh_3ClN_{11}H_{14}\}\cdot 13\ H_2O$	calc.	41,00	4,70	20,40

$$\chi_{mol}\cdot 10^6 = 25.$$

Chimica. — *Complesso cristallino organometallico contenente alluminio e cobalto avente proprietà catalitiche stereospecifiche* (*). Nota di Giulio Natta, Lido Porri e Antonio Carbonaro, presentata (**) dal Socio G. Natta.

Catalizzatori solubili a base di cobalto sono stati già da tempo proposti per la polimerizzazione stereospecifica del butadiene a polimeri 1,4 *cis* (1). Tali catalizzatori sono preparati per reazione tra un alluminio alchile, di solito alluminio dietilmonocloruro, ed un composto di cobalto solubile in idrocarburi, come cobalto diacetilacetonato, cobalto 2-etilesanoato, ecc. Poco si conosce finora sulla struttura di questi catalizzatori; allo scopo di chiarirne la natura ed il meccanismo di funzionamento, abbiamo da tempo intrapreso uno studio sistematico della reazione tra composti di alluminio e composti di cobalto.

Un risultato di tale lavoro è stato l'ottenimento di un complesso metallorganico cristallizzabile, contenente sia alluminio che cobalto, capace di promuovere da solo la polimerizzazione 1,4 *cis* del butadiene. Tale complesso contiene il cobalto nello stato di valenza 1 e presenta quindi un certo interesse, anche al di fuori del campo della polimerizzazione stereospecifica, come esempio di stabilizzazione di una bassa valenza di un metallo attraverso opportuna coordinazione. In questa Nota introduttiva riferiamo brevemente sulla preparazione di tale complesso, su alcune sue proprietà chimiche e sulla sua attività catalitica.

Preparazione del complesso $[CoAl_2Cl_5(C_6H_5)_2]_2 \cdot C_6H_6$.

Il cloruro di cobalto, l'alluminio tricloruro e l'alluminio metallico mantenuti sotto agitazione in sospensione benzenica reagiscono già a temperatura ambiente, con formazione di un olio denso rosso bruno, che si stratifica sotto il benzolo in cui è poco solubile. La reazione è piuttosto lenta a temperatura ambiente, ma è pressoché immediata all'ebollizione.

Estraendo con benzolo bollente l'olio così ottenuto precipitano, per raffreddamento delle soluzioni benzeniche, cristalli giallo oro, sotto forma di squamette lucenti, che una volta precipitati, risultano praticamente insolubili in tutti i solventi idrocarburici, anche a caldo. L'analisi indica che tali cristalli contengono Al, Co, Cl, gruppi fenilici; a causa della difficoltà di purificarli per cristallizzazione le determinazioni quantitative su essi effettuate hanno fornito risultati discordanti e non è stato possibile dedurre per essi una formula attendibile. Tali cristalli presentavano tuttavia un certo inte-

(*) Lavoro eseguito presso l'Istituto di Chimica Industriale del Politecnico di Milano.
(**) Nella seduta del 10 dicembre 1960.
(1) Cfr. per esempio Brev. It. 587976 e 597770.

resse poiché, sospesi in una soluzione benzenica di butadiene, si ricoprivano di polimero che, sebbene notevolmente reticolato, risultava a tenore molto elevato in unità 1,4 *cis* (circa 90 %).

Il metodo di preparazione, l'insolubilità dei cristalli ed il fatto che essi presentassero una attività cationica nella reticolazione del polibutadiene fecero supporre che essi contenessero alluminio tricloruro complessato. Si è perciò aggiunto alla sospensione dell'olio ottenuto per reazione in benzolo tra $AlCl_3$, $CoCl_2$, Al metallico, una quantità di alluminio trifenile sufficiente per trasformare l'alluminio tricloruro eventualmente complessato in $AlCl_2(C_6H_5)$ oppure $Al(C_6H_5)_2Cl$, allo scopo di ottenere un complesso più solubile di quello isolato e privo di attività cationica. Introducendo nella sospensione benzenica dell'olio una soluzione di alluminio trifenile (circa 1,15 moli per mole di $AlCl_3$ inizialmente impiegato), tutto l'olio si discioglie nel benzolo con formazione di una soluzione rosso bruna; concentrando questa e lasciando a riposo a temperatura ambiente, si separano lentamente cristalli verdi scuri (I), di lucentezza serica, sensibilissimi all'aria ed all'umidità. Tali cristalli sono poco solubili in tutti i solventi organici, ma possono essere ricristallizzati da benzolo all'ebollizione.

Una determinazione crioscopica del peso molecolare di (I) non è stata possibile a causa della bassa solubilità del composto; è stato possibile tuttavia dedurre il valore del peso molecolare dalla densità ($\sim$ 1,58) e dal volume della cella elementare (determinato roentgenograficamente su spettri di cristalli singoli). Tale valore è risultato 480–485 od il doppio.

Lo spettro IR di (I) (effettuato in Nujol) presenta bande a 12,85 μ e 14,60 μ, verosimilmente attribuibili a presenza di gruppi fenilici, ed una banda a 14,85 μ, che è una delle bande caratteristiche del benzolo. La presenza di questa banda fece supporre che nei cristalli del complesso (I) fosse contenuto benzolo clatrato. In effetti, riscaldando i cristalli sotto N_2, a 115° circa essi cominciano a decomporsi, liberando benzolo, che è stato possibile dosare quantitativamente e che è risultato circa l'8 % in peso di (I). Dalla determinazione del cobalto, dell'alluminio, del cloro e tenuto conto del peso molecolare è da ritenere come assai probabile per il complesso (I) la formula bruta:

$$[CoAl_2Cl_5(C_6H_5)_2 \cdot 0{,}5\ C_6H_6)]_n ,$$

dove n è eguale ad 1 oppure 2.

Proprietà chimiche del complesso (I).

Reazione con tetraidrofurano e con etere. – I cristalli di (I) reagiscono immediatamente con tetraidrofurano, impiegato in eccesso, con formazione di un precipitato nero ferromagnetico, mentre contemporaneamente la fase liquida si colora in blu intenso. Il precipitato nero è risultato all'analisi chimica cobalto metallico, mentre dalla soluzione tetraidrofuranica blu sono stati isolati per concentrazione cristalli corrispondenti alla formula

bruta $CoCl_2 \cdot C_4H_8O$. Il rapporto tra il cobalto precipitato sotto forma di cobalto metallico e quello passato in soluzione sotto forma di cobalto dicloruro tetraidrofuranato è risultato eguale ad 1.

Per reazione tra i cristalli di (I) ed etere, impiegato in eccesso, si ha formazione di un precipitato scuro, mentre l'etere rimane incolore. Il precipitato scuro, dopo decantazione dell'etere, e lavaggi ripetuti con etere fresco anidro, è stato fatto reagire con tetraidrofurano. Si ha intensa colorazione blu della fase liquida, dovuta a $CoCl_2$ passato in soluzione, mentre rimane un precipitato nero costituito da cobalto metallico. Sia l'etere che il tetraidrofurano si comportano quindi alla stessa maniera, l'unica differenza consistendo nel fatto che mentre il $CoCl_2$ è solubile in tetraidrofurano, esso è insolubile in etere e quindi precipita in questo solvente insieme con il cobalto metallico. Ciò offre una comoda via per individuare sotto quale forma si trova l'alluminio nel complesso (I); evaporando la soluzione eterea ottenuta dall'attacco dei cristalli di (I) si è infatti ottenuto un olio denso che all'analisi chimica e nell'infrarosso è risultato $AlCl_2(C_6H_5)$ eterato.

I risultati della reazione con etere e con tetraidrofurano sono interpretabili ammettendo che nel complesso (I) il cobalto si trovi allo stato di valenza 1, stabilizzato dalla coordinazione con $AlCl_2(C_6H_5)$. L'aggiunta di etere o tetraidrofurano, che rompono tale coordinazione, provoca la dismutazione del cobalto monovalente in cobalto metallico più cobalto bivalente.

In base a tale risultato, si può ritenere assai probabile, per il complesso (I) la formula:

$$[CoCl \cdot 2\, AlCl_2(C_6H_5)_2]_2 \cdot C_6H_6.$$

Reazione con alcooli. – Per reazione tra cristalli di (I) ed alcool etilico anidro disaerato (od altro alcool) si ha inizialmente formazione di un precipitato bruno che lentamente si ridiscioglie impartendo all'alcool una colorazione blu, mentre contemporaneamente si sviluppa H_2. Non si è ancora indagato sulla natura del composto bruno che si forma inizialmente. Riteniamo che la reazione complessiva che avviene in alcool possa essere così espressa:

$$(1) \qquad Co^{+} + ROH \rightarrow Co^{++} + OR^{-} + \frac{1}{2} H_2.$$

La quantità di H_2 prevedibile secondo la (1) è in buon accordo con i dati sperimentali. Anche i risultati della reazione con alcool sembrano quindi confermare l'esistenza di cobalto monovalente nel complesso.

È attualmente in corso lo studio delle reazioni tra (I) e piridina, trifenilfosfina, dipiridile, dalle quali ci attendiamo una ulteriore conferma dello stato di valenza del cobalto.

Proprietà catalitiche del complesso (I).

Soluzioni benzeniche di (I) promuovono, senza aggiunta di alluminio alchile, la polimerizzazione del butadiene ed i polimeri che si ottengono

hanno un titolo in unità 1,4 *cis* del 97 % circa. La polimerizzazione può essere effettuata anche in fase eterogenea, sospendendo cristalli di (I) in eptano contenente butadiene; in tal caso però i cristalli del complesso si ricoprono di polimero e la polimerizzazione si arresta molto presto.

È da notare che, a causa della estrema sensibilità del complesso all'umidità, all'ossigeno, a composti donatori di elettroni, solo impiegando solventi e monomero molto puri è possibile effettuare la polimerizzazione; anche in tal caso tuttavia è difficile evitare che una parte del complesso venga alterata cosicché rimane sempre incertezza sull'effettiva quantità di complesso attivo nella polimerizzazione.

Per una interpretazione del meccanismo di polimerizzazione occorre tenere conto del fatto, da noi accertato nello studio della polimerizzazione coi normali catalizzatori ottenuti da $Al(C_2H_5)_2Cl$ e cobalto diacetilacetonato, che impiegando $Al(C_2H_5)_2Cl$ concenente C^{14} non è stata trovata radioattività nel polimero. Tale fatto può essere spiegato ammettendo che la catena polimerica cresce sul cobalto.

D'altra parte uno studio effettuato nel nostro Istituto [2] ha mostrato che i noti catalizzatori ottenuti da $Al(C_2H_5)_2Cl$ e composti solubili di cobalto sono sostanzialmente analoghi come composizione al complesso cristallino da noi isolato. È perciò da ritenere che anche nel caso di quest'ultimo la catena polimerica possa crescere sul cobalto. Tale conclusione porta ad ammettere che nel caso del complesso da noi isolato l'iniziazione corrisponda ad una ossidazione del cobalto da mono a bivalente, con formazione di un legame cobalto–carbonio; tale iniziazione risulterebbe analoga a quella che si verifica nella polimerizzazione del butadiene con Na o Li metallici. La stereospecificità del processo di polimerizzazione sarebbe da attribuire al fatto che, nello stadio intermedio, l'unità monomerica si coordina al complesso catalitico in modo tale da assumere la configurazione *cis*.

Parte sperimentale.

Preparazione del complesso (I). – In un pallone da 250 cm^3, munito di agitatore e refrigerante a ricadere e collegato ad una sorgente di N_2 secco vengono posti, dopo aver evacuato l'aria, cm^3 50 di benzolo anidro, g 3 di $CoCl_2$ anidro, g 2,2 di $AlCl_3$ sublimato, g 0,6 di Al in polvere. Bollendo a ricadere per 1 ora circa, si ha formazione di un olio rosso scuro, e scomparsa del $CoCl_2$ e dell'$AlCl_3$; l'olio, poco solubile, si stratifica sotto il benzolo al quale impartisce una colorazione gialla. Si introducono quindi g 4,5 di $Al(C_6H_5)_3$, e si bolle a ricadere per alcuni minuti; la soluzione rosso mattone così ottenuta viene separata per filtrazione dal poco Al metallico rimasto. La soluzione viene concentrata a circa metà volume e lasciata a riposo; si formano lentamente aggregati cristallini di color verde scuro che vengono separati per filtrazione, lavati con poco benzolo e quindi ricristallizzati da

(2) Lavoro non ancora pubblicato.

100–150 cm³ di benzolo all'ebollizione. Ogni operazione viene effettuata in assenza di aria e di umidità.

All'analisi:

trov. %: Co 12,15 ; Al 11,22 ; Cl 36,60 ; C_6H_6 7,60

per $Co_2Al_4Cl_{10}(C_6H_5)_4 \cdot C_6H_6$

calc. %: Co 12,20 ; Al 11,17 ; Cl 36,75 ; C_6H_6 8,06.

Il benzolo clatrato è stato determinato per decomposizione del complesso a 140–150°, mediante riscaldamento in tubo verticale chiuso ad una estremità, lavaggio con eptano per asportare il benzolo liberato e determinazione del benzolo nella soluzione eptanica all'IR, previa taratura con soluzioni di benzolo in eptano a titolo noto.

Da un esame ai raggi X, con i consueti metodi Weissemberg, di cristalli singoli di (I) sono state ottenute le seguenti costanti reticolari [3]:

$\bar{a} = (26{,}22 \pm 0{,}20)$ Å ; $b = (9{,}35 \pm 0{,}09)$ Å ; $\bar{c} = (16{,}82 \pm 0{,}12)$ Å ; $\beta = 101{,}2°$;

gruppo spaziale $C\,2/c$ oppure Cc. Da queste si calcola un volume di 4045 Å³ per la cella elementare. La densità dei cristalli è stata determinata col metodo dei liquidi pesanti (miscela esaclorobutadiene–eptano) ed è risultata circa 1,58 g/cm³. Il peso molecolare è stato calcolato con la formula $P.M. = \frac{d.\,V.\,6{,}02 \cdot 10^{23}}{N}$, dove d è la densità, V il volume della cella elementare in cm³, N = 4 oppure 8, dato che entrambi i gruppi spaziali possibili contengono due elementi di ripetizione con traslazione.

Reazione di (I) *con tetraidrofurano.* – In un pallone da 100 cm³ munito di agitatore, e contenente, in atmosfera di N_2 secco, 50 cm³ di tetraidrofurano distillato di fresco su $LiAlH_4$, vengono introdotti g 2 circa di cristalli. Si lascia in agitazione per alcuni minuti a temperatura ambiente, perché la reazione si completi; alla fine si ha una soluzione azzurra ed un precipitato nero che decanta facilmente. Si sifona via la soluzione, si lava a fondo il precipitato con tetraidrofurano per decantazione fino a che il tetraidrofurano non risulta incolore. Si secca infine il precipitato sotto vuoto, operando sempre al di fuori del contatto dell'aria.

All'analisi:

trov. % Co 93 ; Al tracce.

La soluzione azzurra sifonata viene concentrata fino a 20 cm³; dopo lungo riposo si separano dei cristalli azzurri che dopo lavaggio con poco tetraidrofurano freddo vengono seccati sotto vuoto e analizzati.

trov. % Co 28,75 ; Cl 34,60

per $CoCl_2 \cdot C_4H_8O$ calc. Co 29,20 ; Cl 35,15.

(3) Le determinazioni roentgenografiche sono state effettuate da P. Corradini e P. Ganis, che vivamente ringraziamo.

Un attacco analogo viene ripetuto su g 0,5 di cristalli in 50 cm^3 di tetraidrofurano. Si separa per sifonamento la soluzione azzurra, si lava a fondo il precipitato nero con tetraidrofurano riunendo il tetraidrofurano di lavaggio con la soluzione iniziale. La determinazione del Co nella soluzione e nel precipitato ha dato i seguenti valori:

nella soluzione trovati g 0,029 di Co;
nel precipitato trovati g 0,031 di Co.

Reazione di (I) *con etere etilico.* – Circa 1 g di cristalli di (I) sono stati fatti reagire con etere anidro, nella maniera sopra esposta per il tetraidrofurano. Il solido nero formatosi, separato per decantazione dalla soluzione quasi incolore e lavato a fondo con altro etere, è stato successivamente trattato con 20 cm^3 di tetraidrofurano.

La soluzione tetraidrofuranica, coloratasi in blu, viene separata dal residuo nero rimasto; per aggiunta di 30 cm^3 di etere, cristallizza un prodotto che ha dato la seguente analisi:

	trov. %	Co 28,79 ;	Cl 34,75
per $CoCl_2 \cdot C_4H_8O$	calc.	Co 29,20 ;	Cl 35,15.

Il nero insolubile in tetraidrofurano è stato riconosciuto per Co esagonale all'esame con i raggi X.

Dalla soluzione eterea iniziale è stato eliminato completamente il solvente per distillazione. Su una parte del liquido oleoso rimasto come residuo è stato determinato il rapporto Cl/Al che è risultato uguale a 2.

L'altra porzione è stata spettrata all'IR e lo spettro confrontato con quello di un campione di eterato di $AlCl_2(C_6H_5)$; i due spettri sono risultati uguali.

Reazione di (I) *con alcool.* – g 0,4045 del complesso cristallino (I) sono stati fatti reagire con 10 cm^3 di alcool 2–etilesilico in apposito recipiente collegato con una buretta graduata. Si è formato inizialmente un precipitato nero che nel corso di una giornata si è ridisciolto, favorito dall'agitazione, impartendo al solvente una intensa colorazione blu, mentre contemporaneamente si sono sviluppati N cm^3 8,8 di gas che è stato riconosciuto per H_2 all'analisi cromatografica (teorico secondo la (1) N cm^3 9,36).

Polimerizzazione. – In un provettone di vetro da 50 cm^3 vengono posti, in ambiente di N_2 secco, cm^3 25 di una soluzione benzenica contenente g 0,025 del complesso (I). Si introducono g 3 di butadiene e si mantiene a 5–10° C; dopo 4 ore si arresta la polimerizzazione con metanolo e si coagula. Si ottengono g 1 di polimero, a titolo 97 % in unità 1,4 *cis*, peso molecolare circa 100.000.

Geologia. — *Le varie unità tettoniche della Toscana e della Liguria orientale.* Nota di Piero Elter, Enzo Giannini, Marco Tongiorgi e Livio Trevisan, presentata (*) dal Corrisp. L. Trevisan.

L'esistenza di strutture a coltri di ricoprimento nell'Appennino settentrionale è stata enunciata nel 1907 da De Launay e Steinmann [1, 2] che hanno considerato come alloctone le formazioni del complesso delle argille scagliose ofiolitifere.

Da quel tempo ad oggi, benché l'esistenza di falde di ricoprimento sia stata da alcuni Autori tenacemente avversata, numerosi studiosi hanno portato notevoli contributi allo studio e alla conoscenza delle formazioni alloctone, mettendone specialmente in evidenza gli aspetti di strutture che possono attribuirsi a fenomeni gravitativi e tentando di determinarne l'estensione e i meccanismi della messa in posto. Il volume *Geologia dell'Appennino settentrionale* di G. Merla, 1951–52 [3] riassume ed esamina criticamente le conoscenze fino allora raggiunte; successivamente gli studi si sono allargati e intensificati e con le maggiori conoscenze ottenute dai nuovi rilevamenti di dettaglio i principali problemi possono ora venire impostati su basi più concrete.

Lo scopo di questa Nota è di dare un rapido ragguaglio sui risultati finora raggiunti nella distinzione delle varie unità alloctone.

Nel descrivere sommariamente i caratteri di tali unità, cominceremo da quelle che nell'ordine di sovrapposizione appaiono le più basse.

I. – Falda toscana.

La prima unità in questo senso o falda di ricoprimento è quella che si manifesta con particolare evidenza nelle Apuane, dove il nucleo metamorfico (che può considerarsi autoctono) appare in finestra sotto una coltre non metamorfica. Il termine più basso di questa coltre è formato dal Trias superiore, ora coi depositi evaporitici del Retico e Norico (calcare « cavernoso »), ora con gli scisti del Carnico (Verrucano). Si tratta di un complesso che recentemente Valduga [4] ha chiamato « Serie di Castelpoggio », nel suo studio di un'area a NE di Carrara. F. Ippolito, 1949–50 [7] nel suo studio sulle Apuane, aveva usato il termine « falda toscanica » riprendendo parzialmente il termine « Toscanide » la cui definizione era oltremodo vaga. Infatti questo nome fu dato da Steinmann 1907 [2], al substrato della falda « Liguride », considerato come « forse autoctono ». Successivamente venne intro-

(*) Nella seduta del 10 dicembre 1960.

dotta una distinzione in Toscanide I (per indicare l'autoctono, per esempio nelle Apuane) e Toscanide II (per indicare la falda di ricoprimento, De Wijkerslooth, 1934 [5]).

Noi useremo il termine di « falda Toscana », rinviando ad altro lavoro una definizione meno incerta delle precedenti, la descrizione della serie dei terreni dalla base alla sommità, e soprattutto dell'estensione, che è ancora oggi l'argomento più controverso.

Già N. Tillmann [6] nel 1926 aveva messo in relazione il ricoprimento della « Toscanide superiore » delle Apuane con quello della Montagnola senese, dove pure affiora in finestra una serie metamorfica. Anche per De Wijkerslooth la falda Toscanide II aveva un'estensione grandissima, dalle Apuane alla Maremma. Restava tuttavia insoluto il problema di circoscrivere una falda così estesa e sopratutto di individuarne la fronte.

Questo problema fondamentale nella tettonica dell'Appennino settentrionale è stato dibattuto anche in occasione di una escursione compiuta nell'aprile 1953 alla presenza di una ventina di illustri cultori di tettonica di vari paesi (organizzata dal Centro Studi per la Geologia dell'Appennino del Consiglio Nazionale delle Ricerche).

Non possiamo qui entrare nei particolari dei nuovi studi compiuti da allora, che richiedono un'ampia trattazione e documentazione. Ci limitiamo a dire che il problema è stato da noi esaminato anche in rapporto a quello della « serie ridotta toscana », che riguarda l'interpretazione di quelle estese aree della Toscana marittima nelle quali manca – per evidente riduzione tettonica – una parte notevole della serie dei terreni, per cui il Trias superiore (evaporiti) appare direttamente coperto dal « complesso delle argille scagliose ».

Limitandoci per ora alle zone più settentrionali, accenneremo qui al fatto che secondo noi la fronte della falda Toscana a est delle Apuane corrisponde alle pieghe rovesciate della Val di Lima, e prosegue verso SE con la struttura di Monsummano–Monte Albano e i monti del Chianti, che presentano egualmente un rovesciamento frontale.

II. – Falde liguri.

Assai meno controverso è stato il riconoscimento della giacitura alloctona dei terreni sovrastanti il « Macigno » della serie toscana. In generale però tutti i terreni di questo complesso venivano considerati come facenti parte di una sola unità tettonica, la cui serie stratigrafica non era stata per altro definita chiaramente e ciò anche per l'assetto tettonico da tutti riconosciuto molto complicato o, addirittura, talora caotico.

I nuovi studi di dettaglio, estesi dalla Ligura orientale fino al Trasimeno ed al Grossetano, ci hanno portati a distinguere in questo complesso almeno tre elementi tettonici sovrapposti, caratterizzati da serie stratigrafiche diverse.

A partire dal basso, essi sono:

1ª falda ligure o falda dell'Alberese;

2ª falda ligure o falda ofiolitifera;

3ª falda ligure o falda del Flysch ad Helmintoidi.

1) *La prima falda ligure o falda dell'Alberese.*

La serie stratigrafica di questa falda è in breve così costituita a partire dal basso:

1° argille nerastre con intercalazioni di calcari grigio–scuri;

2° formazione dell'Alberese s. s.: calcari marnosi in genere scuri, con patine di alterazione biancastre, in spesse bancate carcaree alla base, talora anche arenacee (arenarie simili alla « Pietraforte »), sfumanti a marne verso l'alto. Caratteristica è la sfaldatura « a saponetta » nella parte alta di ogni banco. La stratificazione è manifestamente ritmica;

3° sia il livello 1 che la parte bassa del livello 2 possono essere, per spessori più o meno cospicui, sostituiti da una formazione prevalentemente arenacea con intercalazioni argilloso–marnose subordinate, presentante i caratteri tipici di una formazione risedimentata (*graded bedding*). Questa formazione può localmente assumere uno sviluppo notevole e costituire in tal caso un livello autonomo (Pietraforte) distinguibile anche cartograficamente nella serie stratigrafica di questa falda.

L'età dei terreni di questa unità tettonica va dal Cretaceo medio–superiore, documentato dalla presenza di Inocerami e Ammoniti (Pietraforte della zona di Firenze etc.) fino a tutto l'Eocene. È incerta la presenza della base dell'Oligocene (Merla, 1952 [3]).

Questo complesso, che appoggia di regola sul «Macigno» della falda Toscana, non costituisce però una copertura continua, ma appare ridotto in tronconi di forma irregolare e di estensione e spessore molto variabili. Ad ogni modo la sua potenza massima può raggiungere i 7–800 metri.

2) *La seconda falda ligure o falda ofiolitifera.*

La base stratigrafica di questo complesso tettonico è costituita dalle così dette « Ofioliti » (Serpentina, Gabbro, Diabase), al di sotto delle quali non è stato fin'ora mai riconosciuto con sicurezza alcun livello in posizione normale [1].

Al di sopra delle « Ofioliti » si osserva una serie, che dal basso in alto risulta così costituita:

1° radiolariti rosse, verdastre etc., con radiolari del Titonico;

(1) Anche i livelli di argille scagliose (s. s.) e argille con palombini dell'isola d'Elba, già considerati come probabilmente in origine sottostanti alle ofioliti (Trevisan [8]) e quindi attribuiti al Guirese, possono senza difficoltà considerarsi ricoperti tettonicamente dalle serpentine ed essere attribuiti al Cretaceo.

2° calcari stratificati grigio rosei o nocciola, od anche verdognoli, raramente contenenti liste di selce, conosciuti comunemente come «Calcari a Calpionelle». Si osservano infatti in sezione sottile abbondanti resti di microorganismi di questo gruppo, che hanno permesso una datazione dei calcari al Cretaceo inferiore (Valanginiano, Hauteriviano);

3° «argille scagliose» s. s. con intercalazioni di singole bancate di calcari grigio scuri, con rilevante contenuto in silice, presentanti una caratteristica superficie bruna screpolata (Palombini), di arenarie zonate e più raramente di vere quarziti di colore molto scuro;

4° marne e marne siltose grigio scure con patine di alterazione giallastre, di aspetto simile talora alle marne della serie dell'Alberese, molto uniformi, fissili, ma senza una chiara suddivisione in banchi. Esse presentano rade intercalazioni di un'arenaria a grana estremamente sottile;

5° marne ed argille varicolori (rosse, verdi, violette, grigio verdastre ecc.) con intercalazioni di banchi di calcari grigio chiari o verdastri e di straterelli silicei con patine manganesifere.

Fra questa formazione e quella descritta al n. 4 esistono frequenti rapporti di eteropia e l'una o l'altra delle due può in certe zone essere completamente assente. In ambedue si trovano spesso livelli di microbrecce nummulitiche con faune eoceniche;

6° arenaria quarzoso–micaceo–feldspatica di caratteristiche ed aspetto molto simili a quelle del «Macigno» della serie Toscana, col quale è stata talora confusa.

Dove la sua sovrapposizione agli altri terreni della falda ofiolitifera (i quali a loro volta sormontano spesso direttamente il «Macigno») risultava evidente, essa era stata interpretata dai vecchi Autori «autoctonisti» come il livello più alto dell'unica serie stratigrafica che secondo questi comprendeva tutti i terreni dell'Appennino; da questa opinione era nato il nome di «Arenaria superiore». Successivamente ne è stata riconosciuta l'età oligocenica e la contemporaneità con la formazione del «Macigno», ma anche la sicura appartenenza alla serie stratigrafica della seconda falda ligure. Nonostante questo cambiamento di interpretazione però, riteniamo sia utile, almeno provvisoriamente, conservare la denominazione di «Arenaria superiore».

Da quanto è stato accennato a proposito delle varie formazioni che la compongono, risulta evidente che la seconda falda ligure comprende terreni di varie età, in serie continua dal Giurese superiore ad una parte non precisata dell'Oligocene.

Per avere un'idea della sua estensione è sufficiente uno sguardo alla carta della distribuzione delle masse ofiolitiche in Merla (1952); lo spessore non è valutabile a causa delle condizioni tettoniche.

3) *La terza falda ligure o falda del Flysch ad Helmintoidi.*

Questo complesso tettonico risulta costituito da una sola formazione di enorme potenza e di aspetto molto uniforme in tutto il suo spessore. Essa

è molto simile all'Alberese s. s.: si tratta infatti anche qui di un'alternanza ritmica di calcari marnosi ed argille. I calcari sono ben stratificati ed alla base di ciascuno strato compare quasi sempre una fascia più arenacea (arenaria tipo « Pietraforte »). La formazione si differenzia tuttavia dall'Alberese per essere nel complesso più marnosa, per la particolare chiarezza e regolarità della stratificazione, così che ogni singolo banco può talora essere seguito sul terreno anche per parecchi chilometri; si differenzia inoltre per una particolare ritmicità della sedimentazione, per cui a banchi isolati di grande spessore si alternano gruppi di strati più sottili ma della stessa natura petrografica.

L'età di questo complesso, secondo i recenti studi di Lanteaume, Fallot e Conti [9] è interamente compresa nel Cretaceo superiore.

I terreni appartenenti a questa unità affiorano principalmente in Liguria fra Chiavari e Monte Antola e lungo il margine padano fino almeno all'altezza di Modena.

III. – Rapporti tra i vari complessi tettonici.

Le affinità e le differenze tra la serie della falda Toscana e la serie autoctona sono state già rilevate, specialmente per la zona apuana, e non ripeteremo qui raffronti già noti.

La seconda falda è l'unica che presenti, tra le falde liguri, alcuni termini della serie simili a quelli della falda Toscana. Essi sono: i diaspri del Malm, i Calcari a Calpionelle (che corrispondono almeno in parte alla «Maiolica», che contiene pure Calpionelle); le argille varicolori, con intercalazioni di microbrecce nummulitiche, che hanno il corrispondente nella «Scaglia»; l'«Arenaria superiore», che è molto simile al «Macigno», pure non potendosi accertare una contemporaneità esatta di entrambe le formazioni dal letto al tetto.

La prima falda ligure (o falda dell'Alberese) ha maggiori analogie invece con la terza (Flysch ad Helmintoidi). I livelli più antichi di entrambe appartengono al Cretaceo (dal Cenomaniano al Senoniano) con presenza di torbiditi arenacee. Il Flysch ad Helmintoidi termina col Cretaceo superiore, mentre l'Alberese, che come tipo di sedimento è molto simile, si continua per almeno tutto l'Eocene.

La prima e la terza falda ligure non contengono mai ofioliti, che caratterizzano invece la seconda.

È già stato ammesso che le falde liguri provengono da bacini di sedimentazione situati in origine più a ovest di quelli della falda toscana e dell'autoctono. Le serie che compongono le unità liguri (che abbiamo numerato secondo l'ordine di sovrapposizione) risultano da varie considerazioni essersi formate in bacini che si susseguivano da ovest a est col seguente ordine: terza falda (Flysch a Helmintoidi), prima falda (Alberese), seconda falda (ofiolitifera). Ancora più a oriente seguivano i bacini di sedimentazione della falda toscana e poi dell'autoctono.

Opere citate.

[1] L. De Launay, *La métallogénie de l'Italie et des régions avoisinantes.* – II. *Note sur la Toscane minière et l'île d'Elbe*, «Congr. Géol. Int., Mexico», 1907.

[2] G. Steinmann, *Alpen und Apennin*, «Monatsber. der Deutsch. Geol. Ges.», 1907.

[3] G. Merla, *Geologia dell'Appennino Settentrionale*, «Boll. Soc. Geol. Ital.», *70* (1951), 1952.

[4] A. Valduga, *Geologia dei Monti di Carrara ad Ovest di M. Sagro*, «Boll. Soc. Geol. Ital.», *76* (1957), 1957.

[5] P. De Wijkerslooth, *Bau und Entwicklung des Apennins besonders der Gebirge Toscanas*, «Geol. Inst. Amsterdam», 1934.

[6] N. Tillmann, *Tektonische Studien in der Catena Metallifera Toscanas*, «Geol. Rundschau», *17*, 1926.

[7] F. Ippolito, *Le Alpi Apuane*, «Mem. e Note dell'Ist. Geol. Appl. Univ. Napoli», *3*, 1949–50.

[8] L. Trevisan, *Aspetti e problemi del complesso delle «argille scagliose ofiolitifere» nei suoi affioramenti occidentali (Toscana marittima e Liguria)*, «Boll. Soc. Geol. Ital.», *75* (1956), 1957.

[9] M. Lanteaume, P. Fallot, S. Conti, *Sur l'âge des calcaires à Helmintoïdes (Alberese) de la région génoise*, «C. R. des séances de l'Académie des Sciences», t. 247, Institut de France. Paris, 10 novembre 1958.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Analisi matematica. — *Teorema di massimo modulo e unicità delle soluzioni generalizzate dei problemi al contorno.* Nota di GAETANO FICHERA, presentata (*) dal Socio M. PICONE.

In una Memoria in corso di stampa sull'« Archive for Rational Mechanics and Analysis » (1), ho dimostrato che, se u è una soluzione dell'equazione vettoriale dell'elastostatica tridimensionale

$$\Delta_2 u + k \operatorname{grad} \operatorname{div} u = 0 \qquad \left(\Delta_2 \equiv \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\right) \tag{1}$$

(con k reale e maggiore di -1) in un campo limitato A dello spazio cartesiano S_3, in opportune ipotesi di regolarità per la frontiera Σ di A, esiste una costante H, dipendente unicamente da A e da k, tale che se u è continua in $\bar{A} = A \cup \Sigma$ e di classe due in A, si ha

$$\max_{\bar{A}} |u| \leq H \max_{\Sigma} |u|. \tag{2}$$

Sono altresì pervenuto a calcolare esplicitamente, in funzione di k e di taluni elementi geometrici del campo A, la costante H. Tale risultato, del tipo di quelli intesi nella letteratura come *teoremi di massimo modulo*, ha la peculiarità, rispetto a risultati del genere stabiliti anche recentemente per altre equazioni differenziali da alcuni Autori, di fornire il calcolo di una costante H quale quella interveniente nella (2).

La (2) è stata dapprima dimostrata per le soluzioni della (1) di classe uno in $\bar{A}$ e successivamente estesa a quelle soltanto continue in $\bar{A}$. L'idea che si presenta spontanea per conseguire tale estensione è quella di approssimare uniformemente in $\bar{A}$ una soluzione u della (1) continua in $\bar{A}$ con una successione $\{u_n\}$ di soluzioni di classe uno in $\bar{A}$. Siffatte soluzioni costituiscono un sistema completo (in opportune ipotesi per Σ) per l'approssimazione uniforme su Σ di *ogni* vettore a tre componenti definite e continue su Σ (2). Questo teorema di completezza permetterebbe di affermare che la (2) sussiste per *ogni u*, soluzione di (1), continua in $\bar{A}$, qualora si fosse provato che ogni siffatta soluzione è determinata dai suoi valori su Σ. Cioè bisognerebbe dimostrare il teorema di unicità, per il problema di Dirichlet relativo alla (1), nella classe delle funzioni vettoriali di classe due in A e continue in $\bar{A}$. Un siffatto teorema, che certo sussiste quando è vera la (2) nella classe testè spe-

(*) Nella seduta del 10 dicembre 1960.

(1) Dedicata ad ANTONIO SIGNORINI.

(2) Cfr. G. FICHERA, *Sull'esistenza e sul calcolo delle soluzioni di problemi al contorno, relativi all'equilibrio di un corpo elastico*, « Ann. Sc. Norm. », Pisa, ser. III, vol. IV, fasc. I–II, cap. III (1950).

cificata (si pensi al caso delle equazioni lineari ellittiche di secondo ordine in uno scalare), deve, nel caso attuale, esser dimostrato direttamente, onde evitare un circolo vizioso. Infatti, l'unicità anzidetta si dimostra in genere usando l'integrale dell'energia connesso alla (1), epperò nella classe delle soluzioni continue fin sulla frontiera con le loro derivate prime o, quanto meno, tali che queste abbiano modulo di quadrato sommabile in A.

Nella Memoria in corso di stampa, su ricordata, mi sono avvalso di un procedimento, fondato su talune considerazioni di Analisi funzionale, tramite il quale dalla esistenza della soluzione per il problema di Dirichlet in una classe assai particolare (esistenza già nota [3]) segue l'unicità nella classe delle soluzioni continue in $\bar{A}$. Orbene, siffatto procedimento ha carattere generale e può applicarsi a sistemi assai men particolari di (1), permettendo di pervenire alla dimostrazione dell'unicità in problemi al contorno, anche nel caso in cui i dati al contorno siano assunti in senso generalizzato, purché sia noto un certo teorema di esistenza in una particolare classe di funzioni, o, almeno, sia verificata una determinata proprietà di chiusura, come specificheremo nella presente Nota, che è appunto dedicata ad esporre il sopra menzionato procedimento per un sistema di m equazioni lineari alle derivate parziali del secondo ordine in m incognite nello spazio ad r dimensioni. A mò di esempio considereremo il caso di una singola equazione ellittica omogenea del secondo ordine e per essa dimostreremo un teorema di unicità per il problema di Dirichlet generalizzato consistente nell'assegnare sul contorno una distribuzione di assegnato ordine n.

Sia A un insieme aperto limitato e connesso dello spazio cartesiano S_n limitato esternamente dalla ipersuperficie regolare chiusa Σ_0 e internamente dalle ipersuperficie regolari chiuse $\Sigma_1, \cdots, \Sigma_p$. Ciascuna delle Σ_i sia di classe $n+1$ $(n \geq 1)$ in ogni suo punto ed esse siano a due a due disgiunte. Detto m un intero positivo, siano le $a_{ij}^{hk}(x)$ funzioni reali di classe $n+1$ in $\bar{A}$, le b_{ij}^{h} di classe n in $\bar{A}$ e le c_{ij} $(h, k = 1, \cdots, r\ ;\ i, j = 1, \cdots, m)$ continue in $\bar{A}$. Consideriamo il sistema di m equazioni alle derivate parziali del secondo ordine in m incognite $u_1, \cdots, u_m$:

$$a_{ij}^{hk} u^j_{x_h x_k} + b_{ij}^{h} u^j_{x_h} + c_{ij} u^j = 0 \qquad (i = 1, \cdots, m). \tag{3}$$

Poniamo $\mathrm{E}_{ij} u^j \equiv a_{ij}^{hk} u^j_{x_h x_k} + b_{ij}^{h} u^j_{x_h} + c u$, $\mathrm{E}^*_{ij} v^j \equiv (a_{ij}^{hk} v^i)_{x_h x_k} - (b_{ij}^{h} v^i)_{x_h} + c_{ij} v^i$ e supponiamo che: [ipotesi α_n)] *se le funzioni u^j sono sommabili (secondo Lebesgue) in* A *e se per ogni m–pla di funzioni reali v^j di classe $n+1$ in* $\bar{A}$ *e nulle su* $\Sigma = \bigcup_{k=0}^{p} \Sigma_k$, *riesce:*

$$\int_A u^j \mathrm{E}^*_{ij} v^i \, dx = 0, \tag{4}$$

allora è $u^j \equiv 0$ *in* A $(j = 1, \cdots, m)$.

(3) Cfr. loc. cit. (2), cap. IV.

Si osservi che tale ipotesi è verificata se, assegnata comunque una m–pla di funzioni reali di classe C^∞ in $\bar{A}$: $f^1, \cdots, f^m$, esiste una soluzione del sistema $E^*_{ij} v^i = f^j$ $(j = 1, \cdots, m)$ costituita da funzioni v^i nulle su Σ e di classe $n+1$ in $\bar{A}$.

Sia $\lambda(\xi)$ un versore definito in ogni punto ξ di Σ le cui componenti siano funzioni di classe $n+1$ (rispetto ai parametri locali) su Σ e che forma col versore normale interno a Σ un angolo $< \pi/2$. L'esistenza di un versore $\lambda(\xi)$ è ovvia. Esiste un $\rho_0 > 0$ tale che per $0 < \rho \leq \rho_0$ il luogo Σ_ρ descritto dal punto $x = \xi + \rho\lambda(\xi)$ quando ξ descrive Σ, è la frontiera di un campo A_ρ la cui chiusura è contenuta in A. Vogliamo dimostrare che:

Soddisfatta l'ipotesi α_n), *se le* u^j $(j = 1, \cdots, m)$ *sono di classe due in* A, *ivi sommabili e soddisfacenti il sistema* (3) *e se per ogni* m*–pla* $w^1, \cdots, w^m$ *di funzioni di classe* n *in* $\bar{A}$ *riesce*

$$\lim_{\rho \to 0} \int_{\Sigma_\rho} u^j w^j \, d\sigma_\rho = 0 \tag{5}$$

le u^j *sono identicamente nulle in* A.

Si ha, detta v^i un'arbitraria funzione di classe $n+1$ in $\bar{A}$:

$$-\int_{A_\rho} u^j E^*_{ij} v^i \, dx + \int_{\Sigma_\rho} \{ v^i a^{hk}_{ij} u^j_{x_h} \nu^{(\rho)}_k - u^j [(a^{hk}_{ij} v^i)_{x_k} - b^k_{ij} v^i] \nu^{(\rho)}_k \} \, d\sigma_\rho = 0, \tag{6}$$

avendo indicato con $\nu^{(\rho)}_k$ le componenti del versore normale interno a Σ_ρ. Per la sommabilità in A delle u^j e per la (5) si ha:

$$\begin{cases} \lim_{\rho \to 0} \int_{A_\rho} u^j E^*_{ij} v^i \, dx = \int_A u^j E^*_{ij} v^i \, dx \\ \lim_{\rho \to 0} \int_{\Sigma_\rho} u^j [(a^{hk}_{ij} v^i)_{x_h} - b^k_{ij} v^i] \nu^{(\rho)}_k \, d\sigma_\rho = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Diciamo $\bar{v}^i$ un'arbitraria funzione di classe $n+1$ su Σ e sia v^i una funzione di classe $n+1$ in $\bar{A}$ la quale in $\bar{A} - A_{(1/2)\rho_0}$ sia così definita: $v^i[\xi + \rho\lambda(\xi)] \equiv \bar{v}^i(\xi)$. Indichiamo con $\mathfrak{D}_{n+1}$ lo spazio delle funzioni di classe $n+1$ su Σ munito dell'ordinaria topologia della convergenza uniforme delle funzioni e delle derivate prime e seconde di queste (rispetto ai parametri locali su Σ). Sia $\mathfrak{D}^*_{n+1}$ lo spazio duale di $\mathfrak{D}_{n+1}$ (spazio delle distribuzioni di ordine $n+1$ su Σ). Poniamo per $0 < \rho < (\rho_0/2)$:

$$\langle T^i_\rho, \bar{v}^i \rangle = \int_{\Sigma_\rho} v^i a^{hk}_{ij} u^j_{x_h} \nu^{(\rho)}_k \, d\sigma_\rho \equiv \int_\Sigma \bar{v}^i a^{hk}_{ij} u^j_{x_h} \nu_k \frac{d\sigma_\rho}{d\sigma} \, d\sigma$$

riesce $T^i_\rho \in \mathfrak{D}^*_{n+1}$. Qualunque sia $\bar{v}^i$ esiste, per le (7), $\lim_{\rho \to 0} \langle T^i_\rho, \bar{v}^i \rangle$. Ne segue, per il ben noto principio di Banach–Steinhaus della uniforme limita-

tezza [4], l'esistenza di un elemento $T^i \in \mathfrak{D}^*_{n+1}$ tale che $\lim_{\varrho \to 0} \langle T^i_\varrho , \bar{v}^i \rangle = \langle T^i , \bar{v}^i \rangle$. Segue allora dalla (6):

$$\int_A u^j E^*_{ij} v^i \, dx - \langle T^i , v^i \rangle = 0$$

e quindi, per ogni m–pla $v^1 , \cdots , v^m$ di funzioni di classe $n + 1$ in $\bar{A}$ e nulle su Σ, il sussistere della (4). Dalla ipotesi α_n) segue la tesi.

Consideriamo il caso particolare di una singola equazione

$$a^{hk} u_{x_h x_k} + b^h u_{x_h} + cu = 0 \tag{8}$$

e supponiamo che essa sia ellittica positiva in $\bar{A}$. Ammetteremo che i coefficienti a^{hk}_{ij} , b^h , c siano di classe C^∞ in un campo contenente $\bar{A}$. Anche Σ sia di classe C^∞. Supporremo altresì che $\lambda(\xi)$ sia di classe C^∞ su Σ. Se si vuole, si può assumere $\lambda(\xi)$ coincidente con il versore normale interno $\nu(\xi)$. Assegniamo nello spazio $\mathfrak{D}^*_n$ la distribuzione T e consideriamo il seguente problema di Dirichlet con dato al contorno generalizzato:

D) *Si ricerca una funzione di classe due in* A, *ivi soluzione della* (8), *la quale verifichi la condizione al contorno generalizzata:*

$$\lim_{\varrho \to 0} \int_{\Sigma_\varrho} uw \, d\sigma_\varrho = \langle T , \bar{w} \rangle$$

per ogni w di classe n in $\bar{A}$ *e denotando* $\bar{w}$ *la traccia di w su* Σ.

Supponiamo che c sia tale che per il problema di Dirichlet in senso classico relativo alla (8) sussista il teorema di unicità. Ciò si verifica, ad esempio, se è $c \leq 0$ in $\bar{A}$. Dalla teoria delle equazioni ellittiche segue allora, come ben noto, il sussistere della ipotesi α_n) qualunque sia n. Ne segue:

Nell'ipotesi ammessa per c il problema D) *non può possedere più di una soluzione sommabile in* A [5].

È assai presumibile che tale teorema seguiti a sussistere anche prescindendo dalla ipotesi della sommabilità della u. Ciò infatti avviene quando A è un campo circolare e l'operatore ellittico a primo membro della (8) è quello di Laplace. Supponiamo per semplicità $r = 2$ e sia A il campo circolare unitario di centro l'origine del piano cartesiano. Sia ρ , θ un sistema di coordinate polari con centro l'origine. Per ogni intero $n \geq 0$, la classe delle funzioni armoniche reali $u(\rho , \theta)$, tali che per ogni w di classe n in $\bar{A}$ esista il

$$\lim_{\varrho \to 1} \int_0^{2\pi} u(\rho , \theta) w(\rho , \theta) \, d\theta ,$$

(4) E. Hille–R. S. Phillips, *Functional Analysis and Semi–Groups*, « Amer. Mat. Coll. Publ. », XXXI, p. 26.

(5) Si noti che tale teorema, per un *fissato n*, sussiste in ipotesi di maggiore generalità per i coefficienti dell'equazione e per Σ.

è caratterizzata dalla condizione che per ogni u di essa *la norma negativa di ordine n* di u, così definita

$$\mathfrak{M}_{-n}(\rho\,;u) = \sup_{v\in\mathfrak{D}_n} \frac{\left|\int_0^{2\pi} u(\rho,\theta)\,v(\theta)\,d\theta\right|}{\|v\|_n},$$

è funzione limitata di ρ in $(0,1)$. Si è posto $\|v\|_n = \max_{(0,2\pi)} \sum_{k=0}^{n} |v^{(k)}(\theta)|$. Detta $\mathfrak{A}_{-n}$ la classe delle funzioni armoniche in A per le quali $\mathfrak{M}_{-n}(\rho\,;u)$ è funzione limitata di ρ, sussiste il seguente teorema, dal quale facilmente discende la detta caratterizzazione, nonché l'esistenza e l'unicità per il problema D) nel caso particolare ora considerato.

La varietà $\mathfrak{A}_{-n}$ è linearmente isomorfa allo spazio $\mathfrak{D}_n^*$ e tale isomorfismo è fornito dalle trasformazioni:

$$u(\rho,\theta) = \frac{1}{2\pi} T_\tau\left[\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2-2\rho\cos(\tau-\theta)}\right] \qquad (0\le\rho<1) \quad (6) \tag{9}$$

$$\lim_{\rho\to 1}\int_0^{2\pi} u(\rho,\theta)\,w(\rho,\theta)\,d\theta = \langle T, w(1,\theta)\rangle \tag{10}$$

($w(\rho,\theta)$ di classe n in $\bar{A}$).

Se u è data da (9), riesce, come assai facilmente si verifica per ogni $v\in\mathfrak{D}_n$:

$$\int_0^{2\pi} u(\rho,\theta)\,v(\theta)\,d\theta = \frac{1}{2\pi} T\left[\int_0^{2\pi} v(\theta)\,\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2-2\rho\cos(\tau-\theta)}\,d\theta\right].$$

D'altra parte, essendo per $0\le h\le n$:

$$\lim_{\rho\to 1}\frac{\partial^h}{\partial\tau^h}\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} v(\theta)\,\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2-2\rho\cos(\tau-\theta)}\,d\theta =$$

$$\lim_{\rho\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v^{(h)}(\theta)\,\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2-2\rho\cos(\tau-\theta)}\,d\theta = v^{(h)}(\tau)$$

uniformemente rispetto a τ, segue

$$\lim_{\rho\to 1}\int_0^{2\pi} u(\rho,\theta)\,v(\theta)\,d\theta = \langle T, v\rangle.$$

Ne viene, oltre che il sussistere della (10), anche, per il principio di Banach–Steinhaus, la limitatezza della funzione di ρ: $\mathfrak{M}_{-n}(\rho\,;u)$, cioè l'appartenenza

(6) Il suffisso τ apposto a T indica che tale funzionale opera sul nucleo di Poisson in quanto funzione di τ.

di u ad $\mathfrak{A}_{-n}$. La (9) dà quindi un isomorfismo di $\mathfrak{D}_n^*$ in $\mathfrak{A}_{-n}$. Sia ora $u \in \mathfrak{A}_{-n}$. Esiste allora $T \in \mathfrak{D}_n^*$ e una successione crescente $\{\rho_n\}$ di numeri positivi convergente ad 1 tale che

$$\lim_{\rho_n \to 1} \int_0^{2\pi} u(\rho_n, \theta)\, v(\theta)\, d\theta = \langle T, v \rangle$$

per ogni $v \in \mathfrak{D}_n$ (7). Si ha, fissato il numero positivo $\rho < 1$, per $\rho_n > \rho$:

$$u(\rho, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\rho_n, \tau) \frac{\rho_n^2 - \rho^2}{\rho_n^2 + \rho^2 - 2\rho\rho_n \cos(\tau - \theta)}\, d\tau =$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\rho_n, \tau) \frac{\rho_n^2 - \rho^2}{\rho_n^2 + \rho^2 - 2\rho\rho_n \cos(\tau - \theta)}\, d\tau =$$

$$\frac{1}{2\pi} T_\tau \left[\frac{1 - \rho^2}{1 + \rho^2 - 2\rho\rho_n \cos(\tau - \theta)} \right].$$

Pertanto l'isomorfismo anzidetto è su $\mathfrak{A}_{-n}$ (8).

(7) Cfr. loc. cit. (4), p. 37.

(8) Questioni analoghe a quelle della presente Nota sono state considerate da G. CIMMINO, in *Una estensione dei teoremi di convergenza e di unicità nella teoria del problema generalizzato di Dirichlet* «Scritti matem. in onore di F. Sibirani», Bologna (1957); *Una nuova forma del teorema di unicità per la soluzione del problema generalizzato di Dirichlet*, «Atti Acc. Scienze dell'Ist. di Bologna» (1957); *Sulla totalità delle funzioni che in un dato campo verificano una equazione differenziale lineare omogenea*, «Atti Acc. Scienze dell'Ist. di Bologna» (1960). Cfr. anche M. PAGNI, *Un teorema di unicità per il problema di Cauchy relativo alle equazioni di tipo parabolico*, «Sem. Mat. e Fis. – Univ. Modena» (1960).

Analisi matematica. — *Un théorème d'unicité de la solution du problème de Cauchy pour certains systèmes d'équations linéaires aux dérivées partielles.* Nota di CIPRIAN FOIAŞ et GEORGE GUSSI, presentata (*) dal Socio M. PICONE.

Les théorèmes d'unicité de la solution du Problème de Cauchy pour les systèmes linéaires d'équations aux dérivées partielles exigent, ou bien l'analyticité des coefficients (théorèmes classiques de Cauchy–Kowalewsky, Holmgren) ou bien des conditions concernant les caractéristiques du système (I. G. Petrovsky [8], T. Carleman [2], J. Leray [5], L. Gårding [3], L. Nirenberg [7], A. Calderon [1], L. Hörmander [4]).

Pour cela un théorème d'unicité pour des systèmes d'équations aux dérivées partielles à coefficients non analytiques en l'ensemble des variables (mais qui sont en compensation des fonctions entières à croissance exponentielle d'ordre fini en les variables spatiales) en n'imposant aucune condition concernant les caractéristiques du système mérite d'être mentionné.

La méthode utilisée consiste en une adaptation de la méthode de Holmgren pour le cas où le système adjoint n'a pas nécessairement de solution. Elle est basée essentiellement sur les propriétés de la transformation de Fourier (théorème de Plancherel et de Paley–Wiener).

Considérons le système d'équations linéaires

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \sum_{j,k} a_{ij}^k(t,x)\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \sum_j a_{ij}^0(t,x)u_j + f_i(t,x) \tag{1}$$

$$(i,j = 1,2,\cdots,N\ ;\ k = 1,2,\cdots,n)$$

défini sur $[0,T]\times R^n$ et dont les coéfficients vérifient les hypothèses suivantes:

1° $a_{ij}^k(t,x)$ *sont mesurables en* (t,x) *et, pour chaque* $t\in[0,T]$ *sont des fonctions entières à croissance exponentielle de type tout au plus égal à* θ (θ fixe plus petit que ∞);

2° $\sup|a_{ij}^k(t,x)| = M(t)$ (le supremum étant pris par rapport à i,j,k et pour tout $x\in R^n$) *est à carré intégrable* (donc aussi intégrable sur $[0,T]$).

En ce qui concerne les fonctions $f_i(t,x)$ il suffit de les supposer localement intégrables.

Nous allons démontrer le

THÉORÈME. – *La solution (au sens de la théorie des distributions) du Problème de Cauchy pour le système* (1) *vérifiant les conditions 1°, 2°, 3° de ci–dessus est unique dans la classe des fonctions vérifiant*

$$\operatorname{vrai}\sup_{0\le t\le T}\int_{R^n}\left(|u(t,x)|^2 + \sum_{k=1}^n\left|\frac{\partial u(t,x)}{\partial x_k}\right|^2\right)dx < +\infty. \tag{2}$$

(*) Nella seduta del 10 dicembre 1960.

Démonstration. – Soit $\mathfrak{L}^2$ l'espace des vecteurs $\{u_1, u_2, \cdots, u_N\}$ tels que $u_j \in L^2(R^n)$ $(j = 1, 2, \cdots, N)$ muni de la norme usuelle, et soit $\mathfrak{L}^2_1$ le sous-espace de $\mathfrak{L}^2$ des vecteurs $\{u_1, \cdots, u_N\}$ dont les composantes vérifient en plus $\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \in L^2(R^n)$ $(j = 1, 2, \cdots, N)$, $k = 1, \cdots, n$. Soit $A(t)$ l'opérateur défini sur $\mathfrak{L}^2_1$, par

$$(A(t)u)_i = \sum_{j,k} a^k_{ij}(t, x) \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \sum_j a^\circ_{ij} u_j \qquad (i = 1, 2, \cdots, N).$$

Remarquons que tout vecteur $\{u_1, \cdots, u_N\}$ dont les composantes vérifient (2) est, considéré comme fonction vectorielle de t: $u(t) = \{u_1(t, \cdot), u_2(t, \cdot), \cdots \cdots, u_N(t, \cdot)\}$ à valeurs dans $\mathfrak{L}^2_1$ à l'exception d'un ensemble $\mathfrak{N}$ de mesure nulle, et que $\int_0^T \| u(t) \|^2 dt < \infty$. Il s'ensuit donc que $A(t)u(t)$ (pour $t \in \mathfrak{N}' \supset \mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}'$ de mesure nulle) a un sens et que $A(t)\mathfrak{L}^2_1 \subset \mathfrak{L}^2$. Calculons la norme de $A(t)u$ (pour $u \in \mathfrak{L}^2_1$). On trouve:

$$(3) \quad \|A(t)u\|^2 = \sum_{i=1}^N \int_{R^n} |(A(t)u)_i|^2 dx = \sum_{i=1}^N \int_{R^n} \left| \sum_{\substack{j=1,\cdots,N \\ k=1,\cdots,n}} a^k_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \sum_{j=1,\cdots,N} a^\circ_{ij} u_j \right|^2 dx$$

$$\leq M(t)^2 (Nn + N) N \sum_{j=1}^N \int_{R^n} \left(|u_j|^2 + \sum_k \left| \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right|^2 \right) dx$$

d'où l'on déduit que $\int_0^T \| A(t)u(t) \|^2 dt < \infty$. On voit aisément que $u(t)$ et $A(t)u(t)$ sont des fonctions fortement mesurables, en utilisant le fait qu'elles sont faiblement mesurables (ce qui résulte du théorème de Fubini) et que $L^2(R^n)$ est séparable. Donc $u(t)$ et $A(t)u(t)$ sont des fonctions de $L^2([0, T]; L^2(R^n))$, donc aussi des fonctions vectorielles intégrables sur $[0, T]$.

Soit $A^*(t)$ l'opérateur défini sur $\mathfrak{L}^2_1$ par l'adjoint formel de $A(t)$:

$$(A^*(t)v)_i = -\sum_{j,k} \bar{a}^k_{ij} \frac{\partial v_j}{\partial x_k} + \sum_j \left(\bar{a}^\circ_{ji} - \sum_k \frac{\partial \bar{a}^k_{ji}}{\partial x_k} \right) x_j .$$

De [6] on déduit que les coéfficients de l'adjoint formel $A^*(t)$ vérifient une condition analogue à 2°, où $M(t)$ et remplacée par $M_1(t) = (1 + \theta) M(t)$.

L'opérateur $A^*(t)$ est donc un opérateur linéaire (vu la condition (3) correspondant à $A^*(t)$) défini sur $\mathfrak{L}^2_1$ et à valeurs dans $\mathfrak{L}^2$, à l'exception d'un ensemble de mesure nulle (sur lequel $M_1(t) = \infty$)). En plus, pour tout t qui n'appartient pas à cet ensemble on a

$$(4) \qquad (A(t)u, v) = (u, A^*(t)v)$$

quels que soient $u, v \in \mathfrak{L}^2_1$. En effet, pour $u, v \in \overset{N}{\underset{1}{X}} C^\infty_0(R^n)$ cela résulte par intégration par parties. Dans le cas général, (4) résulte du fait bien connu que si $u \in \mathfrak{L}^2_1$, il y a une suite $\{u_p\} \subset \overset{N}{\underset{1}{X}} C^\infty_0(R^n)$ telle que $u_p \to u$ et $\frac{\partial u_p}{\partial x_k} \to \frac{\partial u}{\partial x_k}$ dans $\mathfrak{L}^2$.

Pour démontrer l'unicité de la solution du Problème de Cauchy (au sens des distributions) pour le système (1) considérons les sous-espaces de $\mathfrak{L}^2$ définis comme il suit: $\mathcal{E}_q$ est l'espace des $u \in \mathfrak{L}^2$ tels que leurs composantes u_j sont des fonctions entières, à croissance exponentielle, de type tout au plus égal à $q\theta$.

En utilisant la transformation de Fourier, et les théorèmes de Plancherel et de Paley–Wiener on voit sans peine que $\bigcup_{q=1}^{\infty} \mathcal{E}_q$ est dense dans $\mathfrak{L}^2$, que chaque $\mathcal{E}_q$ est un espace de Hilbert invariant par rapport aux dérivations $\frac{\partial}{\partial x_k}$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$ et que la norme (dans $\mathfrak{L}^2$) de chacun de ces opérateurs est, dans $\mathcal{E}_q$, plus petite que $q\theta$.

L'opérateur $A^*(t)$ jouit des propriétés suivantes (relatives à $\mathcal{E}_q$):

(i) $A^*(t)\,\mathcal{E}_q \subset \mathcal{E}_{q+1}$

(ii) $A^*(t)$ considéré dans $\mathcal{E}_q$ est borné et de norme plus petite que

$$M_1(t)\sqrt{(N_n + N)\,N}\sqrt{1 + nq^2\theta^2} \leq M_1(t)\,qK$$

(iii) Si $v(t)$ est une fonction continue à valeurs dans $\mathcal{E}_q$ alors $A^*(t)\,v(t)$ est une fonction intégrable (à valeurs dans $\mathcal{E}_{q+1}$).

En effet (i) résulte du fait que $(A^*(t)\,u)_i$ est du type exponentiel de croissance tout au plus égal à $(1+q)\,\theta$ (en vertu de l'hypothèse 1°) ce qui par définition signifie que $A^*(t)\,u$ appartient à $\mathcal{E}_{q+1}$; (ii) résulte de (3) et du fait que dans $\mathcal{E}_q$ la norme des opérateurs $\partial/\partial x_k$ est plus petite que $q\theta$.

Enfin, pour démontrer (iii) remarquons que si $v(t)$ est continue à valeurs dans $\mathcal{E}_q$ alors $v(t) \in L^2([0, T]; \mathfrak{L}^2)$ d'où il résulte que chaque composante $v_j(t, x)$, comme fonction de t à valeurs dans $L^2(R^n)$, appartient à $L^2([0, T)]$; $L^2(R^n)) = L^2([0, T] \times R^n)$, donc chaque $v_j(t, x)$ est mesurable en (t, x), d'où, par le théorème de Fubini, il résulte que la fonction $A^*(t)\,v(t)$ (en t) à valeurs dans $\mathfrak{L}^2$ est faiblement mesurable, ce qui implique, comme nous l'avons déja remarqué, que $A^*(t)\,v(t)$ est fortement mesurable; d'après (ii) elle est majorée par une fonction intégrable sur $[0, T]$, donc elle-même est intégrable sur $[0, T]$.

Soit $u(t, x) = \{u_1(t, x), \cdots, u_N(t, x)\}$ une solution du Problème de Cauchy de (1) (à données $u(0, x) = \{u_1(x), \cdots, u_N(x)\}$) au sens de la théorie des distributions. Rappelons que cela signifie que $u(t, x)$ est nulle pour $t < 0$ et que pour tout $\varphi(t, x) = \{\varphi_1(t, x), \varphi_2(t, x), \cdots, \varphi_N(t, x)\}$, $\varphi_j(t, x) \in C_0^\infty(I)$ (espace des fonctions indéfiniment dérivables à support compact contenu dans $I = (-\infty, T) \times R^n$) $u(t, x)$ vérifie:

$$-\int_I\int u_i(t, x)\,\frac{\partial}{\partial t}\,\overline{\varphi}_i(t, x)\,dt\,dx = -\sum_{j,k}\int_I\int u_i(t, x)\,\tilde{a}_{ji}^k\,\frac{\partial\overline{\varphi}_j}{\partial x_k}\,dt\,dx$$

$$+\sum_j\int_I\int u_j(t, x)\left(a_{ji}^0 - \sum_k \frac{\partial \tilde{a}_{ji}^k}{\partial x_k}\right)\overline{\varphi}_j\,dt\,dx + \int_{R^n} u_i(0, x)\,\overline{\varphi}_i(0, x)\,dx + \int_I\int f_i(t, x)\,\overline{\varphi}_i\,dt\,dx$$

pour $i = 1, 2, \cdots, N$.

Cela peut s'écrire sous forme condensée

$$(5) \quad -\int_{-\infty}^{T}(u(t),\varphi'(t))\,dt=\int_{-\infty}^{T}(u(t),A^*(t)\varphi(t))\,dt+\int_{-\infty}^{T}(f(t),\varphi(t))\,dt+(u(0),\varphi(0))$$

(on utilise la remarque que $\{\partial\varphi_i/\partial t\}_{i=1,\dots,N}$ est en fait la dérivée en t de la fonction vectorielle $t\to\{\varphi_i(t,x)\}$ à valeurs dans $\mathfrak{L}^2$).

Si $u_1(t)$ et $u_2(t)$ sont deux solutions vérifiant (2) de (5) telles que $u_1(0)=u_2(0)$ et si on pose $U(t)=u_1(t)-u_2(t)$ alors $U(t)$ vérifie

$$(6) \quad -\int_{-\infty}^{T}(U(t),\varphi'(t))\,dt=\int_{-\infty}^{T}(U(t),A^*(t)\varphi(t))\,dt=\int_{-\infty}^{T}(A(t)U(t),\varphi(t))\,dt$$

avec $U(t)=0$ pour $t<0$.

Considérons la fonction

$$V(t)=\int_{-\infty}^{t}A(\tau)U(\tau)\,d\tau.$$

Évidemment, $V(t)=0$ pour $t<0$. Montrons que $U(t)=V(t)$. Pour cela remarquons qu'il suffit de montrer que $(V(t),\varphi)=(U(t),\varphi)$ pour tout φ parcourant un ensemble dense dans $\mathfrak{L}^2$. Soit donc $\varphi(t)=\psi(t)\varphi=\{\psi(t)\varphi,(x),\cdots,\psi(t)\varphi_N(x)\}$ avec $\psi(t)\in C_0^\infty((-\infty,T))$ et $\varphi_j(x)\in C_0^\infty(R^n)$ $(j=1,2,\cdots,N)$. Alors.

$$\int_{-\infty}^{T}(V(t),\varphi)\psi'(t)\,dt=\int_{-\infty}^{T}\Big(\int_{-\infty}^{t}(A(\tau)U(\tau),\varphi)\,d\tau\Big)\psi'(t)\,dt=$$

$$-\int_{-\infty}^{T}\int_{-\infty}^{T}\chi_{(-\infty,t)}(\tau)(A(\tau)U(\tau),\varphi)\psi'(t)\,d\tau\,dt=\int_{-\infty}^{T}(A(\tau)U(\tau),\varphi)\Big(\int_{\tau}^{T}\psi'(t)\,dt\Big)\,d\tau=$$

$$-\int_{-\infty}^{T}(A(\tau)U(\tau),\varphi)\psi(\tau)\,d\tau$$

($\chi_{(-\infty,t)}$ étant la fonction caractéristique de l'intervalle $(-\infty,t)$).

Mais (6), avec $\varphi(t)=\psi(t)\varphi$, donne

$$-\int_{-\infty}^{T}(A(t)U(t),\varphi)\psi(t)\,dt=\int_{-\infty}^{T}(U(t),\varphi)\psi'(t)\,dt$$

donc

$$\int_{-\infty}^{T}(V(t),\varphi)\psi'(t)\,dt=\int_{-\infty}^{T}(U(t),\varphi)\psi'(t)\,dt$$

quel que soit $\psi \in C_0^\infty((-\infty, t))$ ce qui donne $\frac{d}{dt}(V(t), \varphi) = \frac{d}{dt}(U(t), \varphi)$ (les dérivations étant faites au sens des distributions) d'où, en tenant compte de $U(t) = V(t) = 0$ pour $t < 0$ on a $(U(t), \varphi) = (V(t), \varphi)$ pour tout $t \in (\infty, T)$ et $\varphi \in \overset{N}{\underset{1}{X}} C_0^\infty(R^n)$; l'ensemble de ces φ étant dense dans $\mathfrak{L}^2$ on a donc

$$U(t) = \int_0^t A(\tau) U(\tau) \, d\tau \qquad (0 \leq t \leq T). \tag{7}$$

On peut passer maintenant à la démonstration proprement dite de l'unicité.

Supposons que l'on a déjà démontré que $u(t) = 0$ pour $t \leq t_0$. On peut donc écrire

$$U(t) = \int_{t_0}^t A(\tau) U(\tau) \, d\tau \qquad \text{pour} \quad t \geq t_0. \tag{7'}$$

Soit w_1 un élément arbitraire de $\mathcal{E}_{q_1}$; posons $w_1(t) = w_1$ et par récurrence

$$w_{p+1}(t) = w_1 - \int_{t_1}^t A^*(\tau) w_p(\tau) \, d\tau \qquad p = 2, 3, \cdots \tag{8}$$

(Les intégrales ont sens en vertu de (iii)). Alors, en utilisant (4), (7') et (8) on a

$$(U(t_1), w_1) = \int_{t_0}^{t_1} (A(t) U(t), w_1) \, dt = \int_{t_0}^{t_1} (U(t), A^*(t) w_1) \, dt =$$

$$\int_{t_0}^{T} \int_{t_0}^{t_1} \chi_{(t_0, t)}(\theta) (A(\theta) U(\theta), A^*(t) w_1) \, dt \, d\theta = \int_{t_0}^{t_1} (A(\theta) U(\theta), \int_{\theta}^{t_1} A^*(t) w_1 \, dt) \, d\theta =$$

$$\int_{t_0}^{t_1} (A(t) U(t), w_2(t) - w_1(t)) \, dt = \int_{t_0}^{t_1} (U(t), A^*(t)(w_2(t) - w_1(t))) \, dt =$$

$$\int_{t_0}^{t_1} x_{(t_0, t)}(\theta) (A(\theta) U(\theta), A^*(t)(w_2(t) - w_1(t))) \, dt \, d\theta = \cdots =$$

$$\int_{t_0}^{t_1} (A(t) U(t), w_{p+1}(t) - w_p(t)) \, dt \qquad p = 2, 3, \cdots$$

et par suite

$$|(U(t_1), w_1)| \leq \left(\int_{t_0}^{t_1} |A(t) U(t)|^2 \, dt \right)^{1/2} \left(\int_{t_0}^{t_1} |w_{p-1}(t) - w_p(t)|^2 \, dt \right)^{1/2} \tag{9}$$

$$\leq \left(\int_0^T |A(t) U(t)|^2 \, dt \right)^{1/2} T^{1/2} \sup_{t_0 \leq t \leq t_1} \| w_{p+1}(t) - w_p(t) \|.$$

Maintenant, remarquons que l'on a

$$(10) \qquad \| w_{p+1}(t) - w_p(t) \| \leq K^p \frac{(p+q_1-1)\cdots q_1}{p!} \left(\int_t^{t_1} M_1(\tau)\, d\tau \right)^p \quad t_0 \leq t \leq t_1.$$

En effet, en vertu de (ii) cette relation est vraie pour $p = 1$. En supposant qu'elle est vraie pour $p = m$, en tenant compte encore une fois de (*ii*), on déduit de (8):

$$\| w_{m+1}(t) - w_m(t) \| \leq K^m \frac{(m+q_1-1)\cdots q_1}{(m-1)!} \int_t^{t_1} M_1(\tau) \left(\int_\tau^{t_1} M_1(\theta)\, d\theta \right)^{m-1} d\tau =$$

$$K^m \frac{(m+q_1-1)\cdots q_1}{m!} \left(\int_t^{t_1} M(\tau)\, d\tau \right)^m$$

et la relation (10) est prouvée.

Il résulte de (9) et de (10) que

$$(11) \qquad | (U(t_1), w_1) | \leq C(T, U) K^p \frac{(p+q_1-1)\cdots q_1}{p!} \left(\int_{t_0}^{t_1} M_1(\tau)\, d\tau \right)^p$$

quel que soit $p = 1, 2, \cdots$. Mais en vertu de la continuité absolue de l'intégrale indéfinie il résulte qu'il y a un $\varepsilon > 0$ ne dépendant pas de t_0, tel que pour $0 < t_1 - t_0 < \varepsilon$ le membre droit de (11) tende vers zéro. Par conséquent $(U(t_1), w_1) = 0$ quel que soit $w_1 \in \mathcal{E}_{q_1}$, q_1 étant arbitraire. Comme $\bigcup_q \mathcal{E}_q$ est dense dans $\mathfrak{L}^2$, $U(t_1) = 0$ dès que $t_1 - t_0 < \varepsilon$, donc $U(t) \equiv 0$ pour $0 \leq t \leq t_0 + \varepsilon$; et l'on voit immédiatement $U(t) \equiv 0$ sur $[0, T]$.

Bibliographie.

[1] A. P. Calderon, *Uniqueness in the Cauchy Problem for partial differential equations*, « Am. J. Math. », *80*, 16–36 (1958).

[2] T. Carleman, *Sur un problème d'unicité pour les systèmes d'équations aux dérivées partielles à deux variables indépendantes*, « Ark. Mat. Astr. Fys. », *26 B*, 1–9 (1939).

[3] L. Gårding, *Solution directe du Problème de Cauchy pour les équations hyperboliques*, « Colloque CNRS Nancy », 71–89 (1956).

[4] L. Hörmander, *On the uniqueness of the Cauchy Problem*, « Math. Scand. », *6*, 213–225 (1958).

[5] J. Leray, *Hyperbolic differential Equations*, Princeton 1954.

[6] S. M. Nikolski, *Inégalites pour les fonctions entiéres d'ordre fini et leurs applications à la thèorie des fonctions dérivables en plusieurs variables* (en russe), « Trudy Mat. Inst. Steklov », *38*, 244–218 (1951).

[7] L. Nirenberg, *Uniqueness in Cauchy's problem for differential equations with constant leading coefficient*, « Comm. Pure Appl. Math. », *10* 89–105 (1957).

[8] L. G. Petrowsky, *Ueber das Cauchysche Problem für Systeme von partiellen differential Gleichungen*, « Mat. Sb. », N. S., *2*, 814–868 (1937).

Analisi matematica. — *Sopra il problema dell'approssimazione delle curve in forma parametrica e degli integrali.* Nota di SILVIO CINQUINI, presentata (*) dal Socio G. SANSONE.

È ben noto sia il problema (1) dell'approssimazione simultanea, mediante funzioni continue assieme alle loro derivate del primo ordine, di una funzione assolutamente continua

$$(a) \qquad y = y(x), \qquad (a \leq x \leq b),$$

e dell'integrale (supposto che esista finito (2))

$$(b) \qquad \int_a^b f(x, y(x), y'(x))\, dx,$$

sia il fatto che, a motivo del fenomeno rilevato da M. Lavrentieff, tale problema (a prescindere dal caso in cui $y(x)$ soddisfa a una condizione di Lipschitz) ammette soluzione soltanto sotto opportune ipotesi per la funzione f.

Né ci soffermiamo sul caso, in cui la funzione (a) è assolutamente continua insieme con le sue derivate dei primi $r-1$ ordini e l'integrale (b) dipende dalle derivate di ordine non superiore a r.

D'altra parte, se la curva (a) è posta sotto forma parametrica (3)

$$C: \qquad x = x(s), \quad y = y(s), \qquad (0 \leq s \leq L),$$

essendo $|x'(s)| \leq 1$, $|y'(s)| \leq 1$, si perviene, come è noto, alla simultanea approssimazione di tale curva e dell'integrale

$$\int_0^L F(x(s), y(s), x'(s), y'(s))\, ds$$

in modo rapidissimo e sotto condizioni del tutto generali per la funzione F mediante un'immediata applicazione del teorema di integrazione per serie di Arzelà-Lebesgue.

Di maggior rilievo, sempre nell'ipotesi che la curva sia data sotto forma parametrica, è il caso in cui l'integrale da approssimare dipende da elementi differenziali di ordine superiore. In questo problema, che non ci risulta sia

(*) Nella seduta del 10 dicembre 1960.

(1) Per ragioni di spazio i riferimenti bibliografici verranno dati nel lavoro, di imminente pubblicazione, citato in (5).

(2) Nella presente Nota l'integrazione va intesa nel senso di Lebesgue.

(3) In tutta la presente Nota il parametro s rappresenta la lunghezza dell'arco rettificato.

mai stato preso in considerazione, da un lato si ripresentano gli ostacoli citati nel caso della forma ordinaria e che traggono origine dal fenomeno di Lavrentieff, e d'altra parte emergono nuove difficoltà, che vogliamo illustrare.

A tal uopo consideriamo, fino ad avviso contrario, una curva dello spazio

$$(c) \qquad x = X(t) \quad , \quad y = Y(t) \quad , \quad z = Z(t) \, , \qquad (a \leq t \leq b),$$

ove le funzioni $X(t)$, $Y(t)$, $Z(t)$ sono assolutamente continue insieme con le loro derivate del primo ordine e ricordiamo [4] la condizione, affinché un integrale curvilineo, esteso alla curva (c) e dipendente dalle derivate dei primi due ordini, non dipenda dal parametro t: la funzione integranda deve dipendere dalle coordinate del punto della curva (c), dalle loro derivate prime e dalle espressioni $\lambda : R$, $\mu : R$, $\nu : R$ (ove $1 : R$ è la flessione, e λ, μ, ν sono i coseni direttori della binormale) e deve essere positivamente omogenea di grado uno rispetto a x', y', z'; pertanto anche nel caso, in cui, per semplicità, si assume come parametro l'arco rettificato, la risoluzione del problema in questione implica l'approssimazione delle espressioni

$$\frac{\lambda}{R} = y'(s) z''(s) - y''(s) z'(s) \quad , \quad \frac{\mu}{R} = z' x'' - z'' x' \quad , \quad \frac{\nu}{R} = x' y'' - x'' y',$$

le quali (salvo casi particolari) non sono limitate, non sono funzionali additivi e nemmeno derivate esatte.

Messe in luce le difficoltà che presenta il problema in questione, il quale dà adito a un ampio campo di indagine e la cui trattazione, nel caso delle curve dello spazio, forma oggetto di un più ampio lavoro [5], nella presente Nota vogliamo risolvere il problema nel caso in cui la curva (c) è piana

$$C: \qquad x = x(s) \quad , \quad y = y(s) \, , \qquad (0 \leq s \leq L):$$

allora [6] l'integrale da approssimare è

$$\int_0^L F(x(s), y(s), x'(s), y'(s), \theta'(s)) \, ds \, ,$$

ove la funzione $F(x, y, x', y', \theta')$ è positivamente omogenea di grado uno rispetto alle variabili x', y'; $\theta(s)$ è l'angolo di direzione della curva C e quindi $\theta'(s) = x' y'' - x'' y'$ è la curvatura.

In questo caso si perviene, in modo rapido e originale, a un risultato di notevole generalità (n. 2): ciò dipende dal fatto che delle curve approssi-

(4) S. CINQUINI, *Sopra i fondamenti di una classe di problemi variazionali*, « Rend. Circolo Matematico di Palermo », T. VI (1957), pp. 271–288. In particolare § 2.

(5) S. CINQUINI, *Sopra il problema dell'approssimazione delle curve dello spazio e degli integrali*. In tale lavoro, che apparirà negli « Annali di Matematica », si dedurrà, come caso particolare, qualche altro contributo al problema considerato nelle presenti righe.

(6) Cfr. S. CINQUINI, *Sopra i problemi variazionali in forma parametrica dipendenti dalle derivate di ordine superiore*, « Annali Scuola Normale Superiore di Pisa », vol. XIII (1944), [1947], pp. 19–49.

manti si può dare una semplice rappresentazione parametrica mediante l'arco rettificato, la quale trae origine dall'idea di approssimare l'angolo di direzione della curva C [7].

1. UN TEOREMA PRELIMINARE. – *Sia*

$$\mathrm{C}: \qquad x = x(s) \quad , \quad y = y(s), \qquad (0 \leq s \leq \mathrm{L})$$

una curva definita da due funzioni assolutamente continue insieme con le loro derivate del primo ordine $x'(s)$, $y'(s)$, *e sia* $\Phi_0(\theta')$, $(-\infty < \theta' < +\infty)$ *una funzione continua, non negativa e convessa secondo Jensen, tale che esista finito l'integrale*

$$(1) \qquad \int_0^{\mathrm{L}} \Phi_0(\theta'(s))\, ds\,,$$

ove $\theta'(s)$ *è la curvatura della curva* C.

Allora è possibile determinare almeno una successione di curve $(n = 1, 2, \cdots)$

$$\mathrm{C}_n: \qquad x = x_n(s) \quad , \quad y = y_n(s), \qquad (0 \leq s \leq \mathrm{L}),$$

definite da funzioni continue assieme alle loro derivate dei primi due ordini, in modo che tale successione tenda uniformemente alla curva C *e che sia*

$$(2) \qquad \lim_{n \to \infty} \int_0^{\mathrm{L}} \Phi_0(\theta_n'(s))\, ds = \int_0^{\mathrm{L}} \Phi_0(\theta'(s))\, ds\,,$$

ove $\theta_n'(s)$ *è la curvatura di* C_n.

Infatti, tenuto presente che è $x'(s) = \cos\theta(s)$, $y'(s) = \operatorname{sen}\theta(s)$, vale a dire che le equazioni della curva C si possono scrivere sotto la forma

$$x = x(0) + \int_0^s \cos\theta(t)\, dt \quad , \quad y = y(0) + \int_0^s \operatorname{sen}\theta(t)\, dt\,, \quad (0 \leq s \leq \mathrm{L}),$$

completiamo la definizione della funzione $\theta(s)$ ponendo

$$\theta(s) = \theta(0)\,, \text{ per } s < 0 \quad ; \quad \theta(s) = \theta(\mathrm{L})\,, \text{ per } s > \mathrm{L}\,;$$

e, posto $h_n = 1 : n$, consideriamo per $n = 1, 2, \cdots$ la funzione

$$(3) \qquad \theta_n(s) = \frac{1}{2h_n} \int_{-h_n}^{h_n} \theta(s+\xi)\, d\xi\,, \qquad (0 \leq s \leq \mathrm{L})\,,$$

(7) Per quanto riguarda le generalità rinviamo al lavoro cit. in [6], § 1, nn. 1–3, pp. 21–24.

rilevando che essa risulta continua assieme alla propria derivata del primo ordine

$$\theta'_n(s) = \frac{1}{2h_n}\int_{-h_n}^{h_n} \theta'(s+\xi)\,d\xi,$$

e definiamo la successione di curve $(n = 1, 2, \cdots)$ [8]

$$C_n: \quad x = x_n(s) \equiv x(0) + \int_0^s \cos\theta_n(t)\,dt\ ,\ y = y_n(s) \equiv y(0) + \int_0^s \operatorname{sen}\theta_n(t)\,dt, \quad (0 \leq s \leq L),$$

È evidente che le funzioni $x_n(s), y_n(s)$ sono continue assieme alle proprie derivate dei primi due ordini, e che, essendo $x'^2_n(s) + y'^2_n(s) = \cos^2\theta_n(s) + \operatorname{sen}^2\theta_n(s) = 1$, il parametro s rappresenta, su ogni curva C_n, il rispettivo arco rettificato.

Inoltre, siccome dalla (3) si trae in modo immediato $\lim_{n\to\infty} |\theta_n(s) - \theta(s)| = 0$ uniformemente in tutto $(0, L)$, segue

$$(4) \quad \lim_{n\to\infty} x_n(s) = x(s)\ ,\ \lim_{n\to\infty} y_n(s) = y(s)\ ,\ \lim_{n\to\infty} x'_n(s) = x'(s)\ ,\ \lim_{n\to\infty} y'_n(s) = y'(s)$$

in modo uniforme in tutto $(0, L)$.

D'altra parte, siccome dalla (3) risulta in quasi tutto (O, L)

$$(5) \qquad \lim_{n\to\infty} \theta'_n(s) = \theta'(s)$$

e quindi anche $\lim_{n\to\infty} \Phi_0(\theta'_n(s)) = \Phi_0(\theta'(s))$, per provare l'asserto basta dimostrare che gli integrali $\int \Phi_0(\theta'_n(s))\,ds$, $(n = 1, 2, \cdots)$ sono equiassolutamente continui in (O, L).

Dall'ipotesi, che l'integrale (1) esiste finito, segue in modo ovvio che la funzione $\Phi_0(\theta'(s))$ risulta integrabile sull'intervallo $(-1, L+1)$, e pertanto, preso $\varepsilon > 0$ ad arbitrio, è possibile subordinare un $\eta > 0$ in modo che, se δ'_j, $(j = 1, 2, \cdots, r)$ è un numero qualunque di intervalli di $(-1, L+1)$ a due distinti e di lunghezza complessiva minore di η, sia

$$(6) \qquad \sum_{j=1}^{r} \int_{\delta'_j} \Phi_0(\theta'(s))\,ds < \varepsilon.$$

Ciò premesso, se δ_j, $(j = 1, 2, \cdots, r)$ è un qualunque numero di intervalli di (O, L) a due a due distinti e di lunghezza complessiva minore di η, in virtù della disuguaglianza di Jensen risulta

$$\sum_{j=1}^{r} \int_{\delta_j} \Phi_0(\theta'_n(s))\,ds = \sum_{j=1}^{r} \int_{\delta_j} \Phi_0\left(\frac{1}{2h_n}\int_{-h_n}^{h_n} \theta'(s+\xi)\,d\xi\right) ds \leq \sum_{j=1}^{r} \int_{\delta_j} ds\, \frac{1}{2h_n}\int_{-h_n}^{h_n} \Phi_0(\theta'(s+\xi))\,d\xi\,,$$

(8) È ovvio che, soltanto per fissare le idee, scegliamo $x_n(0) = x(0)$, $y_n(0) = y(0)$, ma che sussiste un'opportuna arbitrarietà.

e anche, siccome $\Phi_0(\theta') \geq 0$, in virtù del noto teorema di Fubini Tonelli e usufruendo della (6)

$$\sum_{j=1}^{r} \int_{\delta_j} \Phi_0(\theta'_n(s))\, ds \leq \frac{1}{2h_n} \int_{-h_n}^{h_n} d\xi \sum_{j=1}^{r} \int_{\delta_j} \Phi_0(\theta'(s+\xi))\, ds < \varepsilon .$$

Per quanto abbiamo detto, la (2) è così provata.

2. TEOREMA. – $F(x, y, x', y', \theta')$ *sia una funzione definita e continua per ogni* (x, y) *del campo* A, *per ogni coppia di numeri* x', y' *non entrambi nulli e per ogni valore finito di* θ', *e positivamente omogenea di grado uno rispetto a* x', y'.

Ferma restando l'ipotesi del n. 1, *supponiamo che la curva* C *sia tutta costituita di punti interni al campo* A *e che esista finito l'integrale*

$$\int_0^L F(x(s), y(s), x'(s), y'(s), \theta'(s))\, ds . \tag{7}$$

Inoltre supponiamo che si possano determinare una funzione $\Phi(\theta')$, $(-\infty < \theta' < +\infty)$ *continua e convessa secondo Jensen e quattro numeri* $\Lambda_1 > 0, \Lambda_2 > 0$, $\Lambda'_1 > 0, \Lambda'_2$ *in modo che risulti*

$$\Lambda'_1 \Phi(\theta') + \Lambda'_2 \leq F(x, y, x', y', \theta') \leq \Lambda_1 \Phi(\theta') + \Lambda_2 \tag{8}$$

in tutti i punti (x, y) *del campo* A, *per ogni coppia* x', y' *con* $x'^2 + y'^2 = 1$ *e per qualunque valore finito di* θ'.

Allora è possibile determinare almeno una successione di curve C_n, *soddisfacenti alle condizioni del n.* 1 *e tali che sia*

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^L F(x_n(s), y_n(s), x'_n(s), y'_n(s), \theta'_n(s))\, ds = \int_0^L F(x(s), y(s), x'(s), y'(s), \theta'(s))\, ds.$$

Infatti, considerate le curve C_n, $(n = 1, 2, \cdots)$ definite al n. 1, sia n_0 un intero non negativo, tale che, per ogni $n > n_0$, la curva C_n sia tutta costituita di punti appartenenti al campo A.

Siccome $\Phi(\theta')$ è convessa secondo Jensen, si possono determinare due numeri k_0, k_1, in modo che in tutto $(-\infty, +\infty)$ sia

$$\Phi(\theta') \geq k_0 + k_1 \theta' ; \tag{9}$$

allora, posto

$$\Phi_0(\theta') = \Phi(\theta') - k_0 - k_1 \theta', \tag{10}$$

dalla (8) segue:

$$0 \leq \Phi_0(\theta') \leq \frac{1}{\Lambda'_1} F(x, y, x', y', \theta') - \frac{\Lambda'_2}{\Lambda'_1} - k_0 - k_1 \theta',$$

ove $\Phi_0(\theta')$ soddisfa alle ipotesi del n. 1. Pertanto, siccome l'integrale (7) esiste finito, di tale proprietà gode anche l'integrale (1), e, per quanto si è visto al n. 1, gli integrali $\int \Phi_0(\theta'_n(s))\,ds$, $(n = n_0 + 1, n_0 + 2, \cdots)$ sono equiassolutamente continui in (O, L). Allora, siccome dalla (8) in virtù delle (9) e (10) risulta

$$\Lambda'_1(k_0 + k_1\theta') + \Lambda'_2 \leq F(x, y, x', y', \theta') \leq \Lambda_1\Phi_0(\theta') + \Lambda_1(k_0 + k_1\theta') + \Lambda_2,$$

e quindi anche

$$|F(x, y, x', y', \theta')| \leq \Lambda_1\Phi_0(\theta') + (\Lambda_1 + \Lambda'_1)(|k_0| + |k_1||\theta'|) + \Lambda_2 + |\Lambda'_2|,$$

si conclude facilmente che anche gli integrali

$$\int F(x_n(s), y_n(s), x'_n(s), y'_n(s), \theta'_n(s))\,ds, \quad (n = n_0 + 1, n_0 + 2, \cdots)$$

sono equiassolutamente continui in (O, L), e, tenute presenti le (4) e (5), come al n. 1 segue l'asserto.

3. Esempi. – Alle condizioni del numero precedente soddisfano le seguenti funzioni:

1°) $$F \equiv \sqrt{x'^2 + y'^2}\,(\theta'^4 - 8\theta'^2 + 1).$$

Infatti, essendo

$$\frac{3}{4}\theta'^4 - 63 \leq F \leq \theta'^4 + 1,$$

basta assumere $\Phi(\theta') = \theta'^4$.

2°) $$F \equiv \sqrt{x'^2 + y'^2}\,e^{\theta'^5 - \theta'^3}.$$

Infatti, definita

$$\Phi(\theta') = e^{\theta'^5 - \theta'^3}, \text{ per } \theta' \geq 1 \quad ; \quad \Phi(\theta') = 1, \text{ per } \theta' < 1,$$

risulta

$$\Phi(\theta') - 1 < F < \Phi(\theta') + 1.$$

Idrodinamica. — *Sul moto uniforme turbolento delle correnti liquide* (*). Nota II di ENRICO MARCHI, presentata (**) dal Corrisp. G. SUPINO.

SEZIONI DI FORMA QUALUNQUE: DISTRIBUZIONE DELLA VELOCITÀ.

1. Il trasferimento allo studio del moto uniforme turbolento entro condotti di sezione qualunque dei risultati ottenuti nei condotti circolari è stato oggetto di diverse ricerche, fra le quali particolarmente notevoli quelle di Nikuradse [1,2] su sezioni chiuse e di Keulegan [3] su sezioni aperte.

Alla base di questi procedimenti sta l'ipotesi di una distribuzione logaritmica di velocità lungo ogni normale al contorno, in funzione del valore della tensione tangenziale τ_0 al piede della normale considerata. In formule

$$\frac{u}{u_*} = \bar{a} + b \log\left(\frac{y}{y_0}\right) \tag{1_2}$$

con $\bar{a}$ funzione del numero di Reynolds (regime di tubo liscio) o della scabrezza relativa (regime di tubo scabro), ritenuta quindi *costante* in uno stesso condotto per assegnate condizioni di moto, b costante universale (uguale a 5,75), e $u_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$ *variabile* da punto a punto del contorno in maniera a priori incognita.

L'osservazione sperimentale non ha confermato queste ipotesi [4]. Essa giustifica piuttosto i risultati dell'interpretazione che esponiamo nei numeri seguenti.

2. Indichiamo con u' la componente della velocità di agitazione turbolenta nella direzione x del condotto, e con v' la componente nella direzione y normale alla parete più vicina al punto in esame. Considerazioni elementari sul « trasporto della quantità di moto » dimostrano che la tensione turbolenta (di Reynolds) agente nella direzione x sull'elemento di superficie perpendicolare a y vale

$$\tau = -\rho\, \overline{u'\, v'}. \tag{2_2}$$

(*) Ricerca eseguita nell'Istituto di Idraulica di Bologna con il contributo del C.N.R.

(**) Nella seduta del 19 novembre 1960.

(1) J. NIKURADSE, *Untersuchungen über die Geschwindigkeitverteilung in turbulenten Strömungen*, « V. D. I. Forschungsarb », 281 (1926).

(2) J. NIKURADSE, *Untersuchungen über turbulente Strömungen in nicht kreisförmigen Rohren*, « Ing. Archiv. », p. 307 (1930).

(3) G. H. KEULEGAN, *Laws of turbulent flow in open channels*, « J. of Res. of Nat. Bur. of Standards », vol. 21, p. 707 (1938).

(4) A. GHETTI, *Distribuzione della velocità all'interno e sforzi di scorrimento al contorno nelle correnti a regime uniforme*, « L'En. Elett. », n. 3. p. 290 (1957).

Riteniamo trascurabile la tensione viscosa in tutto il campo esterno allo strato laminare: la (2_2) rappresenta quindi la tensione tangenziale agente su una superficie di traccia γ, distante costantemente y dalla parete (fig. 1).

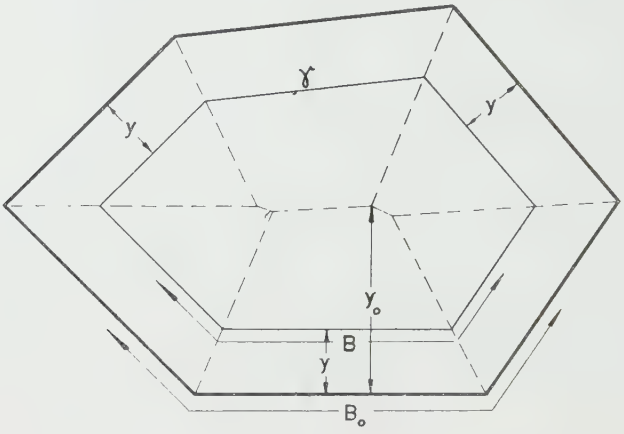


Fig. 1.

Le interpretazioni teoriche che abbiamo prima richiamato presuppongono la variabilità della tensione τ, considerata nel suo valor medio temporale, da punto a punto di γ. È su questa posizione che il nostro procedimento differisce dai precedenti.

Le indicazioni sperimentali hanno provato l'identità di comportamento, agli effetti della distribuzione della velocità, delle pareti piane dei condotti rettangolari larghissimi e delle pareti curve dei condotti circolari. Generalizzando, ciò induce a ritenere che il moto di agitazione turbolenta, nel nucleo della corrente (escluso cioè il film laminare), sia mediamente lo stesso ad ugual distanza dalla parete, indipendentemente dalla forma di quest'ultima. Ossia che la funzione di correlazione $\overline{u' v'}$ dipenda soltanto dalla distanza y, almeno in prima approssimazione.

Ne deriva uno schema nel quale la tensione τ, secondo la (2_2), viene ad assumere una distribuzione uniforme $(\bar{\tau})$ su ogni superficie equidistante da quella di contorno, mentre su questa ultima la tensione τ_0 non è in generale costante. Il raccordo fra le due diverse distribuzioni avviene attraverso lo strato laminare, il cui spessore può variare da punto a punto del contorno.

Come si è detto, questa interpretazione, plausibile a priori ma giustificata sopratutto dalla verifica sperimentale dei risultati, non vuole essere che uno schema e come tale non pretende di esaurire anche tutti i fenomeni locali di turbolenza che possono verificarsi nelle immediate vicinanze dei punti angolosi del contorno.

In analogia con lo studio del moto entro condotti circolari, poniamo

$$(3_2) \qquad \overline{u' v'} = -l^2 \left(\frac{du}{dy}\right)^2$$

con l funzione soltanto di y. Quindi dalla (2_2), tenuto conto delle considerazioni precedenti, segue

$$\frac{\tau}{\rho} = l^2 \left(\frac{du}{dy}\right)^2. \tag{4_2}$$

Suddividiamo la sezione, che per semplicità supponiamo senz'altro con lati rettilinei, in zone limitate dalle bisettrici degli angoli perimetrali (ved. fig. 1). In ciascuna di esse varrà la (4_2), intendendo con y la distanza del punto considerato dal relativo lato di contorno e con y_0 il massimo valore di y in tutta la sezione.

Anche per una sezione generica sussiste, fra il valor medio della tensione tangenziale al contorno $\bar{\tau}_0 = \gamma R i$ e il valor medio $\bar{\tau}$ sulla superficie distante y (coincidente nel nostro schema con il valore locale), la relazione

$$\bar{\tau} = \bar{\tau}_0 \left(1 - \frac{y}{y_0}\right). \tag{5_2}$$

Adottando per la lunghezza l l'espressione (9_1) $l = K y e^{-y/y_0}$ assegnata al n. 4 della Nota I, segue dalle (4_2) e (5_2)

$$\frac{\tau_0}{\rho}\left(1 - \frac{y}{y_0}\right) = K^2 y^2 e^{-2y/y_0}\left(\frac{du}{dy}\right)^2. \tag{6_2}$$

Di qui, posto

$$\Phi\left(\frac{y}{y_0}\right) = \int_{\frac{y}{y_0}}^{\frac{y}{y_0}} \frac{e^{\frac{y}{y_0}}\left(1 - \frac{y}{y_0}\right) - 1}{\frac{y}{y_0}} d\left(\frac{y}{y_0}\right) \quad \text{(cfr. } (13_1)\text{)}$$

e

$$\bar{u}_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \tag{7_2}$$

si ottiene integrando

$$\frac{u}{\bar{u}_*} = a' + b \log\left(\frac{y}{y_0}\right) + \frac{1}{K}\Phi\left(\frac{y}{y_0}\right) \qquad \left(b = \frac{2{,}303}{K}\right). \tag{8_2}$$

Se si assume invece per l la posizione di Prandtl $l = Ky$, che rappresenta una semplificazione della (9_1) valida nella regione vicina alle pareti, si ottiene la distribuzione puramente logaritmica

$$\frac{u}{\bar{u}_*} = a + b \log\left(\frac{y}{y_0}\right) \qquad \left(b = \frac{2{,}303}{K}\right). \tag{9_2}$$

Una differenza sostanziale fra la relazione premessa (1_2) e la (9_2) è che, mentre nella prima la pendenza $u_* b$ dei profili della velocità in funzione di $\log y$ è variabile da normale a normale in relazione alla variazione sul contorno di u_*, nella seconda la pendenza degli stessi profili conserva il valore costante $\bar{u}_* b$ su qualunque normale al perimentro bagnato [5].

(5) Per quanto riguarda la (8_2), la pendenza dei profili $u = f(\log y)$ non risulta più costante lungo ciascuna normale al contorno, causa la presenza del termine contenente $\Phi(y/y_0)$, ma resta ugualmente la stessa, a parità di y, su tutte le normali al contorno (s'intende in una stessa sezione e in assegnate condizioni di moto).

3. Si è già visto nei nn. 4 e 5 della Nota I come l'introduzione del termine $\frac{1}{K}\Phi\left(\frac{y}{y_0}\right)$ nelle leggi di distribuzione della velocità giustifichi il valore 5,75 del coefficiente b, mentre la pendenza dei profili $u/\bar{u}_*$ è intorno a 6,5–7,0 in quasi tutto il campo dei valori y/y_0. Il contributo dello stesso termine, qualuque sia la forma della sezione, si riduce però ad un valore costante nelle leggi di resistenza. In vista della determinazione di queste ultime, possiamo quindi far riferimento all'espressione semplificata (9_2).

Imponiamo le condizioni al contorno operando come nello studio del moto turbolento entro condotti circolari. Nel caso di *pareti lisce* poniamo quindi che al confine (ideale) fra lo strato laminare e il nucleo turbolento si mantenga costante il numero $N_* = \frac{u_\delta}{u_*} = \frac{u_* \delta}{\nu}$, essendo u_δ la velocità al limite del film laminare di spessore, in generale variabile, δ. Scritta la (9_2) per $y = \delta$ ed eliminato a, si ottiene

$$(10_2) \qquad \frac{u}{\bar{u}_*} = \frac{u_\delta}{\bar{u}_*} - b \log \frac{\delta \bar{u}_*}{\nu} + b \log \frac{y \bar{u}_*}{\nu};$$

da cui, per le ipotesi precedenti,

$$(11_2) \qquad \frac{u}{\bar{u}_*} = \left(N_* \frac{u_*}{\bar{u}_*} - b \log N_* \frac{u_*}{\bar{u}_*}\right) + b \log \frac{y \bar{u}_*}{\nu}.$$

Più concisamente la legge di distribuzione della velocità nei condotti lisci di sezione qualunque si può scrivere

$$(12_2) \qquad \frac{u}{\bar{u}_*} = a_l + b \log \frac{y \bar{u}_*}{\nu} \qquad \left(a_l = a_l\left(\frac{u_*}{\bar{u}_*}\right);\ b = \frac{2{,}303}{K}\right).$$

Dalla (12_2) si nota che a_l è costante soltanto nei condotti di sezione circolare e nei condotti rettangolari larghissimi dove $u_* = \bar{u}_* = \text{cost}$. Altrimenti i valori di a_l sono diversi da profilo a profilo in relazione al valore di u_* al piede della normale considerata. In questo sta una seconda fondamentale differenza fra la nostra (12_2) e gli sviluppi che si deducono dalla (1_2).

In altre parole, lo schema assunto alla base del nostro procedimento implica che, a parità di condizioni di parete e di moto, la variazione della velocità (media temporale) nella direzione normale alla parete sia la *stessa* in tutti i punti equidistanti dal contorno, ma il *valore* della stessa velocità sia *diverso* da punto a punto in relazione alla non uniforme distribuzione di τ_0 sul contorno. I profili $u/\bar{u}_* = f(\log y)$ lungo diverse normali al contorno di una data sezione devono essere quindi interpolabili, secondo le nostre ipotesi, con rette aventi tutte la medesima pendenza ma costanti diverse all'origine [6]. Le figg. 2 e 3 mettono in evidenza la buona conferma sperimentale [7].

(6) Al contrario i profili rappresentati dalla (1_2) sono rette passanti tutte per uno stesso punto e con pendenze diverse da normale a normale al contorno.

(7) Le misure sperimentali sono tratte dalla Memoria [1].

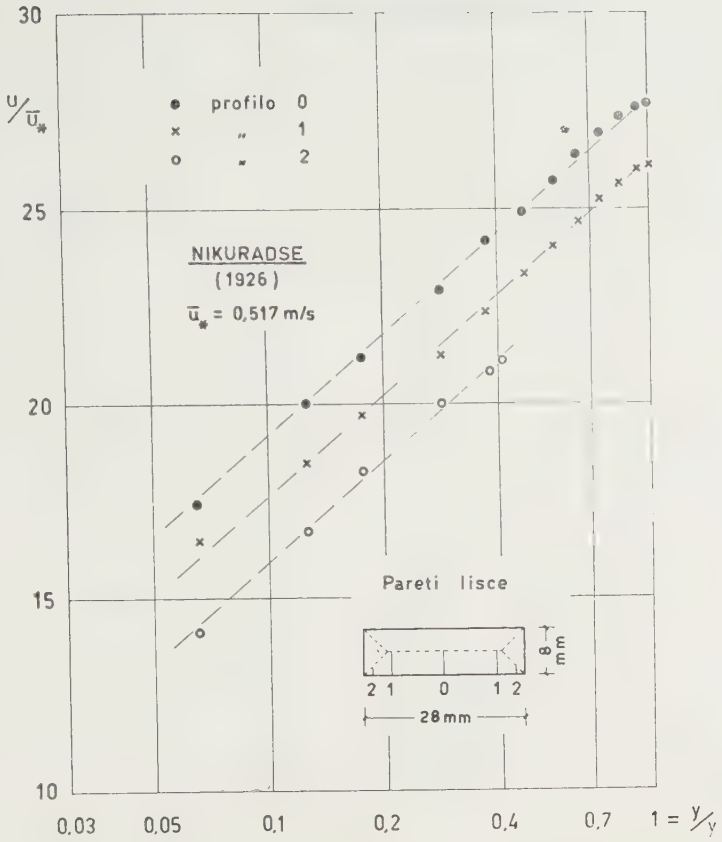

30
25
20
15
10
u/u*
profilo 0
" 1
" 2
NIKURADSE
(1926)
u* = 0,517 m/s
Pareti lisce
8 mm
2 1 0 1 2
28mm
0.03
0.05
0.1
0.2
0.4
0.7
1 = y/y

Fig. 2.

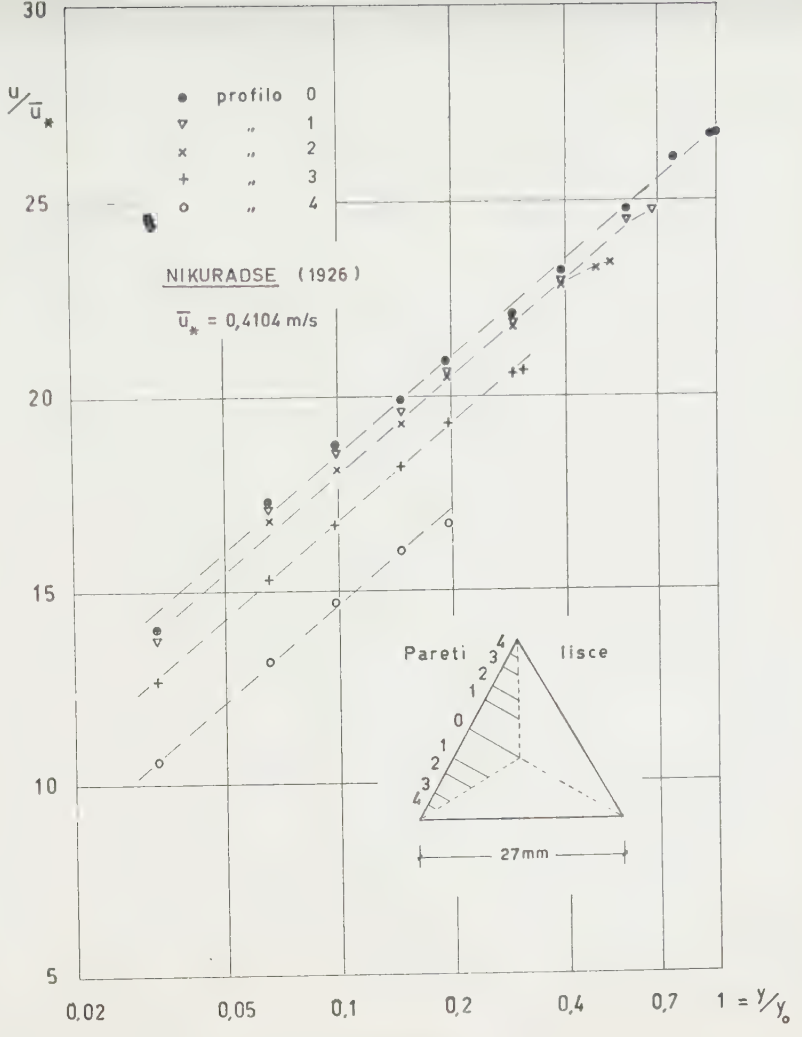

30
25
20
15
10
5
u/u*
profilo 0
" 1
" 2
" 3
" 4
NIKURADSE (1926)
u* = 0,4104 m/s
Pareti lisce
4 3 2 1 0 1 2 3 4
27mm
0.02
0.05
0.1
0.2
0.4
0.7
1 = y/y

Fig. 3.

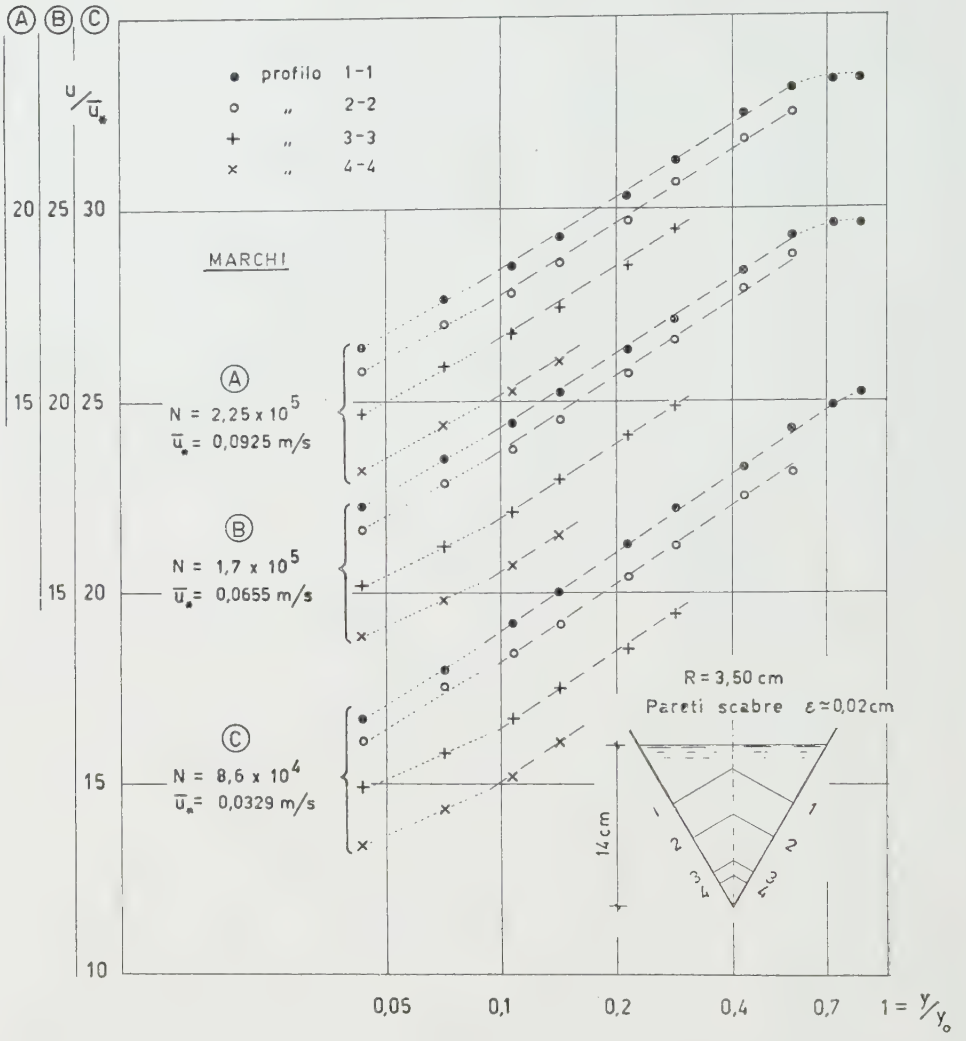


Fig. 4.

Nel caso di *pareti scabre* e *di moto assolutamente turbolento*, imposte le condizioni al contorno con procedimento sempre analogo a quello seguito per le condotte circolari, si ottiene

$$(13_2) \qquad \frac{u}{u_*} = a_r + b \log \frac{y}{\varepsilon} \qquad \left(a_r = a_r\left(\frac{u_*}{\bar{u}_*}\right);\ b = \frac{2{,}303}{K}\right)$$

con a_r dipendente dalla distribuzione di u_* sul contorno, e con i limiti che derivano in questo caso dalla possibilità di caratterizzare la scabrezza con il solo parametro ε. Anche qui il confronto sperimentale, di cui riportiamo un esempio nella fig. 4 [8], prova l'attendibilità dei risultati [9].

(8) E. MARCHI, *Terza serie di esperienze sul moto uniforme nei canali*, « La Ricerca Scientifica », n. 12, p. 2564 (1959).

(9) Come si è detto nella Nota I, ulteriori confronti sperimentali saranno riportati in una Memoria di prossima pubblicazione su « L'Energia Elettrica ».

SEZIONI DI FORMA QUALUNQUE: LE LEGGI DI RESISTENZA.

4. Calcoliamo il valor medio U della velocità in tutta la sezione

$$U = \frac{1}{\Omega}\int_0^{y_0} dy \int_0^{B} u\, dB \tag{14_2}$$

dove B è la lunghezza di una linea distante costantemente y dal contorno B_0. Poniamo

$$\alpha = \frac{B_0 - B}{y} \tag{15_2}$$

$$\beta = \ln\frac{y_0}{R} - \frac{\alpha y_0^2}{4\Omega} = \text{coeff. geometrico di forma.} \tag{16_2}$$

Partendo dalla (12_2), indicato con

$$C_l = \frac{1}{\Omega}\int_0^{y_0} dy \int_0^{B} a_l\left(\frac{u_*}{\bar{u}_*}\right) dB \tag{17_2}$$

un coefficiente che dipende dalla distribuzione di a_l sul contorno, si ha

$$\frac{U}{\bar{u}_*} = C_l - \frac{1-\beta}{K} + b\log\left(\frac{R\bar{u}_*}{\nu}\right). \tag{18_2}$$

Sostituendo la (18_2) nell'equazione del moto uniforme (2_1) $\frac{U}{\bar{u}_*} = \sqrt{\frac{8}{\lambda}}$, segue

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = A_{lf} + \frac{b}{\sqrt{8}}\log\left(N\sqrt{\lambda}\right) \qquad \left(N = \frac{4RU}{\nu}\right) \tag{19_2}$$

con

$$A_{lf} = \frac{1}{\sqrt{8}}\left(C_l - \frac{1-\beta}{K} - b\log 8\sqrt{2}\right). \tag{20_2}$$

La (19_2) rappresenta la *legge di resistenza nei condotti lisci di sezione qualunque*. Il coefficiente A_{lf} cambia un poco con la forma della sezione in conseguenza delle variazioni di C_l e di β. Per la sezione circolare abbiamo indicato questo coefficiente con A_l (cfr. formula (7_1)). Essendo in tal caso $\beta = 0{,}193$, $C_l = a_l = \text{cost}$, si ottiene

$$A_{lf} - A_l = \frac{1}{\sqrt{8}}\left(C_l - a_l + \frac{\beta - 0{,}193}{K}\right). \tag{21_2}$$

Operando in maniera del tutto analoga a partire dalla (13_2), si ottiene la *legge di resistenza nei condotti scabri in moto assolutamente turbolento*

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = A_{rf} + \frac{b}{\sqrt{8}}\log\left(\frac{4R}{\varepsilon}\right) \tag{22_2}$$

dove, posto

$$C_r = \frac{1}{\Omega}\int_0^{y_0} dy \int_0^{B} a_r\left(\frac{u_*}{\bar{u}_*}\right) dB \tag{23_2}$$

si è indicato con A_{rf} l'espressione

$$(24_2) \qquad A_{rf} = \frac{1}{\sqrt{8}}\left(C_r - \frac{1-\beta}{k} - b \log 4\right).$$

Nella sezione circolare: $\beta = 0{,}193$, $C_r = a_r = \text{cost}$ e $A_{rf} = A_r$ (cfr. formula (8_1)), quindi

$$(25_2) \qquad A_{rf} - A_r = \frac{1}{\sqrt{8}}\left(C_r - a_r + \frac{\beta - 0{,}193}{k}\right).$$

La (21_2) e la (25_2) mostrano che le variazioni dei coefficienti A_l e A_r, dalla sezione circolare ad una sezione generica, sono rappresentate da termini che hanno lo stesso valore, a parità di forma, in ogni regime del moto turbolento, e dalle differenze $C_l - a_l$ e $C_r - a_r$ i cui valori dipendono dalla distribuzione di $a_l\,(u_*/\bar{u}_*)$ e di $a_r\,(u_*/\bar{u}_*)$ sul contorno.

L'esperienza non è in grado attualmente di fornire indicazioni sufficientemente precise su questa distribuzione [10]. La posizione più semplice è di ritenere che tale distribuzione sia funzione soltanto della forma della sezione. Allora le differenze (21_2) e (25_2) sono uguali, per una stessa sezione, e si può porre

$$(26_2) \qquad A_{lf} - A_l = A_{rf} - A_r = \frac{b}{\sqrt{8}} \log f$$

indicando con f un « coefficiente di forma » caratteristico di ogni sezione (evidentemente è $f = 1$ per la sezione circolare).

5. Per la (26_2), assunto $b = 5{,}75$ sulla base delle indicazioni precedenti, e assegnati i valori di Nikuradse $A_l = -0{,}8$ e $A_r = 1{,}14$, le leggi di resistenza (19_2) e (22_2) diventano

$$(27_2) \qquad \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -0{,}8 + 2{,}0 \log\left(f N \sqrt{\lambda}\right) \quad \text{per il regime « liscio »}$$

e

$$(28_2) \qquad \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 1{,}14 + 2{,}0 \log\left(\frac{4fR}{\varepsilon}\right) \quad \text{per il regime « assolutamente rugoso ».}$$

Ne deriva che l'introduzione di un nuovo raggio idraulico R_f « di forma », definito dalla relazione

$$(29_2) \qquad R_f = fR$$

$\left(\text{al quale corrisponde il n° di Reynols } N_f = fN = f\frac{4RU}{\nu}\right)$, consente di uti-

(10) Dal punto di vista teorico è interessante l'ipotesi avanzata da Ghetti nella Memoria citata (4): l'autore ritiene che la distribuzione delle τ_0 sul contorno debba essere tale da realizzare, a parità di valor medio, quella distribuzione di velocità nella sezione che dà luogo alla portata massima.

lizzare, anche nei condotti di sezione generica, le formule valide nei condotti circolari per il calcolo del coefficiente di attrito λ in regime turbolento [11].

6. I valori del coefficiente f, per sezioni di forma diversa dalla circolare e dalla rettangolare infinitamente larga, devono essere ricavati dal confronto con le esperienze. Tale confronto, che sarà pubblicato per esteso nella Memoria citata [9], ha consentito, insieme alla verifica dei nostri risultati, l'indicazione dei valori di f per alcune sezioni tipiche, chiuse e aperte.

Nel campo delle *sezioni chiuse* una conferma significativa si è ottenuta dall'esame delle esperienze di Fromm e Fritsch su condotti lisci di sezione rettangolare molto larga e di Lorentz su condotti lisci di sezione anulare stretta [12]. Il valore sperimentale del coefficiente di forma in regime turbolento risulta infatti $f = 0{,}84$, praticamente coincidente con il valore teorico indicato nella nota [11].

Nel campo delle *sezioni aperte* si possono utilizzare ancora le formule precedenti con la convenzione che l'unico coefficiente f interpreti, insieme all'influenza della forma, anche quella del pelo libero, ed assuma quindi per queste sezioni valori caratteristici, in generale diversi da quelli che competono alle corrispondenti forme chiuse (cioè alle sezioni ottenute aggiungendo alle date le simmetriche rispetto al pelo libero) [13].

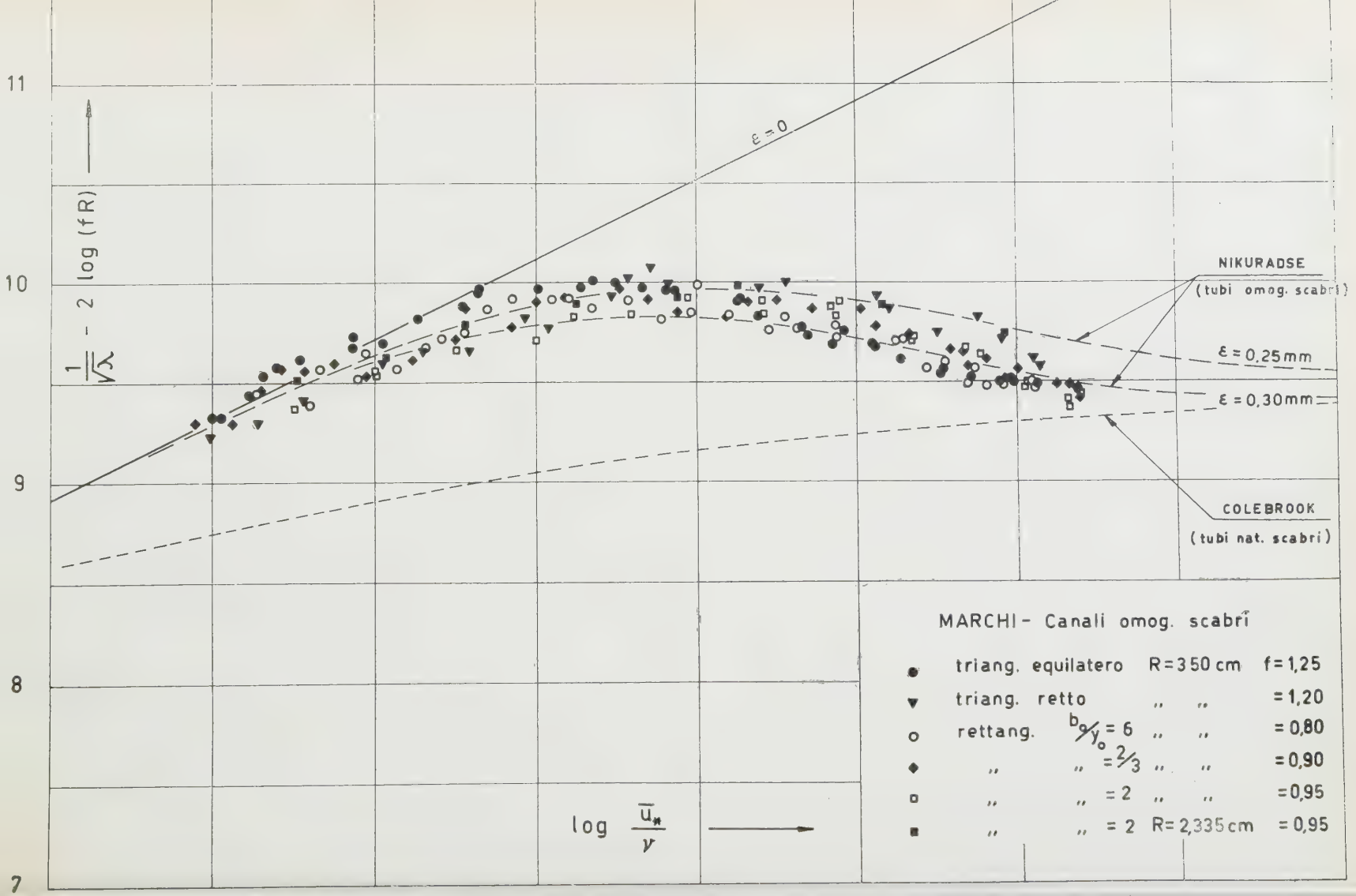
(11) Questa posizione è ovviamente valida, dal punto di vista formale, anche nel regime laminare. I valori del coefficiente f, calcolabili in tal caso per via teorica, sono però *diversi* da quelli del regime turbolento. Nel caso della sezione rettangolare infinitamente larga, dove il calcolo teorico di f è possibile anche in regime turbolento si ha: $f_{lam} = 0{,}67$, $f_{turb} = 0{,}83$. (Cfr. (25_2) e (26_2) con $C_r = \boldsymbol{a}_r$, $\alpha = \beta = 0$).

(12) Una rielaborazione di queste esperienze era già stata fatta da B. GENTILINI, *Sull'equazione del movimento uniforme delle correnti liquide*, « L'Energia Elettrica », n. 3 (1935).

L'autore aveva riconosciuto, per analogia col regime laminare, la possibilità di introdurre un coefficiente di forma come moltiplicatore del raggio medio nelle formule per il calcolo di λ nei condotti lisci; riteneva però che tale coefficiente, nel moto turbolento, fosse lo stesso coefficiente di forma del moto laminare.

(13) Questa posizione si può giustificare qualitativamente. Nelle sezioni aperte, la presenza del pelo libero impone la condizione che sia nulla su di esso la componente normale della velocità di agitazione turbolenta w'. Per ragioni di continuità, rispetto alla situazione che si verificherebbe nella corrispondente sezione chiusa dove è $w' \neq 0$, deve aumentare, a parità di u', la componente v' e quindi la tensione tangenziale (2_2) agente sull'elemento perpendicolare alla superficie libera. Queste variazioni delle τ, e la relativa influenza sulla distribuzione della velocità, interessano non soltanto il pelo libero ma, in misura progressivamente ridotta, tutta una regione prossima ad esso. Un risultato equivalente si può ottenere immaginando di partire dalla corrispondente corrente in pressione, e, dopo averne separato idealmente una delle due parti con la retta che in essa sostituisce il pelo libero, di applicare su quest'ultimo una tensione tangenziale parallela all'asse del moto e distribuita, caso per caso, con leggi particolari. [Ved. G. COCCHI, *Su una questione relativa alle correnti a pelo libero*, « Atti Acc. delle Scienze di Bologna », serie XI, V (1958); dove è trattato in maniera completa il caso dei canali semicircolari].

Da questa impostazione deriva che il pelo libero esercita, in misura diversa secondo la forma della sezione, una funzione di contorno paragonabile parzialmente a quella di una parete. La sua influenza sulle leggi di resistenza si può quindi riportare « grosso modo » ad


11
10
9
8
7
$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} - 2 \log (fR)$
$\log \frac{u_*}{\nu}$
$\varepsilon = 0$
NIKURADSE
(tubi omog. scabri)
$\varepsilon = 0,25mm$
$\varepsilon = 0,30mm$
COLEBROOK
(tubi nat. scabri)
MARCHI - Canali omog. scabri
triang. equilatero R=350 cm f=1,25
triang. retto " " =1,20
rettang. $b/y_o = 6$ " " =0,80
" " $= 2/3$ " " =0,90
" " = 2 " " =0,95
" " = 2 R=2,335 cm =0,95

Un esempio di confronto sperimentale in questo campo è rappresentato dalla fig. 5 che riporta i risultati delle mie esperienze su canali scabri con scabrezza artificiale omogenea [14]. La sostituzione fR al posto di R in ordinate ha determinato, con i valori di f indicati nella figura, l'addensamento dei punti sperimentali su una curva interpolare unica, con andamento chiaramente simile a quello della curva trovata da Nikuradse nei tubi circolari omogeneamente scabri.

una variazione del coefficiente di forma f, i cui valori non saranno più determinati soltanto dalla forma della sezione chiusa nella corrispondente corrente in pressione, ma risentiranno anche di quella effettiva della sezione aperta.

(14) E. MARCHI, *Esperienze di moto uniforme su canali a pelo libero in modelli di canali artificialmente scabri*, « Atti del V Convegno di Idraulica », Torino, maggio 1957. Vedi inoltre nota [8].

Astronomia. — *Sul calcolo d'orbita di stelle doppie a lungo periodo tenendo conto della legge delle aree.* Nota di EDOARDO PROVERBIO, presentata (*) dal Socio F. ZAGAR.

1. Lo studio di stelle doppie a lungo periodo riveste attualmente una singolare importanza dopo che è stata messa in evidenza o sospettata in alcune di esse la presenza di satelliti oscuri di massa notevole, capaci di perturbare il moto di uno dei componenti. La ricerca di satelliti oscuri incontra difficoltà notevoli dato il valore esiguo dell'entità delle perturbazioni che si esercitano tra le componenti, ed essa viene generalmente condotta sulla base dell'analisi degli scarti tra le posizioni calcolate e le posizioni osservate dell'astro secondario, nel caso di un sistema doppio.

Il problema si riduce quindi, nel caso di orbite sospette, a determinare con grande accuratezza gli elementi dell'orbita dell'astro secondario e conseguentemente gli scarti

$$\Delta x = x_{\text{calc}} - x_{\text{oss}} \quad ; \quad \Delta y = y_{\text{calc}} - y_{\text{oss}} ,$$

che si potranno porre in prima approssimazione eguali alle coordinate dell'astro secondario attorno al baricentro del sistema formato dal secondario e dal satellite oscuro, nell'ipotesi che quest'ultimo sia fisicamente connesso con il primo.

Le condizioni necessarie per fare uso, in questo problema, dei dati di osservazione, si possono sintetizzare nei seguenti punti:

a) utilizzazione di tutti i singoli dati forniti dalle osservazioni, evitando la formazione di luoghi normali, che possono agevolare la mole dei calcoli, ma che introducono alterazioni spesso arbitrarie nella distribuzione dei pesi e sono soprattutto nocive nella ricerca del periodo del satellite oscuro. In modo particolare nel caso di dati di osservazioni fotografiche di notevole precisione, per i quali i pesi di x e y risultano eguali, è utile e necessario poter lavorare sulla base di ogni singola coordinata osservata,

b) tener conto nell'elaborazione degli elementi sia geometrici che dinamici, dei dati temporali relativi alle osservazioni stesse.

Il primo punto può essere risolto allo stato attuale della tecnica del calcolo mediante l'uso di calcolatori elettronici, che permettono di affrontare con grande facilità problemi algebrici, come quelli relativi alla risoluzione di sistemi di equazioni lineari con un numero elevato di incognite, utilizzando il metodo dei minimi quadrati.

Il secondo punto, si può tradurre in termini concreti, imponendo che i dati delle osservazioni soddisfino alla legge delle aree. Questa questione, una delle più interessanti e importanti nella teoria dei calcoli d'orbita di stelle

(*) Nella seduta del 10 dicembre 1960.

doppie, è stata studiata ed è attualmente ancora oggetto di interessanti ricerche e considerazioni. Metodi originali, tendenti ad introdurre la legge delle aree nel calcolo degli elementi geometrici sono stati proposti e applicati da G. Silva [1] e F. Zagar [2]. Tuttavia, anche attualmente, questa condizione, indispensabile nel caso di ricerche che richiedono una precisa conoscenza degli elementi, come nel caso di quelle relative allo studio dell'esistenza di satelliti oscuri, viene generalmente trascurata.

Il presente lavoro vuole essere un contributo a valorizzare i metodi analitici basati sull'utilizzazione della legge delle aree nei calcoli di stelle doppie in generale, e fornire una soluzione particolarmente adatta ad essere utilizzata usando calcolatori elettronici, tenendo conto dei motivi già accennati e del fatto che attualmente sono stati forniti esempi più che convincenti della utilità di usare, anche per quanto riguarda la precisione dei risultati, questi moderni strumenti di calcolo [3].

2. Come è noto, tra le coordinate polari ρ e ϑ di un'orbita apparente e quelle r e v della corrispondente orbita vera sussistono le relazioni:

$$\rho \cos (\vartheta - \Omega) = r \cos (\omega + v),$$
$$\rho \sin (\vartheta - \Omega) = r \sin (\omega + v) \cos i,$$

dalle quali, sviluppando i seni e coseni del primo membro e ricordando che si ha

$$x = \rho \cos \vartheta \quad , \quad y = \rho \sin \vartheta ,$$

si ottiene il seguente sistema di due equazioni

$$x \cos \Omega + y \sin \Omega = r \cos (\omega + v),$$
$$y \cos \Omega - x \sin \Omega = r \sin (\omega + v) \cos i,$$

che fornisce per le coordinate x e y le soluzioni

$$(1) \qquad \begin{cases} x = r [\cos \Omega \cos (\omega + v) - \cos i \sin \Omega \sin (\omega + v)], \\ y = r [\sin \Omega \cos (\omega + v) + \cos i \cos \Omega \sin (\omega + v)]. \end{cases}$$

Osserviamo ora che, introducendo nelle precedenti i cosiddetti elementi *naturali* o costanti di Thiele–Innes [4]

$$(2) \qquad \begin{cases} A = \quad a (\cos \Omega \cos \omega - \sin \Omega \sin \omega \cos i), \\ F = -a (\cos \Omega \sin \omega + \sin \Omega \cos \omega \cos i), \\ B = \quad a (\sin \Omega \cos \omega + \cos \Omega \sin \omega \cos i), \\ G = -a (\sin \Omega \sin \omega - \cos \Omega \cos \omega \cos i), \end{cases}$$

queste ultime, dopo facili trasformazioni, assumono la forma seguente

$$(3) \qquad \begin{cases} x = A \frac{r}{a} \cos v + F \frac{r}{a} \sin v, \\ y = B \frac{r}{a} \cos v + G \frac{r}{a} \sin v, \end{cases}$$

nelle quali a, A, B, F e G sono delle costanti e i termini in r ed in v risultano invece funzioni del tempo e possono essere espressi in funzione di questo parametro secondo sviluppi in serie di potenze. Il numero dei termini dello sviluppo dovendo essere tale da permettere una rappresentazione sufficientemente rigorosa, nei limiti della precisione richiesta, di archi più o meno ampi di orbita.

Considerando ora le coordinate ortogonali X e Y relative ai punti dell'orbita vera, possiamo scrivere:

$$(4) \qquad \begin{cases} aX = r\cos v = \Sigma\, a_n t^n, & (n = 0, 1, \cdots, n) \\ aY = r\sin v = \Sigma\, b_n t^n, & (n = 0, 1, \cdots, n) \end{cases}$$

nelle quali a rappresenta il valore angolare del semiasse maggiore dell'orbita vera ed il tempo t viene contato da una conveniente epoca iniziale t_0. L'introduzione delle nuove coordinate aX e aY, riduce naturalmente del rapporto a le dimensioni relative all'orbita vera e l'orbita stessa si riduce all'orbita unitaria, definita solamente dagli elementi dinamici.

Facciamo infine notare che gli ultimi termini dei due precedenti sviluppi che devono essere presi in considerazione risultano funzione, come abbiamo accennato, dell'ampiezza dell'arco considerato. Per archi relativamente poco ampi, dell'ordine di qualche centesimo di periodo è sufficiente tener conto dei primi tre termini ($n = 2$), mentre per archi maggiori è necessario considerare anche termini superiori, che non è però conveniente spingere oltre limiti troppo grandi. Questi sviluppi possono essere quindi impiegati con vantaggio, come è stato già rilevato nei lavori di G. Silva e F. Zagar precedentemente citati, nel caso di stelle doppie a lungo periodo. Nel caso della speciale applicazione per la ricerca di satelliti oscuri, per i quali è interessante mettere in evidenza eventuali periodicità negli scarti Δx e Δy, analizzando le osservazioni fotografiche più precise e quindi su un arco relativamente breve, questi sviluppi risultano senza dubbio utili e sufficientemente precisi. Analoghe considerazioni si possono fare in relazione ai seguenti sviluppi (6).

Se introduciamo ora le precedenti relazioni nelle (3) e poniamo:

$$(5) \qquad U_n = Aa_n + Fb_n \quad , \quad V_n = Ba_n + Gb_n,$$

le stesse possono essere scritte nella forma sintetica

$$(6) \qquad x = \Sigma\, U_n t^n \quad , \quad y = \Sigma\, V_n t^n, \qquad (n = 0, 1, \cdots, n).$$

Disponendo di un conveniente numero di osservazioni e conoscendo di conseguenza i corrispondenti valori delle coordinate x e y risulta quindi possibile, utilizzando il metodo dei minimi quadrati, calcolare i valori dei coefficienti U_n e V_n sino al termine voluto, questi coefficienti permettendo inoltre di determinare in modo indiretto anche le derivate prime delle due suddette coordinate

$$(6') \qquad \dot{x} = \Sigma\, n U_n t^{n-1} \quad , \quad \dot{y} = \Sigma\, n V_n t^{n-1} \qquad (n = 1, \cdots, n).$$

3. Consideriamo ora l'equazione di una conica in coordinate polari, scritta nella forma

$$r + er\cos v = a(1 - e^2),$$

la quale, per mezzo delle relazioni (4), si può esprimere in funzione delle coordinate X e Y, rappresentando in tal caso l'equazione dell'orbita vera,

$$X^2 + \frac{Y^2}{1 - e^2} = (1 - e^2) - 2eX.$$

Differenziando questa equazione rispetto a X e Y otteniamo

$$\frac{dX}{dY} = -\frac{Y}{(1 - e^2)(e + X)}.$$

Ricordando ora che la legge delle aree può essere espressa in una delle seguenti forme, rappresentando come in precedenza col punto la derivata prima rispetto al tempo,

$$X - Y\frac{dX}{dY} = \frac{C}{\dot{Y}} \quad , \quad X\frac{dY}{dX} - Y = \frac{C}{\dot{X}},$$

ove con C si è indicata la costante delle aree dell'orbita vera, e sostituendo in queste ultime al posto delle derivate il valore fornito dalla precedente relazione, si perviene, dopo alcune facili sostituzioni, alle equazioni

$$(1 - e^2)\dot{Y} - eX\dot{Y} - CX - Ce = 0,$$

$$(1 - e^2)\dot{X} - eX\dot{X} + \frac{C}{1 - e^2}Y = 0.$$

Eliminando infine dalle due equazioni la costante delle aree C si perviene all'eguaglianza

$$[(1 - e^2) - eX]\left|\frac{Y\dot{Y}}{1 - e^2} + X\dot{X} + e\dot{X}\right| = 0,$$

che dà luogo alle due nuove equazioni

$$1 - e^2 - eX = 0 \quad , \quad \frac{Y\dot{Y}}{1 - e^2} + X\dot{X} + e\dot{X} = 0,$$

le quali per mezzo delle sostituzioni

$$X = \frac{Gx - Fy}{AG - BF} \quad , \quad Y = \frac{Ax - By}{AG - BF}$$

$$\dot{X} = \frac{G\dot{x} - F\dot{y}}{AG - BF} \quad , \quad \dot{Y} = \frac{A\dot{x} - B\dot{y}}{AG - BF}$$

facilmente ottenibili dalle (3) e dalle (4), prendono la forma

$$(6'') \qquad \alpha_1 x\dot{x} + \alpha_2(x\dot{y} + \dot{x}y) + \alpha_3 y\dot{y} + \alpha_4\dot{x} = \dot{y} \quad , \quad \alpha_4 x + \alpha_5 = y.$$

In queste due equazioni i coefficienti delle incognite α_i si possono ricavare dai dati delle osservazioni per mezzo delle (6) e delle (6') in funzione del tempo. Ne risulta che dette equazioni, utilizzando il metodo dei minimi

quadrati, possono fornire i valori più probabili delle cinque incognite α_1, α_2, α_3, α_4, α_5, che risultano legate alle quattro costanti di Thiele–Innes ed all'eccentricità vera dalle relazioni

$$\alpha_1 = \frac{(1-e^2)\,G^2 + A^2}{e\,(1-e^2)\,F\,(AG-BF)} \quad , \quad \alpha_2 = -\frac{(1-e^2)\,FG + AB}{e\,(1-e^2)\,F\,(AG-BF)} ,$$

$$\alpha_3 = \frac{(1-e^2)\,F^2 + B^2}{e\,(1-e^2)\,F\,(AG-BF)} \quad , \quad \alpha_4 = \frac{G}{F} \quad , \quad \alpha_5 = -\frac{(1-e^2)\,(AG-BF)}{eF} .$$

La risoluzione di questo sistema di cinque equazioni indipendenti in cinque incognite fornisce direttamente i valori delle costanti di Thiele–Innes necessari per il calcolo dei rimanenti elementi orbitali e geometrici in funzione delle α_i.

Si hanno infatti dal precedente sistema le soluzioni

$$(7) \qquad e = \left[\frac{\alpha_2\alpha_5\,(2\alpha_4+1) + \alpha_2^2\alpha_3\alpha_5}{\alpha_2\alpha_5\,(2\alpha_4+\alpha_2\alpha_5) + \alpha_1\alpha_5\,(1-\alpha_3\alpha_5) + \alpha_3\alpha_4^2\alpha_5}\right]^{1/2} ,$$

$$(7') \qquad \begin{cases} A = \dfrac{e}{1-e^2}\dfrac{\alpha_4}{\alpha_5}\dfrac{e_1}{e_2-e_1} \quad , \quad B = \dfrac{e}{1-e^2}\,\alpha_5\dfrac{e_2}{e_2-e_1} = A\alpha_4\dfrac{e_2}{e_1} , \\ F = \dfrac{e}{1-e^2}\,\alpha_5\dfrac{1}{e_2-e_1} = A\dfrac{\alpha_4}{e_1} \quad , \quad G = \dfrac{e}{1-e^2}\,\alpha_4\,\alpha_5\dfrac{1}{e_2-e_1} = A\dfrac{\alpha_4^2}{e_1} , \end{cases}$$

in cui

$$(7'') \qquad e_1 = \alpha_4\,[e^2\,(\alpha_4^2 - \alpha_1\,\alpha_5) - \alpha_4^2]^{1/2} \quad , \quad e_2 = [e^2\,(1-\alpha_3\,\alpha_5) - 1]^{1/2} .$$

Queste soluzioni ci permettono di trovare agevolmente i valori degli elementi geometrici convenzionali, utilizzando le relazioni

$$(8) \qquad m = AG - BF = A\frac{\alpha_4\alpha_5}{e_1}\frac{e}{e^2-1} ,$$

$$2k = A^2 + B^2 + F^2 + G^2 = \frac{A^2}{e_1^2}\,[e_1^2 + \alpha_4^2 + \alpha_4^2\,(e_2^2 + \alpha_4^2)] ,$$

$$j = k^2 - m^2 \quad , \quad a^2 = j + k ,$$

$$\cos i = \frac{m}{a^2} \quad , \quad \operatorname{tg}(\omega - \Omega) = -\frac{B+F}{A-G} ,$$

$$\operatorname{tg}(\omega + \Omega) = \frac{B-F}{A+G} ,$$

che possono essere ottenute con semplici calcoli dalle (2).

4. Calcolati in tal modo gli elementi geometrici e orbitali restano da determinare i due elementi dinamici P e T.

Il periodo P può essere immediatamente conosciuto dalla relazione

$$X\dot{Y} - Y\dot{X} = \frac{2\pi a^2\sqrt{1-e^2}}{P} ,$$

nella quale le coordinate X e Y e le loro derivate $\dot{X}$ e $\dot{Y}$ si possono ricavare direttamente dalle (4) e dalle (5), o anche più immediatamente dalle seguenti:

$$x\dot{y} - y\dot{x} = \frac{2\pi a'' \sqrt{1-e^2}}{P} \cos i , \tag{9}$$

che lega le costanti delle aree delle due orbite reale e apparente, e nella quale tutti gli elementi sono conosciuti ad eccezione di P.

Il valore dell'epoca T può essere finalmente ottenuto, nel caso di un'orbita ellittica, dall'equazione di Keplero

$$E - e \sin E = \frac{2\pi}{P}(t - T), \tag{10}$$

in cui sin E ed E si hanno facilmente dalla relazione

$$\sin E = \frac{Y}{\sqrt{1-e^2}} .$$

Se l'orbita vera risulta invece parabolica o iperbolica è necessario ovviamente utilizzare per il calcolo di T le equazioni caratteristiche del moto in questi due casi.

5. Il procedimento generale per arrivare agli elementi orbitali e dinamici di un sistema doppio consta quindi dei seguenti passaggi:

a) calcolo delle coordinate x e y e delle loro derivate prime $\dot{x}$ e $\dot{y}$ mediante la risoluzione, utilizzando il metodo dei minimi quadrati, del sistema di equazioni (6);

b) risoluzione, sempre facendo ricorso al metodo dei minimi quadrati, dei due sistemi (6''), dei quali il secondo risulta di risoluzione quasi immediata;

c) calcolo diretto dell'eccentricità e delle costanti di Thiele–Innes per mezzo delle relazioni (7), (7') e (7''), e successivamente degli elementi orbitali per mezzo delle (8);

d) determinazione del periodo P e dell'istante T del passaggio al periastro mediante le relazioni (9) e (10) rispettivamente.

I calcoli più laboriosi in questo procedimento, relativi alla risoluzione di sistemi di equazioni a più incognite, si riducono quindi ai tre sistemi (6), (6''), dei quali, come si è già detto, l'ultimo sistema a due sole incognite si risolve assai facilmente.

È da notare infine che, ad eccezione del calcolo degli elementi ω e Ω, che vengono ricavati per mezzo di semplici relazioni dalla funzione tangente, tutti gli altri elementi geometrici e orbitali si ottengono con semplici operazioni aritmetiche, che rendono estremamente rapido e sicuro anche il calcolo manuale.

Essendo inoltre il calcolo impostato rigorosamente secondo il metodo dei minimi quadrati e utilizzando tutti i singoli dati di osservazione a disposizione, si rende teoricamente superflua ogni correzione differenziale degli

elementi se si ha cura di non trascurare negli sviluppi i termini dell'ordine di grandezza della precisione richiesta.

A questo proposito è opportuno notare che, quantunque questo metodo permetta il calcolo degli elementi con notevole precisione anche nel caso di orbite non sufficientemente sicure, la limitazione nelle applicazioni ad archi di orbita di non eccessiva ampiezza può condurre a qualche indeterminatezza nella risoluzione dei sistemi (6″).

Questa eventualità, se si tengono presenti i motivi esposti all'inizio di questo lavoro, può esser in qualche caso superata introducendo nei calcoli valori pesati delle coordinate x e y ricavati da osservazioni anche visuali che risultino di buona precisione.

6. È intenzione dell'autore utilizzare il metodo di calcolo esposto per la ricerca e lo studio di satelliti oscuri nel caso di sistemi doppi relativamente vicini del tipo 61 Cygni e ζ Aquarii.

Come è stato messo in evidenza in un recente lavoro [5], questi satelliti, la cui massa deve risultare non inferiore a 0,01 unità solari, e che quindi devono essere collocati dal punto di vista delle masse conosciute tra i pianeti veri e propri e corpi di tipo stellare [1], sono suscettibili di essere messi in evidenza in stelle la cui parallasse risulti maggiore di 0″,1.

Se si tiene presente che sono attualmente conosciute circa 200 stelle la cui parallasse risulta appunto maggiore di 0″,1, si può avere un'idea delle possibilità aperte a queste ricerche, pur nella ipotesi più restrittiva per il valore delle masse, che possono acquistare anche un chiaro valore cosmogonico.

Bibliografia.

[1] G. Silva, «Atti R. Ist. Veneto Sc. L. A.», XCV, 551 (1936).
[2] F. Zagar, «Atti R. Acc. Sc. L. A., Palermo», I (1938).
[3] A. Kranjc, «Mem. S. A. It.», XXXI, 61 (1960).
[4] W. H. van den Bos, «BAN», *3*, 149 (1926).
[5] A. M. Deutsch, «Iswetija GAO», XXI, 62 (1957).

(1) Interessante a questo proposito la scoperta fotografica del compagno finora considerato invisibile di Ross 614, effettuata dopo attente osservazioni fotografiche col riflettore di M. Palomar.

Astronomia. — *La linea centrale di un'eclisse totale di Sole in quota* (*). Nota di ALDO KRANJC, presentata (**) dal Socio F. ZAGAR.

Sono ben note le formole che servono a calcolare la linea centrale di un'eclisse totale di Sole al livello del mare; ciò è utile per chi debba scegliere la località più adatta ove impiantare la sua stazione d'osservazione. Le recenti tecniche di osservazioni astronomiche con razzi hanno reso necessario il calcolo della linea centrale dell'eclisse totale di Sole in quote rilevanti; non avendo trovato nella letteratura alcun cenno, esporremo qui un semplice metodo per risolvere il problema.

Indichiamo con φ e λ la latitudine e longitudine astronomiche del luogo, sopra il quale, verticalmente alla quota q, passa la linea centrale dell'eclisse, e con ψ la latitudine geocentrica. La latitudine astronomica del punto in quota è evidentemente la stessa, mentre diversa sarà la sua latitudine geocentrica, che indicheremo con ψ.

Indichiamo con θ la differenza

$$\theta = \varphi - \psi . \tag{1}$$

Se ρ è il raggio vettore pel luogo al suolo, il raggio vettore $\bar{\rho}$ pel luogo in quota è dato da

$$\bar{\rho} = \rho + \frac{q}{a} \cos\theta , \quad \text{ove } a = \text{raggio equatoriale terrestre in km.} \tag{2}$$

Al momento voluto sono note le coordinate x, y di Bessel dell'asse del cono d'ombra. La sua intersezione con una sfera di raggio $\bar{\rho}$ avrà per terza coordinata z:

$$z^2 = \bar{\rho}^2 - (x^2 + y^2). \tag{3}$$

Non dimentichiamo che l'asse z nel sistema di Bessel è parallelo all'asse del cono d'ombra; per riferirsi alla Terra bisogna ruotare il sistema x, y, z intorno all'asse x dell'angolo d; perciò per avere le coordinate cartesiane dell'intersezione dell'asse del cono d'ombra con la sfera di raggio $\bar{\rho}$ operiamo la trasformazione

$$\begin{cases} \bar{\xi} = x \\ \bar{\eta} = z \operatorname{sen} d + y \cos d \\ \bar{\zeta} = z \cos d - y \operatorname{sen} d \end{cases} \tag{4}$$

(*) Lavoro eseguito nell'osservatorio Astronomico Universitario di Bologna.
(**) Nella seduta del 10 dicembre 1960.

da cui otteniamo subito la $\bar{\psi}$,

$$\operatorname{tg} \bar{\psi} = \frac{\eta}{\sqrt{\bar{\xi}^2 + \bar{\zeta}^2}}, \tag{5}$$

e, da note formole, la

$$\psi = \bar{\psi} - \frac{q}{a\rho} \operatorname{sen} \theta; \tag{6}$$

ciò che ci permette di ritrovare ρ dalla

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{\cos^2 \psi + \frac{\operatorname{sen}^2 \psi}{(1-\alpha)^2}}} \tag{7}$$

dove $1/\alpha$ è lo schiacciamento terrestre.

Data la ψ, si calcola la φ con la (8), sufficientemente approssimata:

$$\varphi = \psi + 693'' \cdot 3 \operatorname{sen} 2\psi. \tag{8}$$

Ma nella successione di formole $1 \div 8$, è essenziale conoscere sin dal principio ρ e θ; d'altre parte siccome ρ e θ variano poco, possiamo procedere per iterazione supponendo che inizialmente sia $\theta = 0$ e $\rho = 1$.

Dalle (7) ed (8) troviamo dei valori più approssimati che sostituiamo in $1 \div 6$, e così via sinché la differenza in ρ è sufficientemente piccola.

Trovata φ, è facile trovare la λ; infatti essa è data dalle

$$\operatorname{tg} h = \frac{\xi}{\zeta} \tag{9}$$

$$\lambda = \mu - h - 1 \cdot 0027\, \Delta T \tag{10}$$

ove il termine $1 \cdot 0027\, \Delta T$ serve per passare dal meridiano delle effemeridi al meridiano di Greenwich; infatti dal 1960 l'elemento tabulare non è più, per le x, y, il tempo universale, ma il tempo delle effemeridi.

Le formole precedenti sono state trascritte sotto forma di programma contraddistinto dal N° d'ordine 028 pel calcolatore elettronico IBM 650 dell'Università di Bologna.

Devono essere fornite:

a) la quota in km richiesta;
b) l'ora delle effemeridi d'inizio del calcolo;
c) il passo in secondi;
d) la correzione ΔT in secondi per passare dal tempo delle effemeridi al tempo universale

e, naturalmente, le schede coi dati di Bessel, a partire dal momento d'inizio per cui interessa il calcolo, e distanziate dello stesso passo; esse sono uguali a quelle usate pel calcolo dell'eclisse di Sole nel programma 027. Viene perforata una scheda in cui sono riportati:

a) il tempo universale in ore, minuti e secondi;
b) la longitudine rispetto a Greenwich in gradi primi e secondi;
c) la latitudine astronomica del luogo sottostante, al livello del mare.

TABELLA I.

T. U.	λ	φ	
$7^h\ 34^m\ 25^s$	— 07° 41′ 39″	44° 04′ 11″	$q = 0$
7 35 25	09 21 21	43 51 48	
7 36 25	10 49 21	43 42 18	
7 37 25	12 08 49	43 34 59	
7 38 25	13 21 43	43 29 21	
7 39 25	14 29 22	43 25 07	
7 40 25	15 32 43	43 22 02	
7 41 25	16 32 28	43 19 57	
7 42 25	17 29 08	43 18 44	
7 43 25	18 23 15	43 18 13	
7 44 25	19 14 56	43 18 28	
$7^h\ 32^m\ 25^s$	— 07° 11′ 36″	43° 20′ 16″	$q = 50$
7 33 25	08 54 50	43 06 40	
7 34 25	10 25 11	42 56 15	
7 35 25	11 46 18	42 48 10	
7 36 25	13 00 24	42 41 52	
7 37 25	14 08 57	42 37 00	
7 38 25	15 13 06	42 33 17	
7 39 25	16 13 20	42 30 40	
7 40 25	17 10 22	42 28 57	
7 41 25	18 04 38	42 28 01	
7 42 25	18 56 30	42 27 47	
7 43 25	19 46 15	42 28 11	
7 44 25	20 34 07	42 29 10	
$7^h\ 30^m\ 25^s$	— 06° 35′ 56″	42° 39′ 32″	$q = 100$
7 31 25	08 23 58	42 24 28	
7 32 25	09 57 27	42 12 58	
7 33 25	11 20 46	42 03 59	
7 34 25	12 36 38	41 56 52	
7 35 25	13 46 23	41 51 21	
7 36 25	14 51 19	41 47 07	
7 37 25	15 52 16	41 43 56	
7 38 25	16 49 51	41 41 41	
7 39 25	17 44 33	41 40 14	
7 40 25	18 36 44	41 39 31	
7 41 25	19 26 44	41 39 27	
7 42 25	20 14 46	41 39 58	
7 43 25	21 01 04	41 41 02	
7 44 25	21 45 48	41 42 35	
$7^h\ 28^m\ 25^s$	— 05° 53′ 54″	42° 02′ 02″	$q = 150$
7 29 25	07 48 24	41 45 07	
7 30 25	09 25 59	41 32 19	
7 31 25	10 52 19	41 22 16	
7 32 25	12 10 05	41 14 23	
7 33 25	13 21 24	41 08 09	
7 34 25	14 27 33	41 03 16	
7 35 25	15 29 27	40 59 30	
7 36 25	16 27 47	40 56 42	
7 37 25	17 23 04	40 54 44	
7 38 25	18 15 44	40 53 31	
7 39 25	19 06 05	40 52 58	
7 40 25	19 54 24	40 53 01	
7 41 25	20 40 54	40 53 38	
7 42 25	21 25 47	40 54 44	
7 43 25	22 09 12	40 56 19	
7 44 25	22 51 18	40 58 21	
$7^h\ 26^m\ 25^s$	— 05° 04′ 15″	41° 27′ 57″	$q = 200$
7 27 25	07 07 34	41 08 40	
7 28 25	08 50 31	40 54 18	

Segue: TABELLA I.

T. U.	λ	φ	
$7^h\ 29^m\ 25^s$	— 10°20′27″	40°43′04″	$q = 200$
7 30 25	11 40 49	40 34 15	
7 31 25	12 54 06	40 27 13	
7 32 25	14 01 46	40 21 38	
7 33 25	15 04 52	40 17 15	
7 34 25	16 04 09	40 13 52	
7 35 25	17 00 13	40 11 22	
7 36 25	17 53 30	40 09 38	
7 37 25	18 44 20	40 08 36	
7 38 25	19 33 03	40 08 11	
7 39 25	20 19 53	40 08 20	
7 40 25	21 05 00	40 09 01	
7 41 25	21 48 36	40 10 10	
7 42 25	22 30 49	40 11 45	
7 43 25	23 11 47	40 13 45	
7 44 25	23 51 36	40 16 09	
$7^h\ 24^m\ 25^s$	— 04°04′45″	40°57′42″	$q = 250$
7 25 25	06 20 31	40 35 14	
7 26 25	08 10 30	40 18 54	
7 27 25	09 45 04	40 06 18	
7 28 25	11 08 41	39 56 24	
7 29 25	12 24 24	39 48 29	
7 30 25	13 33 56	39 42 08	
7 31 25	14 38 30	39 37 04	
7 32 25	15 38 58	39 33 05	
7 33 25	16 35 59	39 30 01	
7 34 25	17 30 02	39 27 46	
7 35 25	18 21 31	39 26 14	
7 36 25	19 10 45	39 25 21	
7 37 25	19 58 00	39 25 02	
7 38 25	20 43 27	39 25 16	
7 39 25	21 27 20	39 25 59	
7 40 25	22 09 45	39 27 09	
7 41 25	22 50 52	39 28 44	
7 42 25	23 30 48	39 30 43	
7 43 25	24 09 39	39 33 05	
7 44 25	24 47 29	39 35 47	
$7^h\ 22^m\ 25^s$	— 02°51′12″	40°32′12″	$q = 300$
7 23 25	05 25 43	40 05 04	
7 24 25	07 25 26	39 46 09	
7 25 25	09 05 42	39 31 56	
7 26 25	10 33 25	39 20 47	
7 27 25	11 52 05	39 11 53	
7 28 25	13 03 54	39 04 41	
7 29 25	14 10 15	38 58 53	
7 30 25	15 12 09	38 54 15	
7 31 25	16 10 19	38 50 36	
7 32 25	17 05 19	38 47 48	
7 33 25	17 57 35	38 45 46	
7 34 25	18 47 28	38 44 23	
7 35 25	19 35 15	38 43 37	
7 36 25	20 21 09	38 43 23	
7 37 25	21 05 23	38 43 40	
7 38 25	21 48 06	38 44 25	
7 39 25	22 29 28	38 45 35	
7 40 25	23 09 34	38 47 10	
7 41 25	23 48 33	38 49 07	
7 42 25	24 26 29	38 51 26	
7 43 25	25 03 27	38 54 05	
7 44 25	25 39 33	38 57 03	

Le iterazioni di cui sopra si arrestano quando la differenza tra due valori consecutivi di φ è inferiore in valore assoluto a 10^{-5}.

Dopo che la scheda output è stata perforata, viene aumentato l'argomento tempo del passo, e si ricicla. Ogni punto richiede circa 20 secondi.

Il programma è stato applicato al calcolo della linea centrale dell'eclisse totale di Sole del 15 febbraio 1961 alle quote di 0–50–100–150–200–250 e 300 km sul livello del mare.

I risultati sono esposti nella Tabella I.

Chimica organica. — *Isolamento di un nuovo acido triterpenico dalle sanse dell'*Olea europaea [*]. Nota di Luciano Caglioti, Gianfranco Cainelli e Federico Minutilli [**], presentata [***] dal Socio A. Quilico.

L'indagine chimica sui componenti dell'*Olea europaea* è stata intrapresa da numerosi ricercatori ed ha portato all'isolamento ed alla identificazione di numerose sostanze appartenenti a diverse classi di composti organici.

Senza soffermarci sui componenti dell'olio d'oliva, ricordiamo gli studi di Powers e Tutin [1], che nel 1908 hanno pubblicato i risultati di una vasta

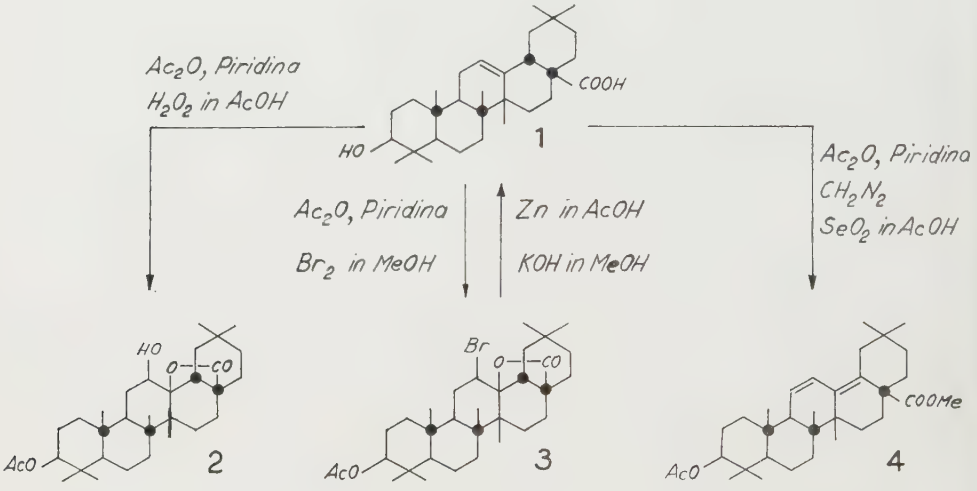


Fig. 1.

ricerca sulle foglie e sulla corteccia dell'olivo, che ha portato, come più notevole risultato, all'isolamento dell'« oleanolo » (già peraltro segnalato da F. Canzoneri [2] in un precedente lavoro).

La struttura dell'Oleanolo, chiamato in seguito *acido oleanolico*, è stata chiarita a seguito del lavoro di numerosi ricercatori, ed è rappresentata in fig. 1, formula 1 [3].

(*) Lavoro eseguito negli Istituti di Chimica Generale del Politecnico di Milano e di Chimica Generale dell'Università di Roma.

(**) In ordine alfabetico.

(***) Nella seduta del 19 novembre 1960.

(1) F. B. Powers, F. Tutin, « J. Chem. Soc. », *1908*, 891, 904.

(2) F. Canzoneri, « Gazz. Chim. It. », *36*, 372 (1906).

(3) Per maggiori indicazioni sulla chimica dell'acido oleanolico cfr. Simonsen e Ross, vol. V, ed. Cambridge University press (1957).

In tempi più recenti, vogliamo ricordare gli studi di Vanzetti [4] sull'*olivile*, di Panizzi [5] sull'*oleuropeina*, e l'isolamento nelle foglie di olivo di due acidi, identificati con l'acido 10–16 diidrossi esadecanoico e l'acido 9, 10, 18 triidrossi octadecanoico [6].

Interessante dal punto di vista del nostro lavoro è una ricerca condotta da Parisi nel 1931 [7]. In questo lavoro Parisi riporta l'isolamento dalla polpa fresca delle olive di una sostanza che è stata da lui identificata con l'« oleanolo » di Powers e Tutin.

L'identificazione è basata sul punto di fusione in miscela dei derivati acetilici dell'oleanolo ricavato dalle foglie e della sostanza estratta dalla polpa delle olive.

Non vengono peraltro riportati valori di analisi elementare e di poteri rotatori delle sostanze esaminate.

Nello stesso lavoro Parisi accenna all'isolamento di « acido oleanolico quasi puro » dalle sanse di olivo.

Questo lavoro ci ha indotto a esaminare nuovamente i prodotti di estrazione delle sanse dell'olivo. A tale scopo, ci siamo procurati un notevole quantitativo di sanse, da cui era stato estratto con benzina l'olio che ancora vi era contenuto dopo la spremitura. Il residuo disoleato e secco è stato sottoposto per brevissimo tempo a ventilazione per eliminare la parte nocciolosa (frattumi) dalle cosidette « bucchiette » che costituiscono per l'appunto il materiale di partenza da noi usato [8].

Per estrazione in continuo con etere etilico di tale materiale, si ottiene un residuo verdastro che, dopo trattamento con carbone attivo, fornisce per cristallizzazione da etanolo diluito un prodotto grezzo, che presenta un punto di fusione non netto fra 240–250° [9].

Allo scopo di purificare tale materiale, abbiamo acetilato a caldo con anidride acetica in piridina un campione di esso, ottenendo con buona resa un acetilderivato (I), facilmente purificabile per cristallizzazione da etere–eptano, che fonde a 235–237°, e possiede un $[\alpha]_D^{20} = +31$ ($CHCl_3$).

L'analisi di campioni accuratamente seccati nel vuoto a 100° porta ad una formula $C_{34}H_{52}O_6$.

La sostanza (I), che presenta carattere acido, non ha massimi nell'U.V., è insatura al tetranitrometano e, nello spettro infrarosso, presenta bande a 1735, a 1690, e a 1656 cm^{-1}.

Per saponificazione a caldo di (I) con potassa metanolica al 5 % si ottiene un acido (II) pf. 267–269°, $[\alpha]_D^{20} = +43°$ (in piridina); + 60° (in $CHCl_3$–Me-

(4) B. L. Vanzetti, « Rend. Acc. Lincei », *19*, 421–424 (1934).

(5) L. Panizzi, M. L. Scarpati, G. Oriente, « Gazz. Chim. It. », *90*, 1449, 1960.

(6) M. Passerini, M. Ridi, P. Papini, « Ann. Chim. », *43*, 201 (1953); G. D. Meakins, R. Swindells, « J. Chem. Soc. », *1959*, 1044.

(7) E. Parisi, G. De Vito, « Ann. Chim. », *21*, 323 (1931).

(8) Le sanse da noi estratte sono state conservate in luogo secco per tre anni.

(9) Il sig. G. Gravano, che qui si ringrazia, ha fornito una attiva collaborazione durante l'isolamento di tale prodotto.

tanolo 4 : 1), la cui analisi elementare si accorda con la formula $C_{30}H_{48}O_4$, e il cui spettro infrarosso presenta bande a 3400, a 1695 ed a 1658 cm^{-1}.

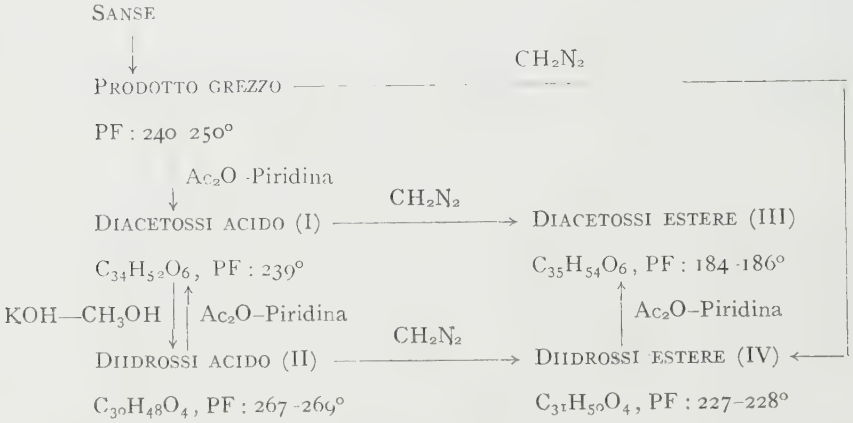
Dall'esame degli spettri infrarossi e dalle formule brute dei due composti possiamo ritenere che durante il trattamento con base del prodotto (I) si saponifichino due gruppi acetilici, ottenendosi così da un diacetossiacido il diidrossi acido corrispondente.

Tale ipotesi è confermata dal fatto che per acetilazione del diidrossi acido (II) si riottiene il diacetossi acido (I).

Dei due prodotti (I) e (II) si sono preparati con diazometano i corrispondenti esteri metilici: il diacetossiestere (III), pf. 184–186°, $[\alpha]_D^{20} = +34°$ ($CHCl_3$) la cui analisi elementare conferma la formula $C_{35}H_{54}O_6$, e il diidrossi estere (IV), pf. 227–228°, $[\alpha]_D^{20} + 60°$ ($CHCl_3$) la cui analisi corrisponde alla formula $C_{31}H_{50}O_4$.

Il diidrossi estere (IV) fornisce per acetilazione il diacetossiestere (III). L'esterificazione diretta del prodotto grezzo estratto dalle sanse fornisce in buona resa il prodotto (IV).

I risultati sopra esposti sono riportati nello schema 1:



SCHEMA 1.

Abbiamo caratterizzato in tal modo la natura delle funzioni ossigenate: dei quattro atomi di ossigeno presenti nella molecola (II), due sono idrossili acetilabili, e pertanto probabilmente primari o secondari, e due costituiscono un gruppo carbossilico.

La reazione positiva con tetranitrometano dei quattro prodotti finora descritti, e la presenza nello spettro infrarosso di tali sostanze di bande a 1656 e 819 cm^{-1} fanno pensare alla presenza in tali molecole di uno o più doppi legami.

Per verificare tale ipotesi, abbiamo sottoposto il diacetossiacido (I) a riduzione catalitica in acido acetico con biossido di platino.

Tale trattamento ha fornito (I) inalterato. Analogo risultato negativo si ottiene eseguendo la stessa operazione sul diidrossi estere (IV).

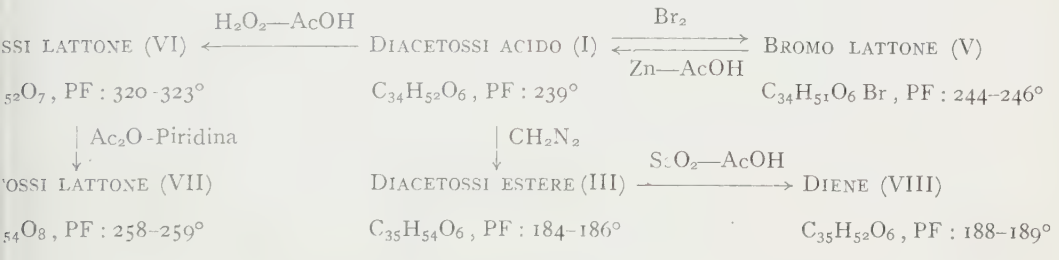
Che nella molecola sia effettivamente presente un doppio legame, e che esso si trovi in posizione γ–δ rispetto al carbossile, viene dimostrato dal trattamento di (I) con Br_2 in metanolo [10].

Si ottiene infatti con tale reazione un prodotto neutro (V), che fonde a 244–246°, e possiede un $[\alpha]_D^{20} = +27°$ ($CHCl_3$). Il prodotto (V), saturo al tetranitrometano, fornisce analisi elementari che si accordono bene con la formula $C_{34}H_{51}O_6Br$, e presenta nello spettro infrarosso una banda a 1780 cm^{-1}, tipica dei γ–lattoni, e una banda a 1740 cm^{-1}, riferibile ai due gruppi acetato presenti nella molecola, mentre non presenta più la banda a 1658 cm^{-1}.

È noto dalla chimica dei triterpeni che il doppio legame 12–13 dei triterpeni pentaciclici del tipo della α e della β amirina non è idrogenabile cataliticamente. È noto anche che, quando in una struttura pentaciclica del tipo citato abbiamo un doppio legame in 12–13 e un carbossile in 28 (è questo appunto il caso dell'acido oleanolico), per reazione con bromo si forma un bromolattone, che presenta nell'infrarosso una banda a 1780 cm^{-1}, tipica dei γ–lattoni (cfr. fig. 1).

Per trattamento con zinco e acido acetico del bromolattone così formatosi si ripristinano il doppio legame e il carbossile nelle posizioni iniziali.

Ciò si verifica anche nel nostro caso. Trattando infatti (V) con zinco e acido acetico, abbiamo riottenuto il composto (I) (cfr. schema 2).



Schema 2.

Questa analogia di comportamento ci ha spinto ad effettuare sul prodotto (I) un'altra reazione tipica dei prodotti che presentano una posizione reciproca del carbossile e del doppio legame quale incontriamo nell'acido oleanolico, e precisamente la reazione con H_2O_2 in acido acetico che dà luogo alla formazione di un idrossilattone (cfr. fig. 1).

Sottoponendo (I) a tale trattamento si ottiene infatti un idrossilattone (VI), pf. 320–323°, $[\alpha]_D^{20} = -5°$ ($CHCl_3$), la cui analisi è in buon accordo con la formula $C_{34}H_{52}O_7$ attesa. Per acetilazione di (VI) si ottiene un acetossi lattone (VII), pf. 258–259°, $\alpha_D^{20} = +15°$ ($CHCl_3$), la cui analisi elementare porta ad una formula $C_{36}H_{54}O_8$ (cfr. schema 2).

(10) La posizione β–γ è esclusa dato che né l'acido (II) né alcun altro appropriato derivato presenta la facilità alla decarbossilazione propria degli acidi β–γ–insaturi.

Lo spettro infrarosso di (VII) presenta una banda a 1780 cm^{-1}, attribuibile ad un γ–lattone, ed una banda di acetato a 1735 cm^{-1}.

Sia (VI) che (VII) dànno reazione negativa con tetranitrometano.

L'insieme delle reazioni finora riportate ci dimostra che nella molecola (II) è presente un solo doppio legame, non idrogenabile cataliticamente. Ammettendo per il diidrossi acido (II) la formula bruta $C_{30}H_{48}O_4$ [11] se ne deduce che la molecola ha una struttura pentaciclica.

Un utile dato per la elucidazione di tale struttura ci è fornito dalla reazione del diacetossiestere (III) con SeO_2 in acido acetico alla temperatura di ebollizione.

Si ottiene con buona resa un prodotto (VIII), pf. 188–189° $[\alpha]_D^{20} = -139°$ ($CHCl_3$) la cui analisi di C e H è in buon accordo con la formula $C_{35}H_{52}O_6$. Si tratta di un diene coniugato, che presenta nello spettro U.V. tre massimi a 260 mμ (lg ε 4,30), 251 mμ (lg ε 4,47), 243 mμ (lg ε 4,25). Questi tre massimi sono tipici del diene $^{\Delta 11, 12-13, 18}$ che si può ottenere per reazione con SeO_2 in acido acetico dai derivati della β amirina [12] (cfr. schema 2).

Ricapitolando i dati sperimentali finora raccolti, possiamo concludere che la sostanza da noi isolata [13], per la quale proponiamo il nome di « acido maslinico », è un acido triterpenico pentaciclico contenente due gruppi idrossilici primari o secondari e un doppio legame non idrogenabile.

Il doppio legame deve trovarsi in posizione γ–δ rispetto al carbossile. Lo scheletro pentaciclico appartiene molto probabilmente al gruppo delle β–amirine.

Proseguiamo le nostre ricerche allo scopo di chiarire in tutti i suoi dettagli la struttura dell'acido maslinico.

Ringraziamo il prof. A. Quilico, che ci ha guidati e consigliati nel corso del presente lavoro.

(11) I dati analitici a nostra disposizione ci fanno preferire la formula $C_{30}H_{48}O_4$ alla formula $C_{30}H_{50}O_4$ che, a priori, non può venire esclusa.

(12) L. Ruzicka, G. Müller, H. Schellemberg, « Helv. Chim. Acta », *22*, 767 (1939); D. H. R. Barton, C. J. W. Brooks, « J. Chem. Soc. », *1951*, 257. Cfr. anche C. Djerassi, J. A. Henry, A. J. Lemin, T, Rios, G. H. Thomas, « J. Am. Chem. Soc. », *78*, 3783 (1956).

(13) L'esame della letteratura ci permette di escludere che il triterpene da noi isolato sia identico ad alcuno degli acidi triterpenici $C_{30}H_{48}O_4$ a struttura conosciuta finora riportati.

Chimica organica. — *Gascromatografia di idrocarburi fenantrenici* (*). Nota di Franco Piozzi e Paola Vita-Finzi, presentata (**) dal Socio A. Quilico.

Nel corso di ricerche condotte in collaborazione da uno di noi allo scopo di determinare la struttura dell'*attrattiligenina* (1), si è presentato il problema di risolvere una miscela molto complessa di idrocarburi fenantrenici. Data l'impossibilità di separare i diversi componenti mediante metodi puramente chimici, ci si è trovati nella necessità di mettere a punto un metodo di identificazione e separazione per via cromatografica.

Sebbene negli ultimi due anni siano apparse in letteratura alcune Note riguardanti la gascromatografia di idrocarburi aromatici policiclici, tali lavori riferiscono solo lo studio di miscele di composti aventi struttura molto diversa tra di loro, come si verifica nel caso di sostanze provenienti dal catrame di carbon fossile. Non ci risulta invece che sia stata ancora descritta la separazione di idrocarburi isomeri od omologhi ad eguale scheletro ciclico, come nel caso dei fenantreni da noi studiato.

Mentre per i risultati ottenuti nella risoluzione della miscela naturale proveniente dall'attrattiligenina si rimanda ad una futura comunicazione, la presente Nota riferisce sui risultati raggiunti nello studio di miscele preparate artificialmente con idrocarburi fenantrenici sintetici.

Poiché nella miscela naturale erano presenti alchil-fenantreni monosostituiti nelle posizioni 1 e 2, oppure bisostituiti nelle posizioni 1–7, abbiamo limitato il nostro studio a composti di questo tipo (2).

Per le nostre ricerche disponevano dei seguenti idrocarburi: *fenantrene; 1-metil-fenantrene; 2-metil-fenantrene; 2-etil-fenantrene; 1,7-dimetil-fenantrene* (pimantrene); *1-metil-7-etil-fenantrene; 1-metil-isopropilfenantrene* (retene). Abbiamo anche utilizzato il *3-metil-fenantrene* per studiare sui monometil-fenantreni la separazione di idrocarburi isomeri.

Circa le apparecchiature, i gascromatografi usati sono stati l'apparecchio Fractovap mod. B della Carlo Erba e l'apparecchio Gasofract 300 della ditta dott. Virus (Germania).

Il primo è munito dell'accessorio per temperature superiori a 200° (colonna e rivelatore si trovano a temperature diverse; il campione frazionato nella colonna viene successivamente bruciato in un tubo di CuO ad alta

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Generale del Politecnico di Milano.

(**) Nella seduta del 10 dicembre 1960.

(1) T. Ajello, F. Piozzi, A. Quilico e V. Sprio, questi « Rendiconti » [8], *28*, 545 (1960); « Chim. e Ind. », *42*, 876 (1960).

(2) Si tratta del caso più comune riscontrabile nello studio dei prodotti naturali, dato che la maggioranza dei composti diterpenoidici fornisce questi tipi di alchil-fenantreni.

temperatura, e le singole frazioni rivelate come anidride carbonica; il rivelatore a termoconduttività è a temperatura ambiente per ottenere maggiore sensibilità); gas di trasporto azoto puro; colonne a spirale di rame, diametro interno 4 mm, lunghezze variabili.

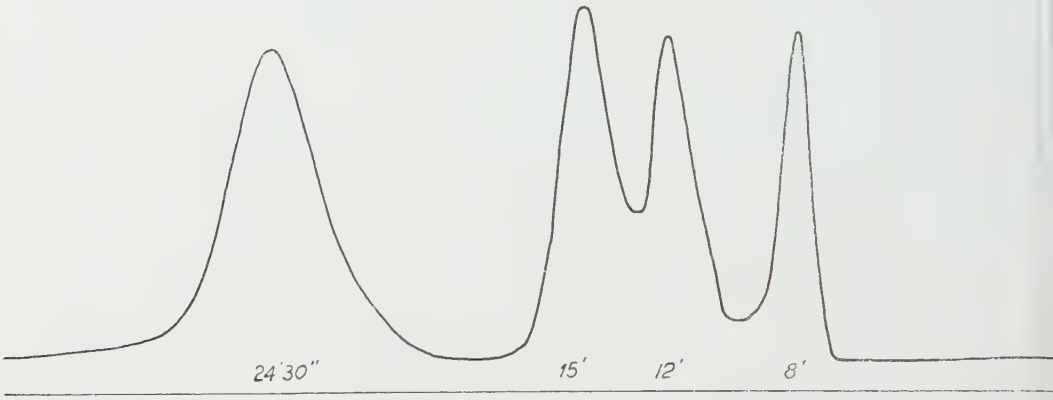


Fig. 1. – Colonna tipo *a*: fenantrene, 1–metil–fenantrene, 2–etil–fenantrene, retene.

Il secondo ha un rivelatore a termistori sensibile anche ad alta temperatura, per cui non è necessario bruciare la sostanza; gas di trasporto idrogeno; colonne a spirale di rame, diametro interno 4 mm, lunghezza 1,80 m.

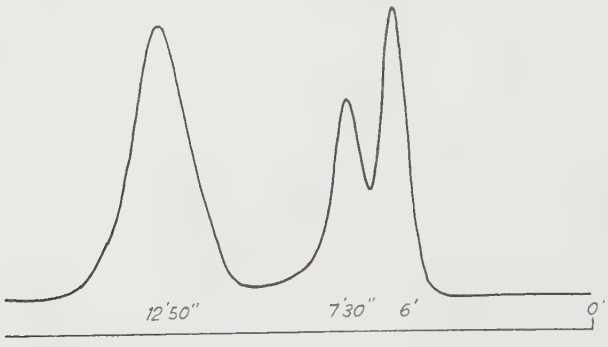


Fig. 2. – Colonna tipo *b*: fenantrene, 3–metil–fenantrene, retene.

Si è usata come materiale di supporto la Celite C 22 (30–60 mesh) della Carlo Erba. Con diversi liquidi di partizione si sono preparate colonne delle lunghezze sotto indicate, impiegate nelle condizioni seguenti:

a) colonna di 1 m su Fractovap; riempimento Apiezon L al 20 %; temperatura della colonna 250°; temperatura del rivelatore 25°; temperatura del fornetto di combustione 750°; flusso di azoto 2 l/h (differenza di pressione tra l'entrata e l'uscita della colonna 0,5 kg/cm^2);

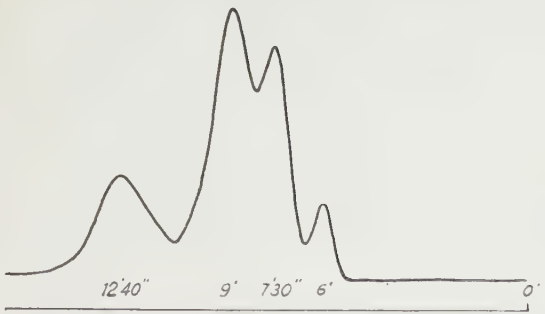


Fig. 3. – Colonna tipo *b*: fenantrene, 2–metil–fenantrene, 2–etil–fenantrene, retene.

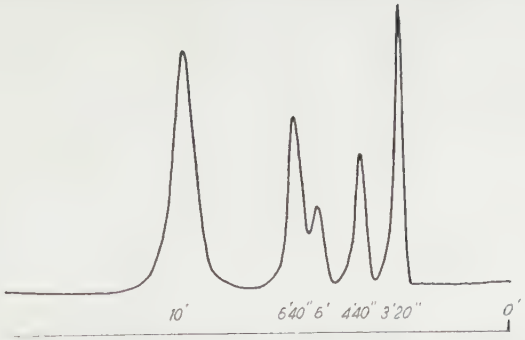


Fig. 4. – Colonna tipo *c*: fenantrene, 2 metil–fenantrene, 2–etil fenantrene, pimantrene, retene.

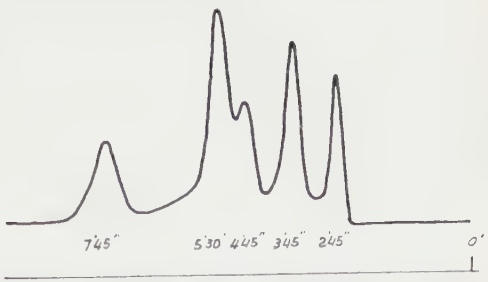


Fig. 5. – Colonna tipo *d*: fenantrene, 2 metil–fenantrene, 2 etil fenantrene, pimantrene, retene.

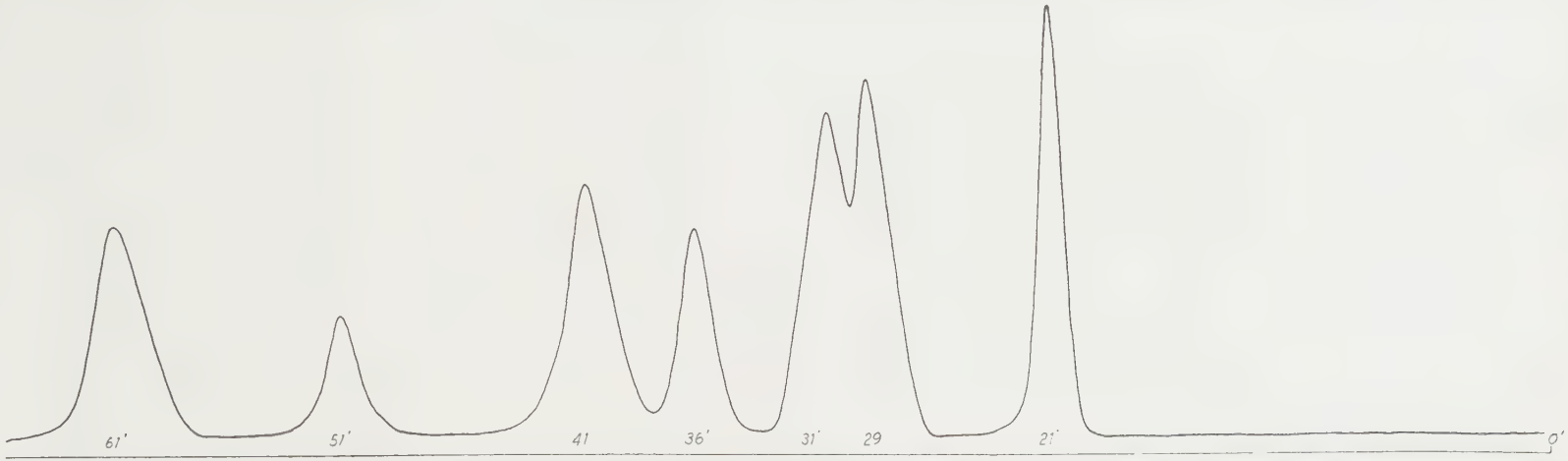


Fig. 6. – Colonna tipo *e*: fenantrene, 2–metil–fenantrene, 1–metil–fenantrene, 2–etil–fenantrene, pimantrene, 1–metil–7–etil–fenantrene, retene.

b) colonna di 0,6 m su Fractovap; riempimento polisuccinato di dietilenglicole al 20 %; temperatura della colonna 225°, del rivelatore 25°, del fornetto 750°; flusso di azoto 2 l/h (differenza di pressione 0,42 kg/cm²);

c) colonna di 1 m su Fractovap; riempimento olio di silicone SF/96 [3] al 16,5 %; temperatura della colonna 220°, del rivelatore 25°, del fornetto 750°; flusso di azoto 1,3 l/h (differenza di pressione 0,5 kg/cm²);

d) colonna di 1,8 m su Gasofract; riempimento olio di silicone SF/96 al 16,5 %; temperatura della colonna e del rivelatore 250°; flusso di idrogeno e differenza di pressione, numero guida 54;

e) colonna di 2,5 m su Fractovap; riempimento olio di silicone SF/96 al 16,5 %; temperatura della colonna 250°, del rivelatore 25°, del fornetto 750°; flusso di azoto 0,75 l/h (differenza di pressione 0,62 kg/cm²).

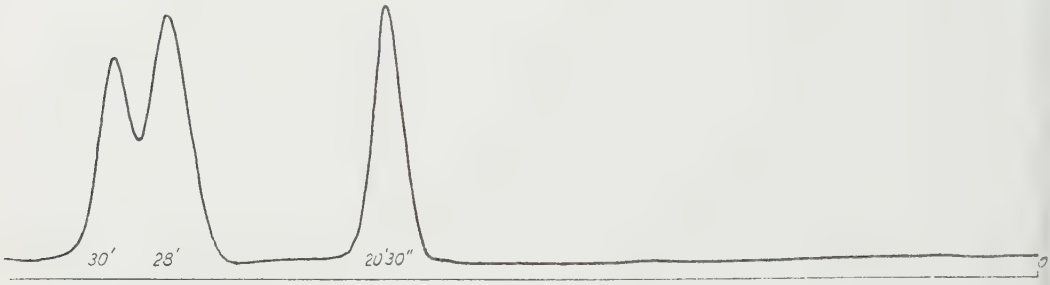


Fig. 7. – Colonna tipo *e*: fenantrene, 2–metil–fenantrene, 1–metil–fenantrene.

Le miscele da separare sciolte in toluene puro, sono state iniettate in quantità di 20 o 30 μl con una microsiringa Perkin–Elmer da 40 μl.

Come risulta dai grafici e dalla tabella sotto riportati, il riempimento con Apiezon L permette una discreta separazione dei termini omologhi. Il riempimento però non è molto stabile alle alte temperature: dopo qualche diecina di ore la colonna non permette più una sufficiente separazione, e i tempi di ritenzione variano con l'invecchiamento della colonna.

Il riempimento con polisuccinato permetterebbe già una buona separazione con colonne di soli 0,6 m, ma il liquido di partizione è poco stabile oltre i 200° [4].

Il riempimento con olio di silicone SF/96 dà i migliori risultati. La sostanza è molto resistente alle alte temperature; con colonne da m 1 a m 1,80 si ha una sufficiente separazione degli omologhi e degli isomeri di struttura (pimantrene e 2–etil–fenantrene), mentre alcuni isomeri di posizione (monometil–fenantreni) si separano invece con una colonna da m 2,5. Per tale colonna si è determinato un numero di piatti teorici di circa 3000, riferito al retene.

(3) Prodotto commerciale della ditta Comar. Dall'esame dello spettro infrarosso abbiamo desunto che si tratta di un metil–silicone con tracce di fenil–silicone.

(4) Probabilmente si avrebbero risultati migliori con polisuccinati di glicoli superiori al dietilenico.

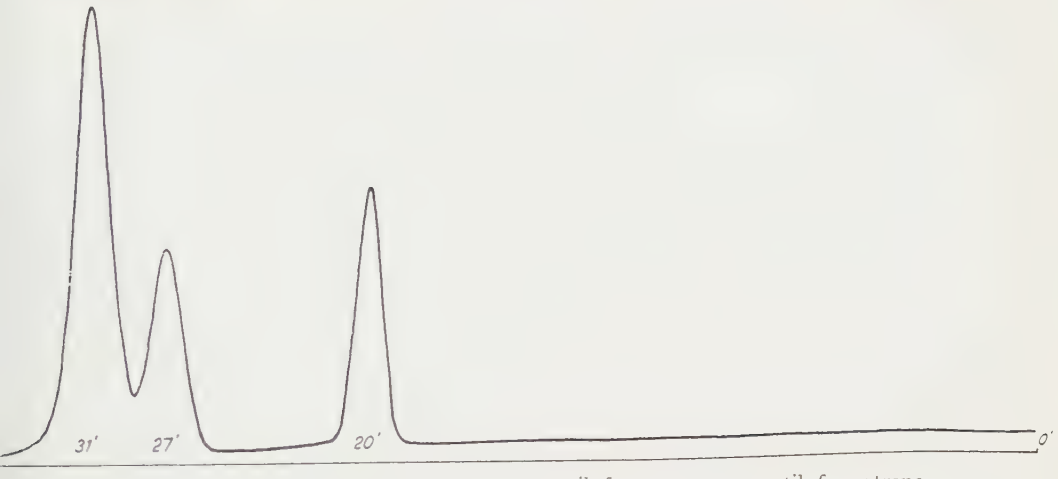


Fig. 8. – Colonna tipo *e*: fenantrene, 3-metil-fenantrene, 1-metil-fenantrene.

Nella tabella vengono riportati il tempo effettivo di ritenzione di ogni composto (media di più operazioni) espresso in minuti, e i rapporti tra i singoli tempi e quello del fenantrene non sostituito; tale rapporto (tempo relativo) viene indicato con T_R. È preferibile riferire i risultati in questa notazione perché i rapporti sono molto più costanti dei tempi di ritenzione, i quali sono soggetti a fluttuazioni spesso non trascurabili.

Tabella I.

	Apiezon L 1 m		Polisuccinato 0,6 m		SF/96 1 m		SF/96 1,8 m		SF/96 2,5 m	
	t	T_R	*t*	T_R	*t*	T_R	*t*	T_R	*t*	T_R
fenantrene . . .	8′	1,00	6′	1,00	3′20″	1,00	2′45″	1,00	21′	1,00
3-metil-	—	—	7′30″	1,25	—	—	—	—	27′	1,30
2-metil-	—	—	7′30″	1,25	4′40″	1,40	3′45″	1,35	29′	1,35
1-metil-	12′	1,50	—	—	—	—	—	—	31′	1,47
2-etil-	15′	1,87	9′	1,50	6′	1,80	4′45″	1,71	36′	1,71
pimantrene . . .	—	—	—	—	6′40″	2,00	5′30″	1,95	41′	1,95
1-metil-7-etil- .	—	—	—	—	—	—	—	—	51′	2,43
retene	24′30″	3,07	12′50″	2,12	10′	3,00	7′45″	2,82	61′	2,96

Si deduce che la separazione dei termini omologhi e degli isomeri di struttura è sufficientemente agevole; più difficile invece la separazione dei picchi dovuti agli isomeri di posizione. Così è possibile risolvere la miscela

1–metil–fenantrene con 2–metil–fenantrene, oppure la miscela 1–metil–fenantrene con 3–metil–fenantrene, dato il divario sufficiente tra i loro tempi di ritenzione. È invece impossibile separare il 2–metil–fenantrene dal 3–metil–fenantrene stante l'estrema vicinanza del loro T_R (a meno di non usare colonne di lunghezza molto superiore).

È da sottolineare il fatto che è possibile dedurre con sufficiente precisione in base ai valori di T_R il numero totale degli atomi di carbonio delle catene laterali degli alchil–fenantreni presenti in una miscela incognita. Questo metodo, associato alla determinazione degli spettri nell'infrarosso che permette di riconoscere se l'idrocarburo è mono o bisostituito, è di grande interesse già per un primo riconoscimento della probabile struttura di un alchil–fenantrene incognito.

Gli studi in questo campo vengono proseguiti.

Chimica organica. — *Idroborazione* (*). – *Reazione del diborano con il* Δ^4*–3–chcto–colestene* (**). Nota I di Luciano Caglioti e Gianfranco Cainelli (***), presentata (****) dal Socio A. Quilico.

Il grande progresso che in questi ultimi anni ha fatto la chimica degli idruri metallici ha reso facilmente accessibile il diborano, B_2H_6, che fino a poco tempo fa era considerato poco più che una curiosità di laboratorio. Ciò ha stimolato numerosi ricercatori a studiarne in modo più completo le interessanti proprietà ed in particolare la sua facile e rapida addizione ad i più vari tipi di legami non saturi (1). Tra tutti vogliamo citare H. C. Brown e coll. alle cui interessanti pubblicazioni si deve in gran parte il rinnovato interesse dei chimici per le applicazioni di questo idruro del boro.

È stato per esempio dimostrato che l'addizione dell'idruro al gruppo carbonile di aldeidi e chetoni dà luogo alla formazione dei borati degli alcooli corrispondenti (1 *d*), così che esso costituisce un ulteriore reagente per ridurre ad alcooli tale tipo di composti carbonilici.

Ma certo più interessante è il comportamento del diborano verso le olefine. In ambiente etereo esso si somma infatti con grande facilità già a temperatura ambiente ai doppi legami formando alchilborani del tipo BR_3 o BHR_2 o BH_2R a seconda delle condizioni usate e del tipo di olefina studiata (1 *a*, 1 *e*).

Tale classe di composti presenta una certa somiglianza di proprietà chimiche con gli analoghi derivati dei metalli alcalini e con il reattivo di Grignard oltre naturalmente che con gli alluminio–alchili solo che possiede generalmente, e specialmente nei termini superiori, una diminuita reattività. Così essi sono facilmente ossidabili ed autossidabili; per trattamento con acqua ossigenata ed alcali ad esempio essi formano in buona resa i corrispondenti alcooli e questo, oltre a fornire un semplice mezzo analitico per determinare la posizione e la stereochimica del legame C—B in tali composti, rappresenta anche un eccellente metodo preparativo per ottenere alcooli saturi da olefine.

Ma la caratteristica più interessante dell'addizione del diborano ai doppi legami è costituita dalla direzione e dalla stereochimica dell'addizione. In essa infatti il boro, di cui sono note le proprietà elettrofile deter-

(*) Abbiamo ritenuto di tradurre così il termine « Hydroboration » usato nella letteratura chimica in lingua inglese. Vedi ad esempio la nota (1).

(**) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Generale del Politecnico di Milano, Centro di Chimica Industriale del C.N.R.

(***) In ordine alfabetico.

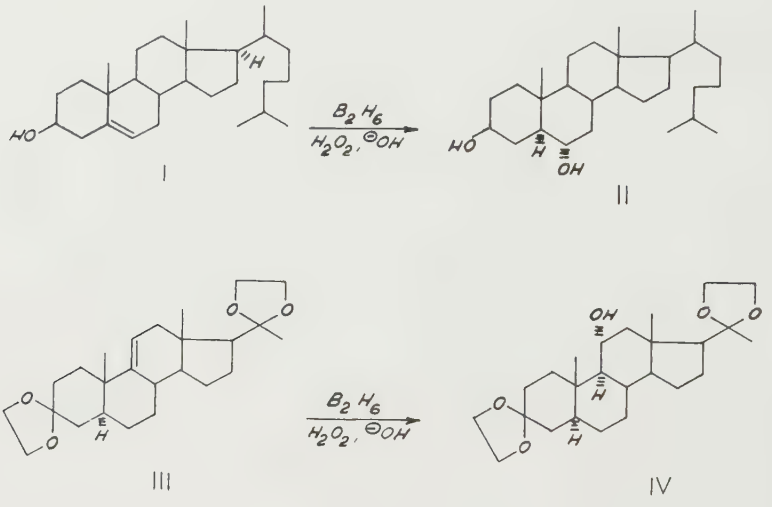
(****) Nella seduta del 10 dicembre 1960.

(1) Cfr. ad esempio: *a*) H. C. Brown, B. C. Subba Rao, « J. Am. Chem. Soc. », *81*, 6428 (1959); *b*) D. T. Hurd, « J. Am. Chem. Soc. », *70*, 2053 (1948); *c*) H. C. Brown, G. Zweifel, « J. Am. Chem. Soc. », *81*, 1512 (1959); *d*) H. C. Brown, H. I. Schlesinger, A. B. Burg, « J. Am. Chem. Soc. », *61*, 673 (1939); *e*) H. C. Brown, B. C. Subba Rao, « J. Org. Chem. », *22*, 1135 (1957); *f*) H. C. Brown, B. C. Subba Rao, « J. Am. Chem. Soc. », *82*, 681 (1960).

minate dalla sua particolare conformazione elettronica, attacca sempre l'atomo di carbonio meno sostituito o, più in generale, il punto a maggiore densità elettronica [2].

Siffatto comportamento fa sì che gli alcooli che da tali addotti derivano per ossidazione, si possono considerare da un punto di vista formale come il prodotto di una idratazione anti–Markownikoff al doppio legame stesso. Un caratteristico comportamento l'addizione presenta anche dal punto di vista stereochimico. Infatti lo studio di adatte olefine cicliche [3,4] ha messo in evidenza che la idroborazione seguita da ossidazione dà luogo ad una idratazione *cis* dalla parte meno impedita del doppio legame, presumibilmente attraverso una idroborazione pure *cis*.

L'idroborazione seguita da ossidazione ha trovato applicazione anche nel campo degli steroidi. Così il colesterolo (I) è stato trasformato con alte rese in 3β–6α–di–idrossi–5α–colestano (II) e il Δ^9–3,3–20,20–di–etilendiossi–5α–pregnene (III) in 3,3–20,20–di–etilendiossi–11α–idrossi–5α–pregnano (IV) [4,5].



SCHEMA I.

Anche dieni coniugati sono stati sottoposti all'idroborazione. Con un eccesso di diborano essi subiscono dapprima una addizione 1,2 seguita poi da una 3,4. Con una opportuna scelta delle condizioni operative è risultato

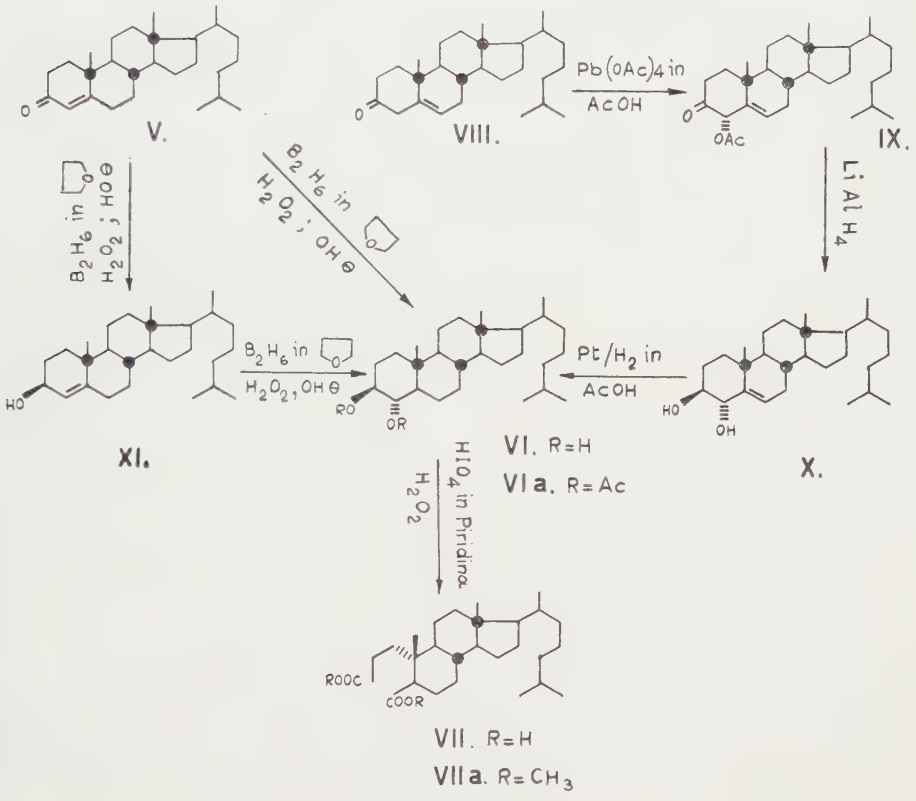
(2) Attualmente esiste una notevole incertezza per quanto riguarda la specie chimica che dà luogo alla addizione. Data la grande differenza nella velocità di reazione in assenza o in presenza di un etere è probabile che la specie attiva sia in quest'ultimo caso il complesso BH_3–Etere. Sulla esistenza e formazione di tali complessi cfr. per esempio H. E. WIRT, « J. Phys. Chem. », *62*, 870 (1958).

(3) H. BROWN, G. ZWEIFEL, « J. Amer. Chem. Soc. », *81*, 247 (1959).

(4) *a*) W. J. WECHTER, « Chem. Ind. » (London), 294 (1959); *b*) S. WOLFE, M. NUSSIM, Y. MAZUR, F. SONDHEIMER, « J. Org. Chem. », *24*, 1034 (1959).

(5) M. NUSSIM, F. SONDHEIMER, « Chem. Ind. » (London), 400 (1960).

possibile ottenere, dopo ossidazione, sia gli alcooli allilici [6] sia i rispettivi 1,4–dioli [7]. Un caso speciale è quello descritto da F. Sondheimer per il 7–deidrocolesterolo, un diene omoanulare. Per idroborazione di tale sostanza si ottiene il Δ^6–3 β–idrossi–5 α–colestene, per spiegare la formazione del quale F. Sondheimer ammette una addizione 1,4 del diborano [8].



Schema II.

Alla luce di questi risultati ci è sembrato interessante esaminare il comportamento di fronte al diborano di un doppio legame coniugato con un gruppo chetonico. Per questo studio abbiamo scelto come materiale di partenza il Δ^4–3–cheto–colestene (V), sostanza facilmente accessibile e della quale sarebbe stato agevole identificare i prodotti di trasformazione.

Per trattamento di (V) con un eccesso di diborano in soluzione di tetraidrofurano e successiva ossidazione con acqua ossigenata ed alcali del prodotto di reazione (non isolato) si ottiene, in resa del 75 %, un *diolo* $C_{27}H_{48}O_2$

(6) S. Winstein, E. L. Allred, J. Sonnenberg, « J. Amer. Chem. Soc. », *81*, 5833 (1959).

(7) H. C. Brown, G. Zweifel, « J. Amer. Chem. Soc. », *81*, 5832 (1959); R. Koester, « Ang. Chem. », *70*, 414 (1958); ibid., *71*, 520 (1959).

(8) Y. Mazur, M. Nussim, F. Sondheimer, « Proc. Chem. Soc. », 314 (1959).

(VI, R=H) P.F. 236–237° che dà con anidride acetica in piridina un *diacetato* (VI *a*, R=Ac) P.F. 160°. L'ossidazione del diolo (VI) con acido periodico seguita da trattamento con acqua ossigenata della miscela di reazione, porta ad un *diacido* (VII *a*, R=H) che è stato caratterizzato attraverso la formazione del diestere metilico. (VII *a*, R=CH_3) P.F. 121–123°.

Le proprietà chimiche e le costanti fisiche del diolo (VI) e dei suoi derivati rendeva assai probabile che esso fosse identico al 3 β–4 α–diidrossi–5 α–colestano, già preparato da L. F. Fieser e coll. [9] che lo ottennero con la sequenza di reazioni sotto indicate.

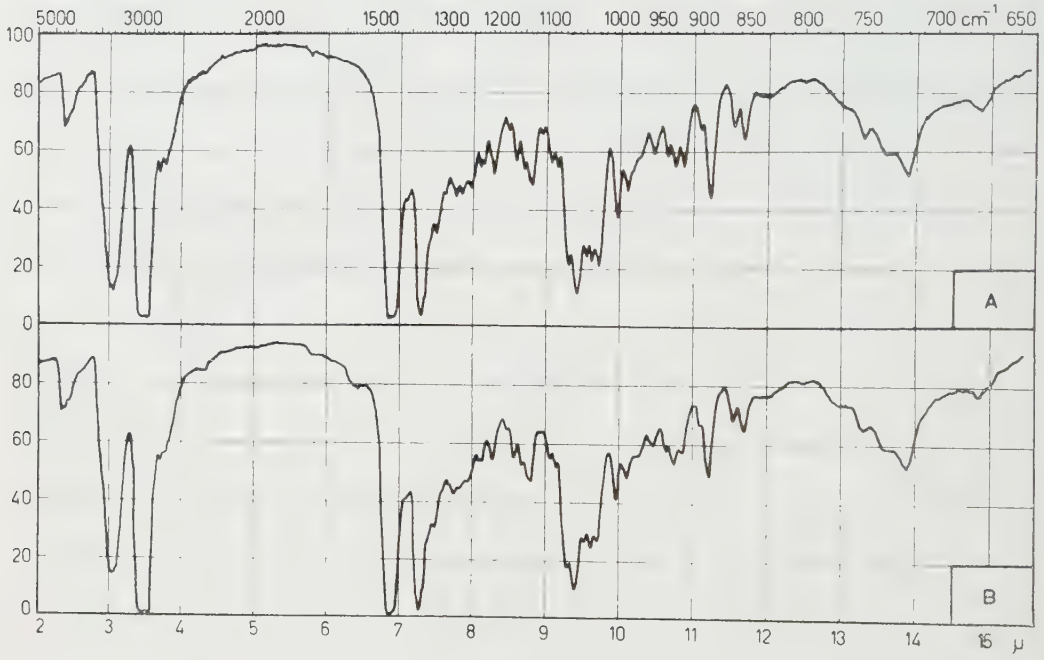


Fig. 1.

A. Spettro IR in olio di paraffina di (VI).
B. Spettro IR in olio di paraffina del 3 β–4 α–di–idrossi–5 α–colestano preparato secondo L. F. Fieser.

Per trattamento del Δ^5–3–cheto–colestene (VIII) con tetra–acetato di piombo essi ottengono un *cheto–acetato insaturo* al quale è stata da loro assegnata la formula (IX); la riduzione di (IX) con idruro di litio e alluminio fornisce il *diolo insaturo* (X) che per idrogenazione catalitica porta appunto al 3 β–4 α–di–idrossi–5 α–colestano (VI, R=H).

Seguendo questo procedimento abbiamo preparato un campione di 3 β–4 α–di–idrossi–5 α–colestano che al P.F., al P.F. in miscela e al potere rotatorio specifico è risultato identico al diolo (VI) da noi ottenuto. Anche gli spettri IR, riportati in fig. 1, ne confermano l'identità.

(9) L. F. Fieser, R. Stevenson, « J. Am. Chem. Soc. », *76*, 1728 (1954).

L'esame cromatografico delle acque madri del diolo (VI) ha permesso di isolare in una resa aggirantesi sul 10 % un *alcool insaturo* (XI) $C_{27}H_{46}O$ P.F. 133–135°. Questo prodotto è risultato identico per P.F., P.F. in miscela, potere rotatorio e spettro infrarosso con il Δ^4–3 β–idrossi–colestene sintetizzato secondo il procedimento descritto dalla letteratura [10].

Che il Δ^4–3 β–idrossi–colestene possa essere un prodotto intermedio nel passaggio da (V) a (VI) è dimostrato dal fatto che esso, per trattamento con diborano nelle condizioni descritte, si trasforma in maniera quantitativa nel diolo (VI). Per confermare questa nostra ipotesi abbiamo trattato un campione di colestenone con un difetto di diborano. In tal caso, dopo l'ossidazione con acqua ossigenata ed alcali, oltre al prodotto di partenza non è stato possibile isolare altro che il già descritto Δ^4–3 β–idrossi–colestene.

Gli esperimenti sopra riportati ci permettono di concludere che l'addizione dell'idruro al colestenone procede in due stadi: nel primo l'idruro somma al gruppo carbonilico fornendo il borato allilico corrispondente. Nel secondo stadio anche il doppio legame reagisce con il diborano permettendoci di ottenere per ossidazione con acqua ossigenata alcalina della miscela di reazione il diolo (VI).

La reazione da noi descritta per l'alto grado di stereospecificità e per le buone rese che la caratterizzano presenta senza dubbio un notevole interesse anche dal punto di vista preparativo.

Ringraziamo il prof. A. Quilico per l'interesse con cui ha seguito il presente lavoro.

Parte sperimentale (in coll. con A. Reggio).

Trattamento con diborano del Δ^4*–3–cheto–colestene* (V): 3 β , 4 α*–di–idrossi–* 5 α*–colestano* (VI).

Gr. 1 di Δ^4–3–cheto–colestene sciolti in 25 cm^3 di tetraidrofurano assoluto sono stati trattati a 0° con un eccesso di diborano in azoto anidro. Dopo due ore si aggiungono 10 cm^3 di KOH metanolica al 5 % e 2 cm^3 di acqua ossigenata al 30 %, e si bolle a ricadere per 5 minuti.

La miscela di reazione viene gettata in acqua ed estratta con etere. L'estratto etereo viene lavato con una soluzione di solfato ferroso e con acqua e seccato su solfato sodico. Per evaporazione dell'etere si ottengono 1060 mg di prodotto cristallino. Dopo ricristallizzazione da tetraidrofurano–eptano si ottengono 750 mg di prodotto con P.F. 235–236°. Ulteriore cristallizzazione fornisce un prodotto a P.F. costante 237–238°.

$$[\alpha]_D^{22^\circ} = + 22 \quad (c = 0{,}9 \text{ in } CHCl_3)$$

(10) P. L. Plattner, H. Heusser, A. B. Kulkarni, « Helv. Chim. Acta », *32*, 265 (1949).

Analisi:

	trov. % :	C 80,04	H 11,68
per $C_{27}H_{48}O_2$	calc. % :	C 80,14	H 11,96

Lo spettro infrarosso in olio di paraffina (cfr. fig. 1) mostra una banda a 3400 cm^{-1}, assegnabile a gruppo idrossilico.

Si tratta del diolo (VI).

Questo prodotto è stato confrontato con il prodotto (VI) preparato secondo Fieser: i due prodotti risultano identici per P.F., P.F. misto, potere rotatorio specifico e spettro infrarosso (cfr. fig. 1).

Acetilazione del 3 β, 4 α*–di–idrossi–*5 α*–colestano* (VI): 3 β, 4 α*–diacetossi–*5 α*–colestano* (VI *a*, R = Ac).

Mg 65 di (VI) vengono trattati con 5 cm^3 di anidride acetica e 5 cm^3 di piridina a 60° per un'ora. Per evaporazione dei reattivi sotto vuoto si ottengono 68 mg di prodotto, che ricristallizzato due volte da etere–metanolo fonde costantemente a 160°

$$[\alpha]_D^{22^\circ} = +32 \ (c = 1{,}2 \text{ in } CHCl_3)$$

Analisi:

	trov. % :	C 76,10	H 10,52
per $C_{31}H_{52}O_4$	calc. % :	C 76,19	H 10,72

Lo spettro infrarosso in olio di paraffina mostra bande a 1725, 1250 attribuibili al gruppo acetato. Si tratta del diacetato (VI *a*, R = Ac).

Trasformazione del 3 β, 4 α*–di–idrossi–*5 α*–colestano nel diestere* (VII *a*, R=CH_3).

Mg. 260 di (VI) in 35 cm^3 di metanolo e 10 cm^3 di piridina si trattano a temperatura ambiente per 40 minuti con 1,5 gr di acido periodico sciolti in 7 cm^3 di H_2O. Per normale trattamento si ottengono 250 mg di residuo che vengono ossidati per 4 ore a 100° con 1 cm^3 di H_2O_2 al 30 % in 5 cm^3 di acido acetico. Dopo estrazione con etere e ripartizione in parti acida e neutra per trattamento con Na_2CO_3 2 N, si ottengono 100 mg di parte neutra e 160 mg di parte acida, che dopo esterificazione con diazometano fornisce un prodotto cristallino. Detto prodotto, dopo tre ricristallizzazioni da metanolo diluito presenta punto di fusione costante 121–123°.

$$[\alpha]_D^{22^\circ} = -11 \ (c = 1{,}14 \text{ in } CHCl_3).$$

Analisi:

	trov. % :	C 75,59	H 10,84
per $C_{29}H_{50}O_4$	calc. % :	C 75,28	H 10,89

Lo spettro mostra una banda a 1730 cm^{-1} assegnabile a gruppo carbossimetilico.

Isolamento di Δ^4*–4* β*–idrossi–colestene* (XI) *dalle acque madri del diolo* (VI).

600 mgr di prodotto grezzo proveniente dalla evaporazione delle acque madri del diolo (VI) vengono cromatografati su una colonna di 13 gr di allumina neutra di attività II. Con benzolo vengono eluiti 150 mgr di prodotto cristallino che, dopo cristallizzazione da metanolo diluito, fonde a 133–135°, $[\alpha]_D^{22} = +42$ ($c = 1{,}027$).

Il prodotto è identico per P.F., P.F. in miscela, potere rotatorio e spettro infrarosso a un campione autentico di Δ^4–3 β–idrossi–colestene.

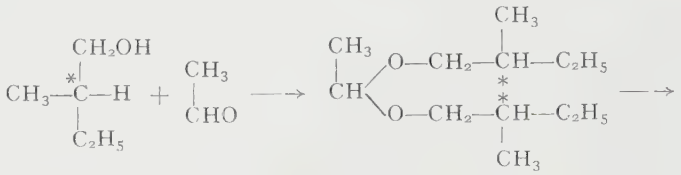
Trattamento con diborano del Δ^4*–3* β*–idrossi–colestene.*

386 mgr di Δ^4–3 β–idrossi–colestene sciolti in 20 ml di tetraidrofurano vengono trattati con un eccesso di diborano in atmosfera di azoto anidro a 0°. Dopo un'ora si aggiungono 10 ml di KOH metanolica al 5 % e 3 ml di acqua ossigenata al 30 %. La miscela di reazione viene quindi diluita con acqua ed estratta con etere. Gli estratti eterei vengono lavati con acqua fino a neutralità ed essicati su Na_2SO_4. Dopo allontanamento del solvente, si ottengono 380 mgr di un prodotto grezzo cristallino che, cristallizzato da tetraidrofurano–eptano, forniscono 230 mgr del diolo (VI).

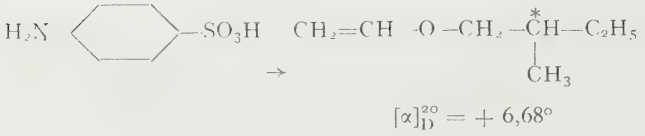
Chimica. — *Polimeri vinilici otticamente attivi.* – III. *Poli–[(S)–2–Metil–butil]–vinil–etere* (*). Nota di Piero Pino, Gian Paolo Lorenzi e Salvatore Previtera, presentata (**) dal Socio G. Natta.

Proseguendo le ricerche [1] [2] sui polimeri vinilici otticamente attivi, è stato preparato con processi stereospecifici e non stereospecifici il polimero del (+)[(S)–2–metil–butil]–vinil–etere.

Il monomero è stato ottenuto a partire dal (–)(S)–2–metil–1–butanolo ($[\alpha]_D^{25} = -5{,}81°$, $n_D^{25} = 1{,}4089$) attraverso lo schema seguente:



$[\alpha]_D^{25} = -5{,}81°$ $\qquad$ $[\alpha]_D^{21} = +1{,}81°$



$[\alpha]_D^{20} = +6{,}68°$

La purezza ottica minima del monomero venne determinata idrolizzandolo e confrontando l'attività ottica del (–)(S)–2–metil–1–butanolo rigenerato con quella dell'alcool di partenza. L'alcool isoamilico ottenuto per idrolisi aveva, dopo rettifica, $n_D^{25} = 1{,}4086$ ed $\alpha_D^{20}(l = 1) = -4{,}76°$: la purezza ottica minima risultò quindi superiore al 98 %.

Il (+)[(S)–2–metil–butil]–vinil–etere, purificato accuratamente per trattamento con sodio e distillazione su $LiAlH_4$ [3] aveva p. eb. 112,5–113° C, in buon accordo i dati di letteratura [4], ed indice di rifrazione $n_D^{20} = 1{,}4092$. Esso venne polimerizzato con miscele di $Al(i\text{–}C_4H_9)Cl_2$ e $Al(i\text{–}C_4H_9)_2Cl$ a 0° C ed a – 78° C, e con $AlBr_3$ a – 78° C, aggiungendo lentamente il monomero al catalizzatore disciolto in toluolo; in accordo con quanto descritto da Natta e coll. [3] il polimero risultò nel primo caso amorfo ed a peso molecolare relativamente basso, nel secondo caso parzialmente cristallino, a temperatura ambiente, e ad alto peso molecolare, e nel terzo caso debolmente cristallino a temperatura ambiente (Tabella I).

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Organica Industriale dell'Università di Pisa con il contributo della Società Montecatini.

(**) Nella seduta del 10 dicembre 1960.

Caratteristiche dei polimeri del (+)[(S)-2-metil-butil]-vinil-etere ottenuti in condizioni diverse usando toluolo come solvente.

Polimero	Condizioni di polimerizzazione: Catalizzatore	t, °C	Solubilità: Acetone	Solubilità: Etere	$[\eta]$ a 30° C in toluolo	p. f.	*Osservazioni*
(A)	miscela di $Al(i\text{-}C_4H_9)_2Cl$ e $Al(i\text{-}C_4H_9)Cl_2$	0	sol.	sol.	0,24	—	Polimero lineare non cristallizzabile
(B)	$AlBr_3$	— 78	sol.	sol.	0,61	50–60 (*a*)	Polimero debolmente cristallino a temperatura ambiente (*c*)
(C)	miscela di $Al(i\text{-}C_4H_9)_2Cl$ e $Al(i\text{-}C_4H_9)Cl_2$	— 78	insol.	sol.	1,00	55–65 (*a*) 60–65 (*b*)	Polimero cristallino a temperatura ambiente (*c*)

(*a*) Determinato mediante osservazioni polarimetriche in base alla scomparsa dei fenomeni di birifrangenza.
(*b*) Determinato con un apparecchio di Kofler.
(*c*) Ringraziamo il prof. G. Natta, il prof. P. Corradini e il dott. I. W. Bassi per l'esame del campione mediante i raggi X.

Tabella II.

Dipendenza dalla temperatura dell'attività ottica di polimeri del (+)[(S)-2-metil-butil]-vinil-etere in soluzione toluenica ed in assenza di solventi.

Polimero (*a*)	In assenza di solventi: $[\alpha]_D$ a 23° C	$[\alpha]_D$ a 65° C	$[\alpha]_D$ a 90° C	In soluzione toluenica: g/100 cc a 25° C	$[\alpha]_D$ (*b*) a 12,5° C	$[\alpha]_D$ (*b*) a 25° C	$[\alpha]_D$ (*b*) a 50° C	$[\alpha]_D$ (*b*) a 70° C
(A)	+ 5,3° ± 0,2°	+ 5,1° ± 0,2°	+ 5,1° ± 0,2° (*d*)	9,58	+ 4,0° ± 0,1° (*d*)	+ 4,3° ± 0,1°	+ 4,7° ± 0,1° (*d*)	+ 5,1° ± 0,1°
(B)	(*c*)	+ 5,5° ± 0,1°	+ 5,6° ± 0,1°	10,54	+ 4,0° ± 0,1°	+ 4,3° ± 0,1°	+ 4,8° ± 0,1° (*d*)	+ 5,2° ± 0,1° (*d*)
(C)	(*c*)	+ 5,0° ± 0,2° (*d*)	+ 5,2° ± 0,2° (*d*)	10,54	+ 3,7° ± 0,1°	+ 4,1° ± 0,1°	+ 4,5° ± 0,1° (*d*)	+ 4,9° ± 0,1° (*d*)

(*a*) Vedi Tabella I.
(*b*) Nel calcolo di $[\alpha]_D$ si è assunto, per le soluzioni, una densità uguale a quella del solvente.
(*c*) Valori non riproducibili e variabili a seconda della posizione della cella nel polarimetro. Il polimero presenta fenomeni di birifrangenza.
(*d*) Valori calcolati per estrapolazione grafica da curve $[\alpha]_D$–temperatura.

Il polimero amorfo (A) ottenuto a 0° C aveva uno spettro I.R. non molto diverso da quello del polimero cristallino (C) dimostrando di possedere, analogamente a quest'ultimo, una struttura sostanzialmente lineare.

Contrariamente a quanto osservato nel caso delle poli–α–olefine [2], l'attività ottica del poli–[(S)–2–metil–butil]–vinil–etere in soluzione di idrocarburi ed allo stato fuso non dipende dalla stereoregolarità del polimero (Tabella II).

I valori del potere rotatorio molare riferito ad una unità monomerica sono in tutti i casi esaminati dell'ordine di grandezza di quelli degli [(S)–2–metil–butil]–alchil–eteri [5].

La variazione dell'attività ottica con la temperatura sia dei polimeri fusi sia delle soluzioni in toluolo è dell'ordine di grandezza di quella del monomero e oltre 12 volte inferiore a quella osservata per le soluzioni del poli–(S)–5–metil–1–eptene cristallino [2].

Nel caso delle soluzioni tolueniche il coefficiente di temperatura dell'attività ottica fra 12° C e 70° C, che nel caso delle poli–α–olefine era sempre risultato negativo e molto elevato, ha un valore positivo ($\Delta [\alpha]_D / \Delta t = + 0{,}02$) dell'ordine di grandezza di quello del monomero.

Raffreddando lentamente fino a temperatura ambiente il polimero cristallino ed il polimero parzialmente cristallino fusi in una cella di vetro, si osserva, al disotto della temperatura di completa fusione, un graduale aumento dell'angolo di rotazione letto al polarimero fino a valori 6 volte maggiori di quelli letti per il polimero fuso.

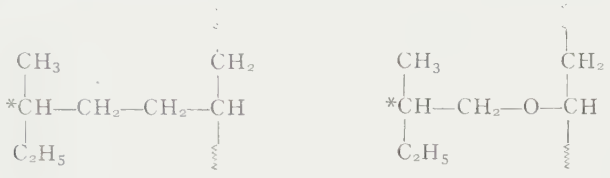
Tali valori sono però poco riproducibili e sono da collegarsi, almeno in parte, a fenomeni di birifrangenza lineare derivanti da orientamenti preferenziali nella crescita dei cristalli di polimero forse indotti dalle pareti della cella usata.

Confrontando i valori del potere rotatorio e del suo coefficiente di temperatura per il polimero amorfo (A) con quelli trovati per i polimeri a grado di stereoregolarità più o meno elevato, (C) e (B), si osserva una concordanza assai notevole; in base a ciò si può concludere che la conformazione delle macromolecole parzialmente isotattiche del poli–[(S)–2–metil–butil]–vinil–etere in soluzione toluenica a temperature fra 12° C e 70° C ed allo stato fuso non è tale da contribuire in modo notevole all'attività ottica del polimero.

Ciò può derivare, ad esempio, dall'assenza di conformazioni spiraliformi allo stato fuso ed in soluzione, ovvero dalla equivalenza fra tratti spiralizzati in un senso e nel senso opposto.

Riteniamo che la diversità di comportamento fra i polimeri delle α–olefine otticamente attive ed il poli–[(S)–2–metil–butil]–vinil–etere sia da attribuirsi alla maggiore mobilità delle catene laterali dei poli–vinil–eteri rispetto a quella delle poli–α–olefine; in base a tale ipotesi l'induzione asimmetrica da parte del gruppo isoamilico sulla conformazione della catena principale, che appare in modo evidente quando il gruppo isoamilico è congiunto alla catena principale attraverso un gruppo metilenico (I), non si

manifesterebbe per il polimero fuso o in soluzione quando il gruppo isoamilico è legato alla catena principale attraverso un atomo di ossigeno (II).



(I) (II)

Bibliografia.

[1] P. Pino, G. P. Lorenzi e L. Lardicci, «Chimica e Industria», *42*, 712 (1960).
[2] P. Pino e G. P. Lorenzi, «J. Am. Chem. Soc.», *82*, 4745 (1960).
[3] G. Natta, G. Dall'Asta, G. Mazzanti, U. Giannini e S. Cesca, «Angew. Chem.», *71*, 205 (1959).
[4] M. G. Voronkov, «Zhur. Obshcheĭ Khim.», *20*, 2060 (1950).
[5] Ph. A. Guye e L. Chavanne, «Bull. Soc. Chim. France» [3], *15*, 275 (1896).

Geologia. — *Contributo alla conoscenza della serie paleozoica metamorfica nel Settore del Gennargentu.* Nota di Antonio Atzeni presentata (*) dal Corrisp. S. Vardabasso.

In continuazione delle mie ricerche sul Paleozoico della zona di Laconi (F° 218 della Carta d'Italia I.G.M.), di cui ho riferito in altra sede [1], mi sono occupato del complesso scistoso–cristallino inciso dall'Alto Flumendosa nei dintorni di Gadoni. (Propaggini sud–occidentali del Gennargentu).

Mentre nella Sardegna meridionale è possibile procedere, nell'ambito della serie paleozoica, ad una sia pure approssimata suddivisione delle formazioni stesse su basi paleontologiche, man mano che ci si sposta verso nord il complesso scistoso si presenta sempre più metamorfico e di conseguenza diventa meno agevole il riconoscimento dei vari piani.

Scopo di questa mia Nota pertanto è quello di tentare il riconoscimento e la suddivisione della serie scistoso–cristallina nella zona.

Nel fare questo tentativo, ho preso le mosse da due località citate dal Taricco [8] e precisamente la regione Genna Entu, all'altezza del nuraghe indicato con la quota di m. 882, e quella del Riu Brebegargius nel punto in cui confluisce col Riu Araxinus, affluente di destra del Flumendosa (tavoletta IV S.E. F° 218). Il sucitato autore ha infatti rinvenuto in dette località (vedi schizzo allegato), una ricca fauna graptolitica, che io stesso non ho avuto difficoltà a rintracciare, con le seguenti specie di *Monograptus falcatus*, *M. hemipristis* e *M. belophorus* (1).

In entrambe queste località le graptoliti sono contenute entro scisti neri o plumbei, più o meno grafitici, che in complesso presentano una quasi costante uniformità di facies, come in tutta la Sardegna meridionale (tipo località classica di Goni). In regione Genna Entu, per esempio, a partire dalla confluenza del Rio Talesi con l'Iscara su Linu la serie (vedi colonna stratigrafica N° 2) è costituita dal basso verso l'alto da:

1° scisti neri o plumbeo–nerastri m 60;

2° scisti grafitici a minutissima stratificazione m 20* (2);

3° scisti arenaceo–micacei giallognoli m 10;

4° scisti neri fogliettati, untuosi al tatto, con intercalazioni di scisti biancastri m 20* (2);

5° calcescisti con sottilissime intercalazioni argillose m 20;

6° calcari cristallini neri o cerulei ad *Orthoceras* con scisti intercalati m 35;

7° scisti neri grafitici m 20.

(*) Nella seduta del 10 dicembre 1960.

(1) Circa l'esatta posizione stratigrafica, nella serie gotlandiana, di queste specie di graptoliti ho consultato vari autori (vedi bibliografia); da essi risulta che sono riferibili al Gala–Taranon rispettivamente al Wenlock.

(2) Gli orizzonti segnati con l'asterisco sono quelli fossiliferi.

Alquanto più complessa, per le notevoli variazioni di facies, si presenta invece la serie, pure riferibile al Gotlandiano, nella zona attraversata dal Riu Araxinus (vedi colonna stratigrafica N° 3); essa infatti a partire dal fondo valle del rio su menzionato dal basso verso l'alto è costituita da:

1° scisti plumbei o neri grafitici m 50;

2° scisti arenaceo–micacei (sericitici) grigi talora rossastri con intercalazioni di quarziti minute m 40;

3° scisti neri grafitici m 10;

4° quarziti grigiastre m 15;

5° scisti arenaceo–micacei plumbei con notevoli impregnazioni limonitiche nella parte alta m 15;

6° arenarie grossolane quasi una «grauwacke» m 10;

7° scisti filladici grigio–chiari o plumbei m 10;

8° banchi di arenarie più o meno grossolane con scisti intercalati m 20;

9° scisti plumbei con intercalazioni di scisti grafitici finemente stratificati m 20;

10° scisti arenaceo–micacei grigio giallognoli (in corrispondenza della mulattiera Ortuabis–Gadoni) m 30;

Superata la sella, in corrispondenza della su citata mulattiera, salendo verso la quota m 800 il terreno si presenta molto coperto da detriti di falda; inoltre si ha un succedersi di filoni di porfido, talora di notevole potenza, per lo più in giacitura concordante entro la serie metamorfica. Questi hanno indotto nelle rocce incassanti un elevato grado di metamorfismo, per cui è molto difficile poter procedere sul terreno ad una distinzione delle varie facies.

In attesa di passare ad un esame dettagliato del materiale raccolto, dirò qui che le rocce predominanti sono in prevalenza corneane, spesso compattissime e assai dure e dai colori più vari (da giallo–verdognole a verde–azzurre fino a nere), granatiti e quarziti. Quest'ultime diventano sempre più frequenti, man mano che si procede verso la parte stratigraficamente più alta, fino a costituirne l'unico rappresentante. In molti punti la massa quarzitica si presenta attraversata, per lo più in concordanza con la scistosità, da numerosi filoncelli e vene di quarzo, meno spesso aplitici, per cui la roccia localmente può assumere un aspetto molto simile alle arteriti.

Meno complicata, ma ugualmente ricca di termini, è la serie a partire dal M. Coromedus fino alla valle del Riu Araxinus e da qui al M. Scova (vedi colonna stratigrafica N° 1). Anche nella valle dell'Araxinus gli scisti grafitici hanno rivelato una ricca fauna a graptoliti. La serie lungo questo profilo è costituita dal basso verso l'alto da:

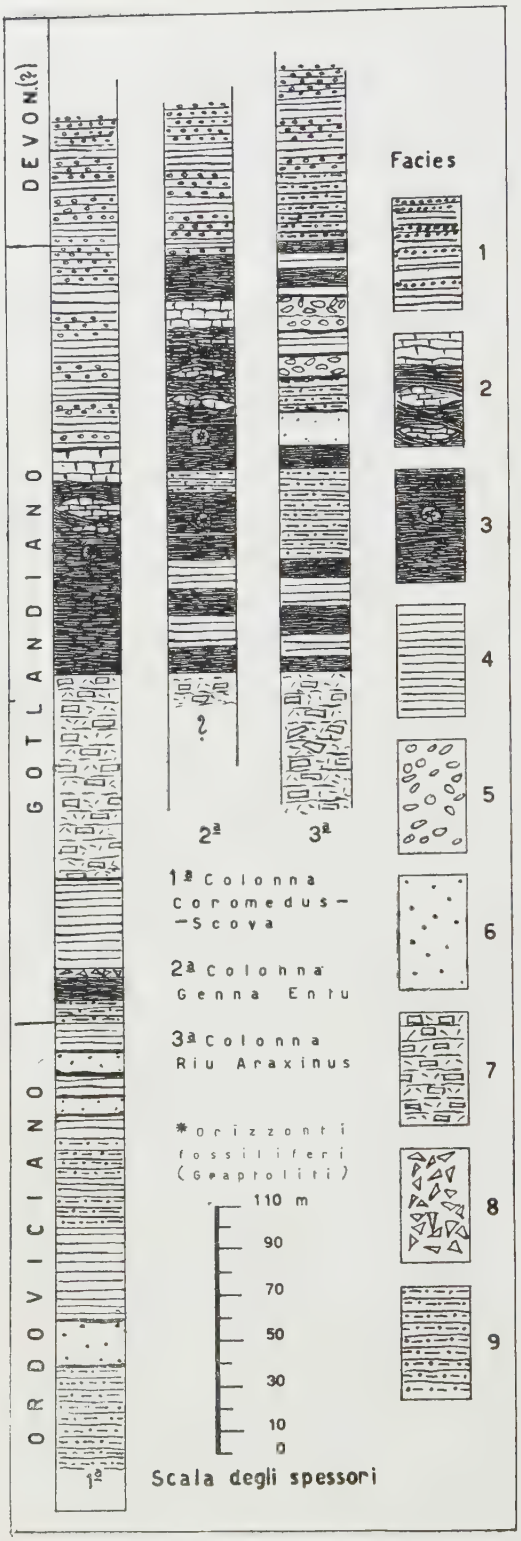
1° scisti grigio–scuri sensibilmente arenacei m 10;

2° scisti neri grafitici talora rossastri con tendenze violacee alla base (molto simili ai ben noti scisti cambrici di Cabitza) m 10;

3° puddinghetta passante a vero e proprio conglomerato m 4;

4° scisti plumbeo–nerastri m 40;

5° porfiroidi m 80–100;



COLONNE STRATIGRAFICHE DEL COMPLESSO PALEOZOICO SCISTOSO–CRISTALLINO NEL SETTORE DEL GENNARGENTU

Spiegazione delle Facies

1) Complesso scistoso–quarzitico « Postgotlandiano » (Devonico?)

2) Complesso scistoso–calcareo, con lenti e strati di calcari scuri reticolati (equivalenti dei calcari ad *Orthoceras*).

3) Scisti neri, finemente stratificati, grafitici, talvolta graptolitici.

4) Scisti ardesiaci prevalenti nell'Ordoviciano, ma presenti in misura subordinata anche in orizzonti stratigraficamente più elevati (Gotlandiano, Postgotlandiano).

5) Arenarie grossolane talvolta fortemente cementate (« Grauwacke »).

6) Quarziti più spesso bianche in banchi a vari livelli.

7) Complesso eruttivo dei porfiroidi e degli scisti verdi.

8) Puddinga poligenica scistosa verdastra a ciottoletti di quarzo, passante a conglomerato minuto.

9) Scisti arenaceo–micacei, più o meno feldspatici.

SCHIZZO GEOLOGICO STRUTTURALE DEL COMPLESSO PALEOZOICO
ALLE PROPAGGINI SUD-OCCIDENTALI DEL GENNARGENTU
Ciclo Ercinico
Filoni di quarzo
Lamprofirici (l)
Porfidi e porfiriti (π)
in dicch e filoni
Granito (γ)
Localita' fossilifere (graptoliti)
DIAGRAMMA STRATIGRAFICO
Copertura Mesozoica
Calcari e dolomie arenarie e argille - Giurese medio (g)
Serie Paleozoica
Scisti e quarziti - Devonico? (dv)
Porfiroidi (πδ) e scisti verdi
Scisti grafitici, calcari (gf) e calcescisri - Gotlandiano
Scisti ardesiaci o arenacei (or) Ordoviciano
R. Atzeni Cagliari 1960
ARITZO
Propaggini del Gennargentu
Genna Enru
980
Bruncu S. Elias
1083
M. sa Scova
1158
GADONI
Ortuabis
808
800
987
Riu Arboxinus
Miniera
Funtana Raminosa
795
893
M. Coromedus
Isola di Sardegna
SASSARI
NUORO
Gennargentu
Lumenduso
CAGLIARI
0 15 30 45 Km
(Tirso)
(Aroxisi)
(Lacon)
Tacco del Sarcidano
Lumenduso

6° scisti grafitici finemente stratificati m 60;

7° calcescisti e calcari cristallini in banchi potenti da due a cinque metri con intercalazioni di scisti grafitici m 40;

Oltre questa serie, che chiameremo scistoso–calcarea, si possono distinguere qui, rispettivamente a letto e a tetto, altri due complessi concordanti. L'inferiore si presenta fondamentalmente scistoso con subordinate intercalazioni arenacee o quarzitiche; quello superiore invece è costituito da un'alternanza di scisti plumbeo–nerastri e di quarziti, talora, in banchi potenti anche vari metri, con prevalenza della parte scistosa alla base e di quella quarzitica superiormente.

In tutte le sezioni esaminate, riferibili al Gotlandiano, la loro potenza, a prescindere dagli orizzonti porfiroidici, di cui diremo brevemente in seguito, non supera i 200 metri; questa, notoriamente, rappresenta la potenza massima attribuita al Gotlandiano in Sardegna. La serie sottostante appartiene all'Ordoviciano, al quale si passa qui senza lacune ed in perfetta concordanza. Inoltre la sua composizione litologica corrisponde, nel complesso, all'Ordoviciano di altre località della Sardegna, a documentazione paleontologica accertata.

L'Ordoviciano nella zona presa in esame è poco esteso e non si presta ad uno studio di dettaglio. Le mie osservazioni si riferiscono esclusivamente alla regione del M. Coromedus, dove ho riconosciuto la serie, che qui appresso riporto dal basso verso l'alto:

1° scisti quarzoso–micacei plumbei m 60–70;

2° quarziti minute m 20;

3° scisti ardesiaci (in più punti notevolmente iniettati lit par lit da filoncelli e vene di quarzo) m 40;

4° scisti quarzoso–micacei con filladi intercalate m 50;

5° alternanza di quarziti e scisti ardesiaci plumbei m 40.

Passando al complesso sovrastante al Gotlandiano, per esempio a M. Sa Scova, Bruncu S. Elias e nord–est di Gadoni, si constata una fitta alternanza di scisti plumbeo–nerastri, molto spesso granatiferi, che allorché sono decolorati assumono tonalità giallastre, e di quarziti micaceo–feldspatiche con prevalenza degli scisti inferiormente.

Dal punto di vista litologico, questo complesso presenta molte affinità con quello che lo stesso Taricco [10], nel Fluminese, ha attribuito al Postgotlandiano. L'unica sostanziale differenza consiste nella diversa giacitura; che è discordante nel Fluminese, concordante a quanto sembra, qui nella Barbagia. A prescindere dall'identità di facies e dalla posizione stratigrafica, l'attribuzione al Postgotlandiano e cioè probabilmente al Devonico si basa soprattutto sulla potenza della serie.

Infatti ai 200 metri del Gotlandiano, di cui si è detto, sono da aggiungere altri 300 metri e più della formazione in discussione; se si tiene poi conto delle eventuali intercalazioni vulcaniche, porfiroidiche, si raggiungono complessivamente spessori prossimi agli 800 metri.

Da questa precisazione stratigrafica del complesso paleozoico del settore del Gennargentu ne consegue una nuova interpretazione tettonica. Infatti il nostro « Postgotlandiano » verrebbe a coincidere con affioramenti in passato attribuiti all'Ordoviciano.

Più precisamente, la fascia di terreni postgotlandiani rappresentati nello schizzo allegato, compresa tra gli allineamenti calcarei del Gotlandiano che, dipartendosi dal M. Modighina [1] si raccordano verso ovest con quelli della zona di Funtana Raminosa, a sud, e quelli dell'asse Meana–Gadoni a nord, che era stata considerata in passato in posizione di anticlinale, costituisce in effetti un'ampia sinclinale.

Con questo assetto tettonico pare si accordi meglio la presenza di lembi di Permico, in facies di « Verrucano », fin'ora sconosciuti, visti recentemente in escursioni compiute sotto la guida del prof. Vardabasso. Sappiamo infatti che il Permico continentale in Sardegna è conservato di preferenza entro depressioni morfologico–strutturali del rilievo ercinico.

In questi ultimi tempi il « Postgotlandiano » sta acquistando nella stratigrafia del Paleozoico sardo un interesse sempre maggiore. Infatti sono stati attribuiti a questa formazione, dopo la segnalazione di S. Vardabasso [11] nell'Iglesiente, vaste aree nel settore delle miniere di Montevecchio da parte di Zuffardi [13]. Mi è sorto poi il dubbio che possano risalire a questo periodo anche alcuni vasti affioramenti del Sarrabus, oltre che per l'identità di facies anche per la giacitura. Così, il complesso scistoso–quarzitico del M. Niu Crobu (a sud–ovest di San Vito) sembrerebbe sovrastante al ben noto orizzonte a frammenti di lidite del Gotlandiano di M. Narba.

D'altronde è davvero poco comprensibile che ai potenti affioramenti calcarei devonici del M. Lora (200 m circa) e di Villasalto non facciano riscontro in nessuna altra parte della Sardegna, e segnatamente per quelle più vicine a dette località, formazioni coeve sia pure in facies diversa.

Ho accennato inizialmente ai porfiroidi in Barbagia; questi si presentano anche qui intercalati in concordanza nella serie sedimentario–metamorfica, riferibile al Gotlandiano fossilifero. Pare cioè che il vulcanismo dei porfiroidi non costituisca un caso isolato, ma sia un evento di carattere generale in tutto il Gotlandiano della Sardegna.

BIBLIOGRAFIA.

[1] ATZENI A., *Osservazioni sul Paleozoico della Sardegna. Il Paleozoico di Laconi*, « Sem. Fac. Scienze dell'Università », Cagliari 1960 (in corso di stampa).

[2] BUBNOFF S., *Geologie von Europa*, 2 Bd., 1 Teil, Berlin 1930.

[3] CAVINATO A., *Depositi Minerari*, Torino 1952. (Miniera di Ferro di Giacurru, pp. 111–113).

[4] CHERCHI A., *Sulla posizione ed età delle arenarie feldspatiche nel Paleozoico del Gerrei – Sardegna meridionale*, « Sem. Fasc. Sc. dell'Università », vol. XXIX, Cagliari 1959.

[5] GORTANI M., *La serie paleozoica nelle Alpi Carniche e nella Sardegna*, « Compt. Rend. XIV Congr. Geol. Inter. », Madrid 1927.

[7] JAEGER H., *Graptolithen und Stratigraphie des jüngsten thüringer Silurs*, « Ab. d. Deut. Ak. d. Wiss. », Berlin 1959.

[7] PŘIBYL A., *Bibliographic index of Bohemian silurian graptolites*, « Stat. Geol. Ust. », Praha 1949.

[8] TARICCO M., *Osservazioni geologico–minerarie sui dintorni di Gadoni e sul Gerrei*, « Boll. Soc. Geol. It. », vol. XXX, Roma 1911.

[9] TARICCO M., *Il Gotlandiano in Sardegna*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », vol. XXII, Roma 1913.

[10] TARICCO M., *Sul Paleozoico del Fluminese – Sardegna*, « Boll. R. Com. Geol. d'It. », vol. XLVIII, Roma 1920–21.

[11] VARDABASSO S., *Segnalazione del cosidetto « postgotlandiano » nell'Iglesiente settentrionale*, « Res. Ass. Min. Sarda », Iglesias 1941.

[12] VARDABASSO S., *Carta Geologica della Sardegna* – Scala 1 : 750.000 a cura Soc. Elettr. Sarda, Roma 1949.

[13] ZUFFARDI P. e SALVATORI I., *Sull'età dei terreni paleozoici di Montevecchio–Ingurtosu–Gennamari*, « Res. Ass. Min. Sarda », Iglesias 1955.

[14] ZUFFARDI P. e SALVADORI I., Tavoletta I S.E. F° 224 e IV S.O. Montevecchio F° 225. (*Carta Geol. d'Italia*), Firenze 1955.

[15] ZUFFARDI P. e SALVADORI I., Tavoletta IV N.O. Monte Arcuentu (*Carta Geol. d'Italia*). Firenze 1958.

Geologia. — *Osservazioni preliminari sull'età dei terreni preoligocenici del Monferrato* (*). Nota di GIULIO ELTER, presentata (**) dal Socio GB. DAL PIAZ.

Contrariamente ad una opinione molto diffusa nel Monferrato affiorano anche terreni mesozoici. Si tratta di rocce, databili come tali per il loro contenuto fossilifero, che prendono parte alla costituzione del complesso che affiora in corrispondenza dei nuclei delle strutture di tipo diapirico che caratterizzano questa regione.

Tale complesso è stato generalmente attribuito all'Eocene, mentre C. Beets (1940) vi ha distinto anche una parte mesozoica, ma unicamente in base alle analogie che essa presenterebbe con le « argille scagliose » dell'Appennino. Questi riferimenti parziali o totali all'Eocene del complesso in questione sono in realtà giustificati soltanto per quella parte più recente che corrisponde alla cosidetta facies gassiniana e che dovrebbe rappresentare essenzialmente, per C. Beets come per F. Sacco (1889, 1935), l'Eocene superiore. Non si può invece continuare a considerare acquisita l'età eocenica del substrato di questa formazione di Gassino, soltanto perché vi sono stati osservati intercalati calcari arenacei a Nummuliti e Discocicline. Si tratta infatti di tipi litologici identici per facies e associazione faunistica ad alcuni costituenti della formazione di Gassino ed è sempre stata loro attribuita la stessa età dei secondi. Non possono pertanto rappresentare delle intercalazioni stratigrafiche nel substrato della formazione di Gassino, come si è ritenuto perché la loro presenza non sembrava spiegabile in un altro modo. Se si tiene conto che il complesso che li ingloba è caotico, costituisce il nucleo di strutture diapiriche, è sempre in contatto tettonico con la sua copertura ed in molti tratti con terreni più recenti di quelli eocenici a facies gassiniana, appare evidente che si tratta in realtà di lembi della formazione di Gassino inglobati tettonicamente nel loro substrato. Nulla prova pertanto che in quest'ultimo siano rappresentate formazioni eoceniche, perché nessun fossile di tale età, all'infuori di quelli che provengono in realtà dalla sua copertura, vi è stato mai segnalato.

Per la formazione di Gassino, che è ovunque in contatto tettonico inferiormente con un complesso caotico in cui possono esserne state inglobate parti più o meno estese, anche là dove essa appare normalmente intercalata tra questo complesso ed i conglomerati oligocenici che la ricoprono, non possono venire considerati conosciuti il limite inferiore ed eventualmente

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Geologia dell'Università di Torino sotto gli auspici e con il contributo finanziario del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(**) Nella seduta del 10 dicembre 1960.

una parte basale di spessore non valutabile. Vi si possono distinguere comunque una parte più antica costituita da marne grigio verdastre caratteristiche, con intercalazioni sottili di arenarie talvolta conglomeratiche che si infittiscono verso il basso, ed una parte superiore in cui banchi o strati di calcari organogeni a Nullipore, passanti a calcari arenacei ed a arenarie calcaree da un lato, a conglomerati di interformazione ad elementi calcarei organogeni ed a cemento marnoso o arenaceo dall'altro, alternano con marne. Questa parte più recente ovviamente fossilifera lo è in modo particolare negli affioramenti della regione di Gassino da cui provengono quasi tutte le forme conosciute. Il loro valore cronologico non è però chiaro, perché le indicazioni di quelle più significative dal punto di vista stratigrafico ossia delle Nummuliti, che sono state descritte o elencate da A. Tellini (1888), L. Di Rovasenda (1892), G. Trabucco (1894), P. L. Prever (1907) e F. Sacco (1935), possono essere diverse anche per uno stesso orizzonte. Forme luteziane o più antiche sono state rinvenute infatti da questi studiosi, accanto ad altre di età certamente priaboniana, in quello che corrisponde ai banchi calcarei delle cave Defilippi e la stessa cosa è stata constatata negli orizzonti in cui erano aperte le cave del Caviggione e del Bertot, in cui per giunta alcuni di questi Autori segnalano la presenza di forme oligoceniche. Poiché l'orizzonte della cava Defilippi è considerato più antico dagli Autori citati di quello del Caviggione e quello delle cave del Bertot come il più recente dei tre, parrebbe ragionevole attribuire al Priaboniano il primo e al Lattorfiano gli altri due, ammettendo il rimaneggiamento delle Nummuliti che indicano età più antiche di queste. Si deve osservare tuttavia che, tenendo conto del fatto che la formazione di Gassino costituisce qui il nucleo di una anticlinale, è forse più verosimile, come ha indicato C. Beets (1940), che i calcari della cava Defilippi siano più recenti di quelli del Caviggione e che quelli delle cave del Bertot corrispondano al riapparire sul fianco opposto dell'anticlinale dei primi due orizzonti. A ciò è da aggiungere che la presenza di Nummuliti oligoceniche deve forse venire verificata, perché alcuni Autori non la segnalano, ma sopratutto che i dati relativi alla provenienza dei fossili, che sono stati raccolti nelle cave dei dintorni di Gassino, non sono sufficentemente precisi. Non ne è stato generalmente indicato infatti il tipo litologico che li conteneva, che poteva essere rappresentato in più di un caso da calcari zoogeni privi praticamente di cemento diagenetico e da conglomerati di interformazione che potrebbero derivare dalla risedimentazione dei primi e che alla pari di questi appaiono ben sviluppati nelle cave di Gassino. Ora è evidente che il significato cronologico di un fossile può variare in modo anche notevole se proviene dal cemento di questi conglomerati oppure dai loro elementi e dai calcari zoogeni.

Qualsiasi conclusione sull'età della parte superiore della formazione di Gassino non è come si vede possibile in base ai dati conosciuti. Si deve notare tuttavia che non vi è ragione per escluderne a priori il Lattorfiano, come si è fatto finora in base all'ipotesi che i conglomerati che ricoprono questa formazione corrispondano al Bartoniano come afferma P. L. Prever

(1907) o al Sestiano nella parte basale come pensa F. Sacco (1889, 1935). Le ragioni che indussero i due studiosi a ritenerli di tali età consistono nella presenza di Discocicline e di Nummuliti eoceniche. Ma poiché entrambi vi hanno anche segnalato delle forme indubbiamente oligoceniche delle seconde (*N. miocontortus*, *N. intermedius*, *N. fichteli*), è assai più verosimile che i fossili eocenici derivino dal substrato di questo orizzonte trasgressivo alla pari dei ciottoli di calcari di Gassino che vi si notano, anziché dimostrare un presunto carattere intermedio tra Eocene ed Oligocene della sua fauna o peggio l'età bartoniana di questa. Nulla dimostra poi che questi conglomerati indubbiamente oligocenici rappresentino l'Oligocene basale; la presenza di fossili rimaneggiati e la distribuzione stratigrafica di quelli che non lo sono non sono incompatibili con una loro età più recente, per esempio rupeliana.

L'Eocene deve essere certamente rappresentato nella formazione di Gassino d'altra parte, perché C. Beets (1940) ha rinvenuto esemplari di *Discocyclina scalaris* e di *Nummulites atacicus* nella sua parte inferiore. Non è neppure da escludere che tutto l'Eocene sia rappresentato in questa formazione di cui è sconosciuto il limite inferiore. Infine si deve anche considerare la possibilità di una lacuna in corrispondenza del contatto inferiore con il suo substrato, perché le intercalazioni di arenarie conglomeratiche che ne contraddistinguono la parte apparentemente più antica sono caratterizzate da elementi detritici provenienti da alcuni costituenti di quest'ultimo.

È conveniente conservare il termine di Liguriano per indicare il complesso di terreni costituenti il substrato della formazione di Gassino che F. Sacco ha distinto in questo modo. Per comodità di esposizione anzitutto, ma anche perché presentano quelle caratteristiche che questo autore considerava tipiche della facies liguriana o appenninica dell'Eocene anche se, anziché corrispondere ad una unica formazione di tale età, rappresentano un insieme eterogeneo di terreni, più antichi in buona parte se non totalmente.

Come ho indicato in un precedente lavoro (1956) si è in presenza di un complesso che ha subito verso la fine del Miocene un'intensa fratturazione dei costituenti più coerenti con penetrazione di quelli incompetenti lungo i piani di frattura ed inglobamento finale dei frammenti dei primi nella massa argillosa plastica che è risultata dalla migrazione tettonica dei secondi. Nell'insieme caotico che ne è risultato possono essere rappresentati anche lembi provenienti dalla copertura stratigrafica del Liguriano, a rigore da tutti i termini di questa di cui si nota la mancanza locale per cause tettoniche in corrispondenza delle strutture diapiriche di cui il Liguriano costituisce il nucleo. Si è già accennato ad inclusi di questo tipo provenienti dalla formazione di Gassino; a mio giudizio appartengono a lembi della copertura inglobati nel Liguriano le microfaune eoceniche superiori, oligoceniche e tortoniane che C. Socin (1953–1954) e R. Redini (1952) hanno segnalato in esso.

Anche se separato dagli inclusi della sua copertura il Liguriano corrisponde ad un insieme eterogeneo. Stabilirvi delle suddivisioni stratigrafiche

complete è praticamente impossibile date le condizioni di caoticità che lo caratterizzano nell'insieme. Non si deve credere tuttavia che queste si riscontrino ovunque. Esistono infatti anche delle zolle o dei pacchi di strati di una certa estensione in cui una parte delle caratteristiche stratigrafiche è osservabile abbastanza bene, grazie alle cave ed alle gallerie che vi sono state aperte per l'estrazione di calcari marnosi da cemento. C. Beets (1940) ha attribuito queste parti all'*Alteocän* e quelle più caotiche al Mesozoico o comunque ad « argille scagliose » più antiche delle prime. È verosimile che nelle seconde siano rappresentati i costituenti più antichi del Liguriano, anche se nulla vieta la presenza accanto ad essi di formazioni più recenti ed è anche possibile che la formazione da cui vengono estratti i calcari da cemento corrisponda alla parte più recente di questo complesso. Che questa ultima sia interamente riferibile all'Eocene è invece da escludere. In questa formazione costituita dall'alternanza di argille, arenarie calcaree glauconitiche e calcari più o meno marnosi a Fucoidi, Radiolari e spicule di Spugne ed in cui non si conoscevano fossili stratigraficamente significativi, ho potuto accertare la presenza di *Globotruncana stuarti* (De Lapp.) nelle arenarie glauconitiche e nei calcari marnosi. Vi è pertanto rappresentato il Maestrichtiano; verso la sommità più verosimilmente che verso la base, da quanto ho potuto osservare dai rapporti degli strati fossiliferi con gli altri costituenti.

Per gli altri costituenti del Liguriano le condizioni di osservazioni sono alquanto più sfavorevoli. In genere si possono osservare soltanto quelli più resistenti, in frammenti, più raramente in massi o blocchi di una certa dimensione, perché i componenti incoerenti sono praticamente indistinguibili nell'impasto argilloso che è derivato dal loro miscuglio tettonico e che corrisponde alle « argille scagliose » degli Autori. Nei primi sono distinguibili diversi tipi litologici, come calcari marnosi compattissimi grigi o verdi, arenarie feldispatiche a grana fine e come i precedenti prive di fossili determinabili, serpentine, calcareniti e conglomerati a piccoli elementi a Orbitoline, calcari selciferi a Radiolari e Calpionelle. Si debbono aggiungere a questi i calcari rossi a Brachiopodi liassici ed i calcari dolomitici a Diplopore che costituivano dei grossi blocchi in una cava del Liguriano della struttura di Lauriano non più esistente attualmente, perché grazie alle precise descrizioni di C. F. Parona (1903, 1930) non si possono avere dubbi sull'identità delle loro condizioni geologiche con quella di tutti gli altri costituenti del Liguriano. I fossili dei calcari rossi, campioni e sezioni sottili di quelli dolomitici, sono conservati attualmente all'Istituto di Geologia dell'Università di Torino. Si tratta come aveva dimostrato C. F. Parona, che ha descritto i primi, di rocce confrontabili con quelle pleisbachiane ed anisiche di Gozzano e di Arona rispettivamente. In corrispondenza della cava da cui queste rocce triassiche e liassiche venivano estratte per pietrisco, C. F. Parona aveva anche notato frammenti di porfidi quarziferi, di radiolariti, di calcari selciferi confrontabili con quelli di Cittiglio, e di arenaria calcaree passanti a breccioline che l'autore riteneva liassiche, perché simili all'arenaria di Viggiù. I due ultimi

tipi litologici appartengono in realtà ai calcari a Calpionelle ed alle calcareniti a Orbitoline precedentemente elencate. I primi costituiscono grossi spuntoni ben osservabili anche attualmente e che sono stati scambiati in passato con dei calcari da cemento. Si tratta di rocce analoghe a quelle che caratterizzano la Maiolica delle Alpi Meridionali anche dal punto di vista cronologico, perché vi si notano sezioni di *Calpionella alpina* Lor. e di *Calpionella elliptica* Cad. oltre che di Radiolari.

Con ogni probabilità le calcareniti con Orbitoline, di cui si notano numerosi massi e frammenti nei pressi degli spuntoni costituiti dalle rocce precedenti, corrispondono ad un orizzonte trasgressivo sui calcari a Calpionelle, come sembra dimostrato direttamente dagli addentellati tra le due facies che si possono talvolta osservare e indirettamente dal prevalere nei loro costituenti detritici di elementi degli stessi calcari. Ciò si accorda con l'età indicata dalla presenza dei numerosi esemplari di *Orbitolina* che vi si osservano. E anche verosimile che si tratti di un orizzonte cenomaniano, come ha supposto P. L. Prever (1907) in base alle affinità delle Orbitoline con forme di questa età, perché frammenti di Inocerami molto frequenti accompagnano questi organismi. A differenza dei calcari a Calpionella che ho notato nel Liguriano della struttura di Lauriano soltanto, si possono osservare frammenti di queste calcareniti neocretacee in altre zone del Monferrato.

Non conosco per il momento altri costituenti databili del Liguriano oltre alle rocce menzionate nelle righe che precedono. Calpionelle e Globotruncane escluse, la presenza degli altri fossili che permettono di riferire al Mesozoico le rocce in questione era già conosciuta; essa non fu però presa in considerazione, perché si riteneva generalmente che questi fossili appartenessero ad elementi di conglomerati eocenici. Ciò è da escludere in base a quanto si osserva sul terreno per i calcari a Calpionelle, le rocce a Orbitoline, i calcari e le arenarie a Globotruncane. Non si potrebbe farlo a rigore per i calcari ed i calcari dolomitici del Lias e del Trias non più visibili attualmente, ma le descrizioni che ne ha fatto C. F. Parona (1903, 1930) non lasciano dubbi in proposito: con le argille che li inglobavano e che penetrando lungo i piani di frattura ne avevano suddiviso i banchi in blocchi appena disgiunti, corrispondevano senza dubbio ad una parte del complesso caotico del Liguriano e non certo agli elementi di un conglomerato a cemento argilloso.

È possibile pertanto che il Liguriano corrisponda ad una serie di età essenzialmente compresa tra quella dei suoi costituenti triassici e la parte maestrichtiana della formazione dei calcari da cemento. I termini di età intermedia tra quelli delle rocce databili in base al loro contenuto fossilifero potrebbero essere rappresentati dagli altri costituenti non databili oppure non affiorare. Trattandosi di un complesso caotico non si può però considerare questa come l'unica soluzione possibile ed in attesa di poterne precisare meglio la costituzione con altri dati di osservazione ci si deve limitare ai fatti attualmente accertabili che consistono in definitiva nell'assenza finora

riscontrata di fossili, che ne giustifichino le attribuzioni parziali o totali all'Eocene effettuate dagli Autori, e nell'esistenza di costituenti sicuramente mesozoici.

Bibliografia.

Beets C. (1940), *Die Geologie des weslichen Teiles der Berge von Monferrato zwischen Turin und Murisengo*, « Leid. Geol. Med. », *12*, 195–250, tt. 2–3, 16 ff. n. t.

Di Rovasenda L. (1892), *I fossili di Gassino*, « Boll. Soc. Geol. It. », *11*, 409–424.

Elter G. (1956), *Osservazioni sulla tettonica del Monferrato orientale*, « Mem. Ist. Geol. e Min. Un. Padova », *20*, 21 pp., 2 tt., 1 f.

Parona C. F. (1902), *Nuove osservazioni sui massi di calcare rosso a Brachiopodi del Lias medio compresi nelle argille scagliose di Lauriano*, « Atti Acc. Sc. Torino », 5 pp.

Parona C. F. (1930), *Affioramento di terreni mesozoici presso Lavriano Po nella collina di Torino*, « Atti Acc. Sc. Torino », *15*, 213–223, 1 f. n. t.

Prever P. L. (1907), *Aperçu géologique sur la colline de Turin*, « Mem. Soc. Géol. Fr. », ser. 4ª, *1*, 48 pp., It., 7 ff. n. t.

Redini R. (1952), *Su di una struttura dei dintorni di Villadeati nel Monferrato e in merito ai suoi riflessi sulla struttura del sistema collinare Torino–Valenza e di altre zone*, « Boll. Serv. Geol. », *74*, 235–239.

Sacco F. (1889), *Il bacino terziario e quaternario del Piemonte*, 634 pp. Milano.

Sacco F. (1935), *Note illustrative dei Fogli di Torino, Vercelli, Mortara Carmagnola, Asti, Alessandria, Cuneo, Ceva, Genova e Voghera*, « Note ill. Carta Geol. It. », 85 pp., 5 tt.

Socin C. (1953), *La serie stratigrafica dei dintorni di Villadeati (Monferrato)* « Pubbl. Ist. Geol. Torino », *2*, 69–78, 2 ff. n. t.

Socin C. (1954), *Considerazioni su alcune faune oligoceniche presso Brusasco*, « Pubbl. Ist. Geol. Torino », *3*, 1–6.

Tellini A. (1888), *Le Nummulitidee terziarie dell'alta Italia occidentale*, « Boll. Soc. Geol. It. », *7*, 169–230, t. 7.

Trabucco G. (1894), *Sulla vera età del calcare di Gassino*, « Boll. Soc. Geol. It. », *13*, 111–130.

Geologia. — *Le sillon géosynclinal du Flysch tithonique–néocomien en Méditerranée occidentale.* Nota di MICHEL DURAND DELGA, presentata (*) dal Socio G. B. DAL PIAZ.

Dans la plupart des conceptions classiques (Fallot, 1932; Glangeaud, 1933, etc.), une bonne partie de l'actuelle dépression, est–ouest, allant de Gibraltar vers la Sicile, a constitué, pendant les temps secondaires et paléogènes, une zone haute, généralement émergée: c'est le « bourrelet liminaire africain » de P. Fallot. Comme témoignage de ce continent méditerranéen, quelquefois – et abusivement – nommé « Tyrrhénide » (M. Dalloni), resteraient seulement, en Afrique du Nord, les massifs anciens de Petite Kabylie, de Grande Kabylie, du Chénoua et du Rif septentrional. Le bord nord de cet hypothétique continent serait marqué par le Primaire des zones internes des Cordillères bétiques (en particulier celui de Malaga) puis, peut–être, Minorque et la Sardaigne, dont le Paléozoïque forme l'essentiel.

Des deux côtés de ce môle, deux longs sillons géosynclinaux voient la sédimentation de formations essentiellement calcaires au Jurassique, puis principalement marneuses au Crétacé et au Nummulitique. Ce sont les « faciès méditerranéens » à microfaunes planctoniques et à « faunes alpines » de Céphalopodes: au Tithonique, calcaires noduleux et fausses–brèches, au Néocomien marnes et marno–calcaires à Aptychus et Ammonites pyriteuses.

En Afrique du Nord, un sillon « bathyal » a été ainsi depuis longtemps défini, depuis le Prérif marocain (F. Daguin, J. Lacoste, J. Marçais, . . .) jusqu'en Tunisie du nord (M. Solignac, . . .), en passant par divers secteurs d'Algérie tellienne (J. Blayac, M. Dalloni, L. Joleaud, L. Glangeaud, . . .). Je propose d'étendre le terme de « *sillon (ou géosynclinal) tellien* » à cette zone allant de Tanger jusqu'à Bizerte, sur plus de 1500 km de longueur et une largeur d'une centaine (avant les charriages d'âge tertiaire qui l'ont gravement affectée).

Symétriquement, au bord nord des Alpides espagnoles, le « *sillon (ou géosynclinal) subbétique* » (R. Nicklès, P. Fallot, G. Colom, . . .) – qui, coudé au niveau de Gibraltar, prolonge à mes yeux le sillon tellien du Maroc – montre, sur un millier de kilomètres, de l'ouest–sud ouest à l'est–nord est, au Mésozoïque et au Nummulitique, des faciès et des faunes comparables à ceux du sillon tellien.

Sur leur bordure « externe », au sud pour le sillon tellien, au nord pour le sillon subbétique, aux faciès « pélagiques » de mer relativement profonde succèdent des *faciès « néritiques »*, où abondent calcaires récifaux, dolomies, niveaux coquilliers. A partir des môles anciens émergés – Meseta ibérique au nord, Primaire atlasique et saharien au sud – proviennent des apports sableux.

(*) Nella seduta del 10 dicembre 1960.

Sur le bord « interne » des sillons géosynclinaux vaseux, sur la frange du prétendu massif méditerranéen exondé, les auteurs ont décrit, du Jurassique, du Crétacé et de l'Eocène, des *formations minces, lacunaires et peu profondes*. A la limite sud des massifs kabyles, c'est le cas de la « Chaîne calcaire » d'Algérie (L. Glangeaud, 1932); au Maroc, de la « Dorsale calcaire » (P. Fallot, 1937); autour du Primaire de Malaga, du « Pénibétique interne » (M. Blumenthal, 1930).

Cette image classique, exacte sur bien des points, nécessite cependant une modification essentielle. *Il a existé au nord de la Berbérie et tout au long de celle-ci, pendant les temps mésozoïques et nummulitiques, un sillon constamment marin qui, du Tithonique jusqu'au Miocène, a vu une sédimentation de type flysch, évidemment profonde et très épaisse (3 à 4 km)*. Ce sillon, dont la largeur ne devait pas dépasser une centaine de kilomètres, était reconnu jusqu'à maintenant d'Algésiras à Bizerte, sur 1700 km, mais il est évident, à la suite de divers travaux, qu'il se poursuit jusqu'en Sicile, ce qui lui donne près de 2500 km d'amplitude.

La définition de ce sillon n'a pas été l'oeuvre d'un seul jour ni d'un seul homme. Elle a son point de départ dans la découverte de Flyschs du Tithonique–Néocomien aux abords des massifs kabyles d'Algérie (Durand Delga et Lambert, 1955), Flyschs dont tout indiquait (Durand Delga, 1956) le caractère allochtone et l'origine septentrionale, « ultra–kabyle ». Mais ce sont surtout les recherches menées tant au Maroc par M. Mattauer et par moi–même (1959 et 1960) qu'en Andalousie par moi puis par J. Didon (1959), qui ont permis de généraliser au Nummulitique et d'étendre au cadre de la Méditerranée occidentale la conclusion proposée jusqu'alors pour les seuls Flyschs tithoniques et crétacés d'Algérie kabyle.

Il m'a paru utile, plus de cinq ans après la découverte des Flyschs tithoniques et néocomiens d'Algérie, de faire le point sur les faciès, le contenu paléontologique, la localisation et la situation structurale de ces Flyschs.

1. En Algerie. – J'ai défini les premiers éléments de tels Flyschs *au sud du massif ancien de Petite Kabylie*, près d'El Milia, sous les sericitoschistes du Moul–ed–Demamene (Colom, Castany et Durand Delga, 1953). J'ai admis, dans ma thèse (1955), que ce Flysch était en série renversée et avait représenté initialement la couverture directe du Cristallophyllien kabyle: il est beaucoup plus vraisemblable que ce Flysch, de provenance septentrionale, a été ultérieurement recouvert *tectoniquement* par le chevauchement du Cristallophyllien vers le sud.

Ce Flysch du Moul–ed–Demamene, qui apparaît actuellement comme une épaisse lame de charriage, est visible sur environ 300 m d'épaisseur: il comporte des alternances de niveaux principalement schisteux et d'autres surtout gréseux. Les schistes, gris, verdâtres ou jaunâtres, parfois calcareux, contiennent des horizons gréseux et de minces bancs de calcaire à grain fin à microfaunes pélagiques (*Radiolaires, Calpionelles, Fibrosphères, Globochaete*, etc.). Les grès, homométriques, fins, s'arénisent avec facilité: leur

teinte, légèrement verdâtre, devient jaunâtre par oxydation; à la loupe, l'on reconnaît leur relative richesse en feldspaths et en micas, avec divers autres minéraux métamorphiques. Le Tithonique (à *Calpionella* seules) et le Berriasien (à *Calpionella*, *Tintinnopsella* et *Calpionellites*) sont datés dans ce Flysch.

A l'ouest du massif ancien de Petite Kabylie, le complexe schisto-gréseux des Beni-Fourhal (entre Mansouria, Cavallo, Texenna et Selma), considéré comme de l'Oligocène « numidien » transgressif sur le Jurassique et le Crétacé du domaine des Babors, constitue en fait une belle nappe de charriage, la « nappe de Guerrouch » (Durand Delga et Lambert, 1956): elle recouvre le prolongement occidental du massif ancien, son contact anormal frontal et le domaine tellien (Babors).

Le Flysch de Guerrouch, épais de plus de 500 m, a montré des associations de Calpionelles de la limite Tithonique-Berriasien, du Berriasien franc, du Valanginien et, plus haut, des horizons de l'Hauterivien-Barrémien à *Nannoconus* et petites Globigérines, mais sans Calpionelles. La série se poursuit dans le Crétacé plus élevé.

A l'est du massif ancien de Petite Kabylie, entre le chaînon Hahouner-Debar et celui des Zerdeza, règnent (P. Deleau) des formations argilo-marneuses à intercalations gréseuses ou calcaires (« Flyschs » au sens large), qui doivent résulter de l'amoncellement d'unités allochtones venues du nord. En un point, près de Guendoula, au nord-est du Kef Hahouner, j'y ai noté des marnes avec lits de calcaires à *Calpionella alpina*.

Beaucoup plus au nord, dans le massif de l'Edough, J. Hilly (1957, t. I, p. 106) a observé au sud d'Herbillon (est du Pont Cavalla) des calcaires clairs à grain fin, en petits bancs et des calcaires microbréchiques à Radiolaires et à *Calpionella alpina*, *C. elliptica*, *Stenosemellopsis hispanica*, cfr. *Calpionellopsis simplex*. Il est vraisemblable que ces assises (Berriasien probable) s'insèrent dans une des nappes constituées de Flyschs qui recouvrent anormalement le socle ancien de l'Edough.

Au sud du massif ancien de Grande Kabylie, se place une longue bande de Flysch schisto-gréseux, où l'Albo-Aptien (Glangeaud, 1925) et le Sénonien ont été jadis caractérisés. Immédiatement au sud de la « chaîne calcaire » (Djurdjura en particulier), et plongeant sous elle, ce Flysch comporte de puissantes intercalations gréseuses. A. Lambert y avait découvert autrefois un *Aptychus* indéterminable, mais du Crétacé inférieur (Lambert, H. et G. Termier, 1951). Dans les bancs de calcaire à grain fin qui s'intercalent au sein du Flysch, j'ai noté des associations de *Calpionelles* et de *Nannoconus* de la limite Tithonique-Berriasien et du Néocomien-Barrémien (Durand Delga et Lambert, 1955).

L'hypothèse selon laquelle ce Flysch, actuellement au sud du Djurdjura, se serait sédimenté beaucoup plus au nord, puis aurait glissé vers le sud, avant d'être bousculé tardivement par la rupture du pli de fond kabyle, se trouvait étayée (Durand Delga, 1956) par les faits suivants.

Au nord du massif ancien de Grande Kabylie, sur le littoral, en effet, le Flysch forme d'immenses affleurements. Parmi eux, A. Lambert et moi (1955)

avons reconnu une série schisteuse, riche en intercalations irrégulières, souvent puissantes, de grès et de calcaires en bancs. J'ai pu y distinguer un Valanginien probable à rares *Calpionella*, à fréquentes *Calpionellopsis* et *Tintinnopsella*, et un Néocomien plus élevé où les *Calpionella* ont totalement disparu. On doit admetre le caractère allochtone de ce Flysch, qui viendrait d'encore plus au nord: en effet, dans la boutonnière anticlinale du Bou–Hatem, les Flyschs crétacés surmontent anormalement l'Oligocène à Lépidocyclines (L. Duplan), transgressif, lui, sur le Paléozoïque.

Au sud et à l'ouest du massif du Chénoua (ouest d'Alger), un Flysch analogue aux précédents, constitué de grès verdâtres et fins alternant avec des marnes schisteuses à bancs calcaires à *Nannoconus* (Durand Delga et Lambert, 1955), et, ailleurs, à Calpionelles du Néocomien (M. Mattauer), a été rapidement reconnu.

Ainsi, les recherches que j'avais menées avec A. Lambert jusqu'en 1954 nous avaient amené à la conclusion qu'un épais Flysch schisto–gréseux du Tithonique et du Crétacé inférieur était observable autour des massifs anciens kabyles, depuis Cherchell jusqu'à Bône, sur plus de 500 km d'est en ouest. Peu de temps après (1956), je concluais que ce Flysch (et avec lui tous les flyschs crétacés littoraux) avait pu se sédimenter au nord du domaine de la « Chaîne calcaire », sur le bâti ancien kabyle ou sur son prolongement pour ensuite glisser vers le sud. J'admettais que ce décollement était anté–oligocène, car les couches à Lépidocyclines arrivaient en transgression, en bien des points, sur le socle primaire: cette interprétation est inexacte, car les Flyschs crétacés surmontent cet Oligocène, comme je le montrerai dans un autre travail.

2. Au Maroc. – Entre l'arc du Rif interne (massifs anciens et Dorsale calcaire) et le Rif externe (« nappes rifaines et prérifaines »), s'étale, sur une cinquantaine de kilomètres de largeur, la « zone marno–schisteuse » (Fallot, 1937 et 1952), dont l'analogie avec les Flyschs algériens a été depuis longtemps soulignée par M. Blumenthal, par P. Fallot et par L. Glangeaud. L'étude micrographique, de 1955 à 1957, d'échantillons recueillis jadis, à l'ouest par P. Fallot, à l'est par M. Blumenthal, me permit d'affirmer la présence, en de nombreux points de la « zone marno–schisteuse », de Flyschs tithoniques à *Calpionella*, Fibrosphères, Radiolaires et débris d'*Aptychus* (Blumenthal, Durand Delga et Fallot, 1958). La coupe du Jebel Tisighen (Fallot, 1937, p. 387) en donne un exemple des plus nets: des alternances marno–calcaires puis des grès fins à passées de schistes calcareux, ont en effet livré, à la base des *Calpionella* tithoniques et berriasiennes, plus haut des *Lamellaptychus* néocomiens.

Un peu plus tard, l'étude de la « zone marno–schisteuse » fut confiée à M. Mattauer, de Chauen à Alhucemas, et à moi, de Tanger à Chauen. L'un de nos premiers résultats, dès 1958 (Durand Delga et Mattauer, 1959), fut que cette zone était constituée par la superposition de plusieurs nappes de glissement. La plus élevée, tectoniquement, au voisinage de la « Dorsale calcaire », fut nommée « nappe du Jebel Tisighen ».

Je rappellerai qu'elle forme une masse imposante dans l'ensellement entre Bokoya et Punta Pescadores: elle y est au contact direct, vertical ou chevauchant, de la Dorsale. Réduite à de petits lambeaux de Bab Taza à Socco-el-Arba des Beni-Hassan, la nappe du J. Tisighen reprend de l'ampleur au sud-est de Tanger, où l'érosion a dégagé sous elle, dans de nombreuses fenêtres, le Crétacé supérieur et le Nummulitique d'unités inférieures. Si la base de la nappe est, ici encore, généralement verticale au contact de la Dorsale (Hauz), en quelques points elle paraît « monter » vers l'est par dessus la Dorsale, ce qui constitue une preuve géométrique de l'origine orientale, « ultra-rifaine », de cette nappe: hypothèse qu'appuye d'ailleurs tout un faisceau d'arguments (Durand Delga et Mattauer, 1960).

Nous avons pu définir à la base de la nappe, à l'ouest de Targuist, les assises suivantes: marno-calcaires violacés à nombreux lits de radiolarites (Malm inférieur ou moyen), puis plusieurs centaines de mètres de marno-calcaires clairs à interlits marneux (Tithonique). C'est au-dessus, dès le Berriasien, que la série commence à devenir détritique: les passées argileuses s'épaississent, les calcaires se chargent de quartz. Très vite des bancs de grès verdâtre s'intercalent, jusqu'à devenir dominants. Ainsi le Flysch gréseux commence au Berriasien: dans les lits calcaires, de plus en plus rares quand on monte dans la série, j'ai pu caractériser (nord de Chauen) les divers niveaux du Néocomien, le Barrémien et l'Aptien à Orbitolines.

La zone du Flysch tithonique-crétacé ultra-rifain disparaît en mer à l'est d'Alhucemas. Elle doit réapparaître en Algérie, non pas dans le secteur oranais (où les Flyschs littoraux appartiennent à un secteur paléogéographique plus méridional), mais dans la région de Ténès.

3. EN ANDALOUSIE. – La zone des Flyschs rifains se prolonge au nord du détroit de Gibraltar. Lors de tournées en 1957, j'ai noté près du littoral, au nord-est de San Roque et au sud-ouest d'Estepona (Torre de la Sal), quelques petits affleurements d'un Flysch marno-gréseux tithonique-néocomien. J. Didon, qui a entrepris une monographie de ce domaine, et moi avons pu établir (1959) que ce Flysch entrait dans la constitution d'unités glissées de l'est vers l'ouest, manifestement par dessus le Paléozoïque bétique de Malaga. Récemment, J. Didon (1960) a montré que ce Tithonique-Néocomien appartenait à deux unités. L'une, la plus basse (« nappe de Camarote »), repose directement sur l'Oligocène qui surmonte le Paléozoïque, autochtone relatif: les marnes comportent des plaquettes de calcaires microbréchiques à oolites dispersées, riches en *Lamellaptychus* d'âge compris entre Tithonique et Barrémien (inclus); les niveaux gréseux sont rares. Sur cette unité de Camarote, repose le Nummulitique de la nappe d'Algésiras. Et, sur celle-ci, une nappe supérieure (« nappe de Los Nogales »), réduite à des lambeaux d'un Flysch tithonique-néocomien identique à celui de la nappe du J. Tisighen, dans le Rif: grès verdâtres fins avec niveaux de marnes schisteuses.

4. En Sicile. – L. Ogniben (1960) a cartographié, au sud–ouest du massif cristallin des Monts Péloritains, sur près de 500 km², sous le nom de « Flysch du Monte Soro », une formation identique au Flysch tithonique–néocomien de Berbérie, comme viennent de le constater A. Caire et M. Mattauer (1960): grès feldspathiques, fins et sans granoclassement, en bancs d'épaisseur égale ou supérieure à 1 m, alternant avec des argiles schisteuses à rares petits lits calcaires. Ceux–ci ont livré des Calpionelles vers la base de la formation, pauvre en grès. La proportion de niveaux détritiques augmente vers le milieu de la formation, pour diminuer à nouveau au sommet (Crétacé moyen).

Comme en Algérie, au Maroc et en Andalousie, ce Flysch forme une grande unité allochtone d'origine septentrionale, la « nappe de Cesarò »: élément supérieur des « Sicilides » de L. Ogniben, qui (comme il en est pour les unités homologues de Berbérie) s'enfoncent *actuellement* sous le socle ancien des « Calabrides » (Quitzow, 1935).

Conclusion. – Les affleurements actuellement reconnus de Flysch tithonique–néocomien se situent entre les arcs de Calabre et de Gibraltar qui limitent le domaine strict de la Méditerranée occidentale. Soulignons l'extrême étroitesse du bassin où ce Flysch s'est déposé, de l'est de Tanger au nord de la Sicile.

La zone d'alimentation du Flysch en minéraux détritiques peut être cherchée à la fois au sud (massifs kabyles et rifain) et surtout au nord, où il est nécessaire d'imaginer qu'au Secondaire et au Nummulitique émergeaient des massifs anciens (peut–être zones profondes des Cordillères bétiques, et leur prolongement vers la Sardaigne): les produits de l'érosion de ces massifs, comme aussi le remaniement des sédiments et des faunes en train de se déposer à leur voisinage, à faible profondeur, devaient être entraînés vers le sillon du Flysch, où avait lieu leur resédimentation.

Ce régime, si caractéristique du « Flysch », a débuté au Tithonique ou (et) au Berriasien. Le décollement du Flysch – qu'implique son allochtonie – s'est généralement effectué au–dessus de couches à propriétés mécaniques différentes. A ma connaissance, ces assises jurassiques, calcaires, n'ont été observées qu'en quelques points du Rif (est du J. Tisighen) et d'Andalousie (base de la « nappe de Camarote » de J. Didon).

Ainsi commence, à l'aurore du Crétacé, la longue existence de ce sillon rempli de Flysch que nous verrons se poursuivre, au même emplacement, jusqu'au début du Miocène.

Bibliographie.

Blumenthal M., « Ecl. geol. Helv. », vol. XXIII, pp. 41–293 (1930).

Blumenthal M., « Bol. Inst. geol. y min. España », t. LIX (XIV), 3ᵉ s. (1937).

Blumenthal M., Durand Delga M. et Fallot P., « Notes et Mém. Serv. géol. Maroc », t. 16, n° 143, pp. 35–58 (1958).

CAIRE A. et MATTAUER M., «C. R. Ac. Sc.», Paris, t. 251, pp. 1804–1806 (1960).
COLOM G., CASTANY G. et DURAND DELGA M., « Bull. Soc. géol. France », 6e s., t. III, pp. 517–534 (1953).
DIDON J., Notas y Comun. Inst. geol. y min. España, à l'impr. (1950).
DIDON J. et DURAND DELGA M., «C. R. Ac. Sc.», Paris, t. 248, pp. 2779–2781 (1959).
DURAND DELGA M., « Bull. Serv. Carte géol. Algérie », 2e s., n. 24 (1955).
DURAND DELGA M., *Regards sur la structure de l'Algérie septentrionale*, Geol. Symp. von Hans Stille, Stuttgart (1956).
DURAND DELGA M. et LAMBERT A., «C. R. somm. Soc. géol. France», pp. 200–203 (1955).
DURAND DELGA M. et LAMBERT A., «C. R. somm. Soc. géol. France», pp. 296–298 (1956).
DURAND DELGA M. et MATTAUER M., «C. R. Ac. Sc.», Paris, t. 248, pp. 2364–2366 (1959).
DURAND DELGA M. et MATTAUER M., «C. R. somm. Soc. géol. France», pp. 22–24 (1960).
FALLOT P. « Bull. Soc. géol. France », pp. 533–552 (1932).
FALLOT P. « Notes et Mém. Serv. géol. Maroc », nº 40 (1937).
FALLOT P., « VII Conv. naz. Metano Petrolio », Palermo, s. I (1952).
GLANGEAUD L., «C. R. Ac. Sc.», Paris, t. 181, pp. 249–251 (1925).
GLANGEAUD L., « Bull. Serv. Carte géol. Algérie », 2e s., n. 8 (1932).
GLANGEAUD L., « Actes Soc. linn. Bordeaux », t. 85, pp. 173–220 (1933).
HILLY J., *Etude géologique du Massif de l'Edough et du Cap de Fer (Est-Constantinois)*, Thèse Nancy, 12 janvier 1957. Inédite.
LAMBERT A., TERMIER H. et G., «C. R. somm. Soc. géol. France», p. 113 (1951).
MATTAUER M., « Publ. Serv. Carte géol. Algérie », n. s., Bull. nº 17 (1958).
OGNIBEN F., « Riv. Miner. Sicilia », anno XI, nn. 64–65, pp. 183–212 (1960).

Botanica. — *Anatomia comparata di alcuni organi vegetativi di* Abies nebrodensis (*Lojac.*) *Mattei e* Abies alba *Mill.* [*]. Nota di Maria Arena, presentata [**] dal Socio E. Francini Corti.

Poiché *Abies nebrodensis* appartiene al ciclo sistematico di *Abies alba* [1] ci è sembrato interessante confrontare anatomicamente alcuni organi giovanili ed adulti (rami, gemme, foglie, tronco) delle due entità nel tentativo di stabilire eventuali differenze e di interpretare alcuni aspetti della biologia di *A. nebrodensis*.

Il materiale servito al nostro studio proviene dall'unico esemplare adulto di *A. nebrodensis* custodito a Polizzi Generosa (Palermo, quota 916 m, di un centinaio di anni di età) e da un esemplare di *A. alba* dell'Abetina di S. Maria (Serra S. Bruno, Catanzaro, quota 900 m, di 90 anni circa), che è la più meridionale e la più vicina geograficamente alla Sicilia.

A proposito dell'Abete bianco di Serra S. Bruno bisogna ricordare che Morandini [2] parla di una forma ad aghi brevi, che si ritrova appunto, sia pure in quantità scarsa, nell'Abetina di S. Maria e che potrebbe riferirsi ad *A. nebrodensis*. Il nostro materiale non si riferisce a quella forma e differisce dall'Abete delle Nebrodi non solo per il carattere degli aghi, ma anche per una serie di caratteri anatomici che illustrerò.

Ringrazio vivamente il dott. M. Padula per avermi gentilmente fornito il materiale di *A. alba*.

Esame anatomico dei vari organi.

ABIES NEBRODENSIS (Lojac.) Mattei.

Rametti, gemme, foglie: per la descrizione dettagliata di tali organi si rimanda alla mia precedente Nota [3]. Tuttavia si reputa opportuno riassumerne qui le principali caratteristiche.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Botanico dell'Università di Messina diretto dalla professoressa Albina Messeri.

(**) Nella seduta del 10 dicembre 1960.

(1) A. Messeri, *Nuovi dati sulla sistematica dell'*Abies nebrodensis (*Lojac.*) *Mattei*, « Rend. Accad. Nazion. dei Lincei » ser. VIII, vol. XXV, fasc. 6, pp. 547–556 (1958).

(2) R. Morandini in A. Pavari, *Esperienze e indagini su le provenienze e razze dell'Abete bianco* (Abies alba *Mill.*): *L'Abete di Serra S. Bruno*, « Stazione sperimentale di selvicoltura di Firenze », pubbl. n° 8, pp. 86–92 (1951).

(3) M. Arena, *Caratteristiche ecologiche degli organi vegetativi giovanili di* Abies nebrodensis (*Lojac.*) *Mattei, desunte dalla loro struttura*, « Rend. Accad. Nazion. dei Lincei », ser. VIII, vol. XXVI, fasc. 2, pp. 252–258 (1959).

Nel *ramo al 2° anno di età* si sviluppa precocemente uno spesso strato di sughero (fino a sette serie di cellule) (fig. 1). A costituire la *corteccia del primo anno* concorrono parenchimi, elementi conduttori, sclereidi, oltre che canali. La *corteccia giovane* è costituita da cellule conduttrici, da cellule parenchimatiche corticali e radiali, mentre manca di canali resiniferi (presenti solo cellule secretrici di resine).

Nel *legno* mancano i canali secretori.

Nel *ramo al 6° anno di età la corteccia primaria* è costituita da elementi parenchimatici, da elementi cribrosi non più funzionanti ed infine da canali secretori disposti in cerchia in prossimità del felloderma. La *corteccia interna* è caratterizzata da parenchima disposto in file tangenziali generalmente monoseriate. Al parenchima tangenziale si alternano alcune serie di elementi conduttori. Mancano canali secretori. Grosse sclereidi si notano fra corteccia interna ed esterna.

Nel *corpo legnoso* sono presenti falsi anelli accanto a quelli normali. In seno ad una cerchia legnosa le quantità di legno primaticcio e tardivo si equivalgono, ma frequentemente il tardivo prevale sul primaticcio (fig. 2). La lignificazione è spesso discontinua. Esiste infine una sproporzione fra il grande diametro delle punteggiature areolate e l'esiguo sviluppo della parete delle tracheidi (sez. rad.). Le punteggiature al campo d'incrocio sono generalmente due, taxodioidi nel legno primaticcio, piceoidi nel tardivo. Raggi monoseriati. Assenza di canali secretori. Presenza di tracheidi cristallifere.

Le *gemme vegetative* sono ricoperte da uno strato di resina. I parenchimi più profondi, meno differenziati e più compatti, sono costituiti prevalentemente da cellule a contenuto intensamente colorabile ed inoltre da cellule cristallifere, amilifere e secretrici. Nei parenchimi più periferici, meno compatti, la maggior parte delle cellule è a contenuto debolmente colorabile ed anche qui troviamo cellule amilifere, oltre a cellule di tipo parenchimatoide prive di contenuto, già osservate nei rametti. Le sacche secretrici prevalgono nelle zone più periferiche e basali, mentre sono in minor numero nel corpo della gemma. La vitalità delle cellule nei vari ordini di perule che avvolgono le gemme ed in particolare delle cellule secretrici, decresce dal basso verso l'alto e dall'interno verso l'esterno, mentre il processo di suberificazione procede nei sensi inversi. Le cellule suberose che rivestono gli organi più giovanili (rametti, gemme, perule) devono probabilmente la loro irregolarità, sia come assetto che come contorno cellulare, alla mancanza di uno sfasamento fra accrescimento e differenziazione.

Nelle *foglie al 2° e al 6° anno di età* (sez. trasv.) (fig. 3) l'*epidermide*, unistratificata, è fortemente cutinizzata nella pagina superiore. L'*ipoderma* unistratificato o anche bistratificato con cellule a pareti più spesse di quelle epidermiche, si interrompe nella pagina inferiore solo a livello dei canali secretori e degli stomi. Il *palizzata* è generalmente bistratificato nella pagina superiore; nella pagina inferiore manca un tipico palizzata tranne che a livello della nervatura. Nel palizzata delle foglie più vecchie sono presenti sostanze di natura oleosa. Il *tessuto lacunoso* invece è ricchissimo di amido nelle

foglie giovani, di sostanze oleose nelle foglie vecchie. Esso in sezione tangenziale appare costituito da cellule lunghe e strette nelle foglie giovani e da cellule tozze e turgide nelle foglie vecchie. Il *tessuto secretore* è rappresentato da due soli canali secretori posti uno per lato verso la pagina inferiore. Il *tessuto conduttore*, infine, è rappresentato da due fasci cribro–legnosi, costituenti la nervatura fogliare; quest'ultima divide la lamina in due zone in ciascuna delle quali si contano (sez. tang. della pagina inferiore) 7–10 linee stomatiche. Le tracheidi che decorrono lungo le nervature sono spesso cristallifere.

T r o n c o: quest'organo, preso per la prima volta in considerazione, è provvisto di una corteccia di 15 mm di spessore. Il limite fra corteccia esterna, più vecchia, e corteccia interna, più giovane, non è così netto come nel ramo.

La *corteccia esterna* è caratterizzata, internamente al sughero, nello strato immediatamente sottostante al fellogeno, da una cerchia molto regolare di canali secretori di cui è molto evidente l'origine per lisi cellulare, a lume molto ampio occluso da una considerevole quantità di resina. Procedendo verso l'interno, sempre nell'ambito della corteccia esterna, si notano: 1° cellule conduttrici, molto compresse, non più vitali, tranne che al limite con la corteccia interna; 2° cellule parenchimatiche abbondanti, disposte molto irregolarmente nella zona più vicina al felloderma ed in file tangenziali biseriate sempre più regolari via via che si procede verso l'interno, tutte ricche di metaboliti: amido, tannini (?) e resine; queste ultime abbondano specialmente nella porzione più esterna, prossima agli ampi canali secretori, sottostanti al fellogeno; 3° cellule sclerenchimatiche, numerose specialmente verso la periferia, isolate o raggruppate; 4° canali secretori sparsi, vitali, ma scarsamente o affatto resinogeni.

La *corteccia interna* è caratterizzata da cellule conduttrici vitali, a contenuto chiaro, costituenti la massa fondamentale, e da parenchima monoseriato nella porzione interna più recente (fig. 4); tale parenchima diviene biseriato procedendo verso l'esterno. Sembrerebbe che quest'ultima condizione venisse raggiunta secondariamente, tanto più che la differenziazione di tutti gli elementi corticali procede, a differenza di quelli legnosi, molto lentamente e che quindi gli elementi acquistano il modello definitivo a una certa distanza dalla cerchia cambiale. Può darsi anche che durante lo stiramento subìto dagli elementi le cellule parenchimatiche sparse finiscano con l'allinearsi in maniera da costituire una seconda fila di parenchima. Le cellule parenchimatiche sono ricche di sostanze amilacee, oltre che di sostanze resinose e forse anche tanniche. Oltre a questi due tipi di elementi, conduttori e parenchimatici, che sono i più rappresentativi, sono anche qui presenti elementi sclerenchimatici e secretori. Infine le cellule dei numerosi raggi parenchimatici che attraversano tutto lo spessore della corteccia, sia interna che esterna, sono ricche di amido e forse secernono anche delle resine.

La nuova produzione della primavera trascorsa (prelievo del 30 giugno) consiste in 30 serie circa di cellule conduttrici ed in tre file di parenchima

monoseriato, ricco di metaboliti, in particolare di amido. Sembra però che l'attività cambiale non sia del tutto cessata.

La descrizione del *legno* è basata sull'esame di sezioni eseguite su un tassello di legno, comprendente gli ultimi cinque anelli adiacenti al cambio. Lo spessore degli anelli varia dai 560 μ ai 1860 μ (media 1184 μ) ed in seno a ciascun anello il passaggio dal legno primaticcio al tardivo è generalmente brusco, ma talora è graduale. Le quantità di legno primaticcio e tardivo di un anello si equivalgono, oppure il primo prevale sul secondo (fig. 5). La lignificazione è talvolta discontinua, specialmente in alcuni settori del legno autunnale.

Oltre ai cinque anelli osservati se ne nota un sesto in via di formazione: esso è formato da 30–50 serie di tracheidi, tutte di tipo primaverile, in parte ancora vitali.

I raggi, piuttosto frequenti (32 per mmq in sez. tang.), sono generalmente monoseriati, raramente biseriati ed alti fino a 87 cellule (420 cellule parenchimatiche in media per mmq) (fig. 6); tali cellule sono ricche di amido e di sostanze resinose ed hanno le pareti molto punteggiate (fig. 7). Le punteggiature areolate delle pareti radiali delle tracheidi sono uniseriate e frequentemente biseriate, nell'uno e nell'altro caso circondate da crassule; la loro ampiezza è di 16–20 μ nelle tracheidi primaticce e di 10–13 μ in quelle tardive. A differenza di quanto si è osservato nel rametto, non esiste una sproporzione fra il diametro delle punteggiature ed il diametro radiale delle tracheidi, essendo quest'ultimo di 53 μ e di 41 μ rispettivamente nelle tracheidi primaticce e tardive. Le punteggiature al campo d'incrocio dei raggi con le tracheidi verticali sono 1 o 2 (eccezionalmente 3), taxodioidi nel legno primaticcio, piceoidi in quello tardivo, del diametro di 6,6 μ e 5 × 6,6 μ rispettivamente. Le tracheidi orizzontali ed i canali resiniferi sono assenti. Anche il parenchima verticale è assente.

L'analisi istologica ha messo in rilievo le dimensioni delle tracheidi primaticce e tardive e degli elementi parenchimatici radiali, di cui facciamo seguire la tabella:

	Lungh. compl.		Largh. compl.		Lume		Parete	
	Tronco	Ramo	Tronco	Ramo	Tronco	Ramo	Tronco	Ramo
Tracheidi primaticce . .	4030μ	1260μ	53μ	15μ	41μ	12μ	6μ	1,5μ
Tracheidi tardive . .	4305μ	1320μ	41μ	11μ	17μ	2μ	12μ	4,5μ
Cellule parench. rad. . .	206μ	80μ	18μ	18μ				

Come si vede, ai dati riguardanti gli elementi del tronco si sono aggiunti quelli riguardanti il ramo al 6° anno di età. Notevoli sono le differenze dimensionali fra gli elementi dei due organi.

ABIES ALBA Mill.

R a m e t t i : il *rametto di 2 anni* [4] differisce dal rametto al 2° anno di età di *A. nebrodensis* per alcuni caratteri riguardanti: 1° lo spessore del sughero, che è piuttosto esiguo (strato sugheroso costituito da 2–3 serie di cellule) e a cellule piccole (fig. 1 *bis*); 2° la distribuzione e la quantità dei metaboliti; l'amido che è molto più abbondante che in *A. nebrodensis*, è presente nel midollo, nei raggi midollari del corpo legnoso e nei parenchimi della corteccia, specialmente in quelli più esterni, felloderma compreso; la quantità di resina è più elevata nel punto in cui corteccia e legno confluiscono verso il cambio, dove invece la produzione di amido decresce; 3° il parenchima tangenziale della corteccia interna tende a disporsi più regolarmente che in *A. nebrodensis*.

Nel *ramo di 6 anni* la corteccia non differisce notevolmente da quella di *A. nebrodensis*; se ne discosta tuttavia per l'assenza di cellule cristallifere nella corteccia esterna, per il maggiore contenuto in sostanze amilacee, specie nella corteccia più vecchia e per la precoce comparsa del parenchima biseriato.

Nel *legno* le false cerchie sono assenti; il legno primaticcio prevale nettamente sul tardivo anche nelle cerchie più esigue; la lignificazione è uniforme e regolare (fig. 2 *bis*). In sezione radiale le tracheidi primaticce e tardive hanno un diametro trasversale di 23 μ e 16 μ rispettivamente, le punteggiature areolate un diametro di 13–16 μ (trach. primat.) e 8–10 μ (trach. tard.) si deduce che la sproporzione fra estensione della superficie tracheidale e diametro delle punteggiature, notata in *A. nebrodensis*, è qui molto meno accentuata. Le punteggiature al campo d'incrocio misurano μ 5 nelle tracheidi primaticce e μ 5 × 3 nelle tracheidi tardive.

Sono presenti canali secretori di origine traumatica. Assenti le tracheidi cristallifere ed il parenchima verticale. Minore accumulo di amido nei raggi parenchimatici rispetto ad *A. nebrodensis*.

G e m m e : non si notano sensibili differenze, se si eccettua il più avanzato grado di sviluppo delle gemme rispetto ad *A. nebrodensis*, da mettersi in relazione con la diversa epoca di raccolta (giugno ed ottobre).

F o g l i e : tanto quelle di *2* che quelle di *6* anni diversificano dalle foglie di *A. nebrodensis* al 2° e al 6° anno perché: 1° lo strato ipodermico è spesso discontinuo; 2° le cellule del mesofillo, specialmente del palizzata, raggiungono dimensioni maggiori (fig. 3 *bis*), talvolta più del doppio, rispetto agli elementi mesofillari dell'altra entità e ciò indipendentemente dalle dimensioni fogliari; 3° nelle prime (bienni) sostanze amilacee ed oleo–resinose, spesso mescolate, sono egualmente ed abbondantemente presenti, mentre le une e le altre, specie le oleose, riscontrate abbondantemente nel lacunoso delle foglie al 6° anno di età di *A. nebrodensis*, scarseggiano in quelle della stessa età in *A. alba*; 4° le linee stomatiche arrivano fino a 12 per ciascuna zona.

(4) Nei rametti di 2 e 6 anni il 2° ed il 6° anello rispettivamente si erano già completati all'epoca del prelievo (ottobre).

Tronco: lo spessore della corteccia è di 8 mm. La *corteccia esterna* non differisce da quella di *A. nebrodensis*, tranne che per la qualità e la quantità dei metaboliti, essendo nettamente predominanti le sostanze resinose e assenti le amilacee, e per la discontinuità interessante talora una delle due serie di parenchima tangenziale.

Nella *corteccia interna* si osserva che la biseriazione del parenchima avviene con ritmo più accelerato che in *A. nebrodensis* (fig. 4 *bis*). Si può notare inoltre l'assenza completa di amido.

Nel *legno* le differenze macro e microscopiche presentate dagli ultimi anelli del corpo legnoso rispetto ad *A. nebrodensis*, sono le seguenti: lo spessore degli anelli varia da 2 a 5 mm con una media di 3,8 mm; il legno primaticcio prevale nettamente sul tardivo (fig. 5 *bis*); la lignificazione è piuttosto uniforme. Si notano aree in cui le tracheidi sono occluse da resine, indizio di canali secretori traumatici, osservati infatti nel ramo di 6 anni.

I raggi sono 30 per mmq in sezione tangenziale ed alti fino a 45 cellule al massimo (346 cellule parenchimatiche per mmq) (fig. 6 *bis*).

Assenza di amido nel parenchima radiale (fig. 7 *bis*).

Differenze notevoli riguardanti specialmente la lunghezza delle tracheidi sono risultate dall'esame istologico. Riportiamo qui sotto la tabella dei valori ottenuti:

	Lungh. compl.		Largh. compl.		Lume		Parete	
	Tronco	Ramo	Tronco	Ramo	Tronco	Ramo	Tronco	Ramo
Tracheidi primaticce . .	2446 μ	1220 μ	62 μ	23 μ	52 μ	20 μ	5 μ	1,5 μ
Tracheidi tardive . .	3321 μ	1345 μ	40 μ	16 μ	15 μ	6 μ	12,5 μ	5 μ
Cellule parench. rad. . .	206 μ	88 μ	20 μ	20 μ				

La costituzione anatomica di *Abies alba* e *Abies nebrodensis* non sembra essere fondamentalmente dissimile nelle due entità.

Tuttavia alcuni caratteri di *A. nebrodensis* sono risultati così dissimili da *A. alba* da indurci a delle considerazioni sopratutto di carattere ecologico, che ci potranno quindi dare ancora una volta conferma della xerofilia di *A. nebrodensis*. Le due tabelle accluse che mettono a confronto i principali caratteri delle due entità ce ne facilitano il compito.

1° L'esaltata e tumultuosa produzione di tessuti sugherosi (corazza sugherosa dei rametti, delle gemme e del tronco) e la presenza di abbondanti formazioni resinose (rivestimento resinoso delle gemme [5]) indicano la necessità, da parte dell'Abete nebrodense, di una tempestiva difesa.

2° L'esiguità delle cerchie legnose sia nel tronco che nei rami, la maggiore quantità di legno tardivo, la discontinuità della lignificazione, la pre-

(5) A differenza di quanto è stato osservato da MESSERI (loc. cit). nell'Abete nebrodense, il rivestimento resinoso delle genme di Abete bianco è molto sottile.

senza di falsi anelli, il carattere di nanismo delle cellule del palizzata fogliare, la ininterrotta corazza ipodermica, la presenza di elementi cristallogeni sono caratteri che si riscontrano sopratutto o solo in *A. nebrodensis* e che stanno a dimostrare in parte che questa entità vegeta in ambiente sfavorevole, in parte che è una xerofita.

3° In *A. nebrodensis* si ha una maggiore quantità di sostanze di riserva, specialmente amilacee, nei parenchimi corticali e legnosi del tronco, molto meno in quelli dei rami; non solo, ma si nota anche nel tronco e non nei rami un maggiore sviluppo numerico delle cellule dei raggi parenchimatici, e quindi di quei tessuti che, funzionando da magazzini di riserva, sono particolarmente indispensabili a questo abete, che non solo nei brevi e forse discontinui periodi di attività, ma anche nei più lunghi periodi di riposo ne utilizza i metaboliti abbondantemente accumulati. Riassumendo quindi: nell'Abete bianco la messa in riserva avviene specialmente nei tessuti degli organi giovani (vedi rami); nell'Abete nebrodense avviene essenzialmente nei parenchimi degli organi adulti (vedi tronco). Questa differente attitudine potrebbe spiegarsi con un più rapido metabolismo generale dell'Abete bianco, che non è sottoposto ad un ambiente critico, mentre tale metabolismo si sarebbe orientato verso una messa in riserva più stabile nell'Abete nebrodense in corrispondenza di un clima più severo che può mettere facilmente in crisi gli organi più giovani.

4° Le tracheidi del tronco, molto più lunghe in *A. nebrodensis* che in *A. alba*, denotano da un lato la attitudine alla conduzione di acqua con minore attrito, dall'altro una maggiore lentezza nel raggiungere il modello definitivo, ambedue caratteri di xerofilia.

5° Analoga considerazione si può fare nei confronti del parenchima corticale, la cui biseriazione tanto nel tronco che nei rami viene raggiunta più lentamente in *A. nebrodensis* che in *A. alba*.

6° Sembrerebbe che l'Abete dei Nebrodi e l'Abete bianco per alcuni caratteri si comportassero in maniera analoga o quasi negli organi giovanili (vedi rami) e che diversificassero invece negli organi adulti (vedi tronco); così nel ramo di 6 anni le tracheidi si differenziano precocemente rimanendo corte e raggiungendo suppergiù la stessa lunghezza nelle due entità. Le differenze fra le tracheidi delle due entità si notano invece solo nel tronco e riguardano la loro lunghezza.

Analogamente i raggi sono alti 2–10 cellule nel ramo di 6 anni sia in *A. nebrodensis* che in *A. alba*, ma nel tronco sono alti rispettivamente fino ad un massimo di 87 cellule e di 45 cellule.

7° In maniera opposta si comporta il carattere « rapporto di grandezza fra areole e pareti delle tracheidi »; infatti mentre tale rapporto è molto diverso nel legno giovane dei rami delle due entità, diventa circa uguale nel legno dei rispettivi tronchi.

8° In conclusione i caratteri anatomici da prendersi in più seria considerazione come caratteri sistematici per la distinzione di *A. alba* e *A. nebrodensis* riguardano l'altezza dei raggi (sez. tang.) e la lunghezza delle tracheidi.

TABELLA I.

	ABIES NEBRODENSIS	*ABIES ALBA*
RAMO DI 2 ANNI . . .	Strato di sughero spesso. Processo di biseriazione del parenchima corticale lento. Scarsa quantità di sostanze amilacee ed oleoresinose nella corteccia.	Strato di sughero esiguo. Processo di biseriazione del parenchima corticale rapido. Notevole accumulo di sostanze amilacee ed oleoresinose nella corteccia, di sostanze amilacee soltanto nel legno.
RAMO DI 6 ANNI . . .	Processo di biseriazione del parenchima corticale lento. Midollo brunastro. Presenza di false cerchie. Lignificazione discontinua. Quantità di legno primaticcio inferiore al tardivo. Notevole sproporzione fra estensione della superficie tracheidale e diametro delle punteggiature areolate. Maggiore quantità di sostanze amilacee nei parenchimi legnosi, minore in quelli corticali.	Processo di biseriazione del parenchima corticale rapido. Midollo biancastro. Assenza di false cerchie. Lignificazione uniforme. Quantità di legno primaticcio superiore al tardivo. Scarsa sproporzione fra estensione della superficie tracheidale e diametro delle punteggiature areolate. Maggiore quantità di sostanze amilacee nei parenchimi corticali; scarsa quantità di sostanze amilacee nei parenchimi legnosi.
FOGLIE DI 2 ANNI. . .	Strato ipodermico continuo. Cellule del palizzata normalmente allungate. Linee stomatiche: 10 per zona (come massimo). Nel palizzata: sostanze amilacee scarse. Nel lacunoso: sostanze amilacee abbondanti.	Strato ipodermico discontinuo. Cellule del palizzata notevolmente allungate (persino il doppio rispetto ad *A. nebrodensis*). Linee stomatiche: 12 per zona (come massimo). Nel palizzata: sostanze amilacee ed oleoresinose abbondanti. Nel lacunoso: sostanze amilacee ed oleoresinose abbondanti.
FOGLIE DI 6 ANNI. . .	Strato ipodermico continuo. Cellule del palizzata normalmente allungate. Linee stomatiche: 10 per zona (come massimo). Nel palizzata: sostanze oleose abbondanti; sostanze amilacee scarse. Nel lacunoso: sostanze oleose abbondanti; sostanze amilacee scarse.	Strato ipodermico discontinuo. Cellule del palizzata notevolmente allungate (persino il doppio rispetto ad *A. nebrodensis*). Linee stomatiche: 12 per zona (come massimo). Nel palizzata: sostanze amilacee ed oleoresinose scarse. Nel lacunoso: sostanze amilacee ed oleoresinose scarse.
TRONCO.	Corteccia spessa. Cerchie legnose esigue. Eguaglianza quantitativa del legno primaticcio e del legno tardivo o prevalenza del primo sul secondo. Notevole lunghezza delle tracheidi. Raggi molti alti. Abbondanti sostanze amilacee e resinose nel parenchima corticale e legnoso.	Corteccia esigua. Cerchie legnose spesse. Prevalenza del legno primaticcio sul tardivo. Lunghezza delle tracheidi moderata. Raggi moderatamente alti. Assenza di sostanze amilacee nei parenchimi corticali e legnosi.

TABELLA II.

	ABIES NEBRODENSIS				
	Ramo 2 anni	Ramo 6 anni	Foglie 2 anni	Foglie 6 anni	Tr
Spessore sughero	μ 135 (media)	—	—	—	
Spessore corteccia	—	—	—	—	15 mr
Spessore anelli legnosi . .	—	—	—	—	1184
Altezza raggi	—	10 cell. (mass.)	—	—	87 cel
Frequenza raggi (per mmq) in sez. tang.	—	83 (media)	—	—	32 (m
N. cellule parenchima rad. (sez. tang.)	—	310 (media)	—	—	420 (
Largh. cell. parench. rad. .	—	18 μ (media)	—	—	18 μ
Lungh. cell. parench. rad. .	—	80 μ (media)	—	—	206 μ
Largh. tracheidi prim. . .	—	15 μ (media)	—	—	53 μ
Largh. tracheidi tard. . .	—	11 μ (media)	—	—	41 μ
Lungh. tracheidi prim. . .	—	1260 μ (media)	—	—	4030
Lungh. tracheidi tard. . .	—	1320 μ (media)	—	—	4305
Spessore parete trach. primat.	—	1,5 μ (media)	—	—	6 μ (r
Spessore parete trach. tard.	—	4,5 μ (media)	—	—	12 μ
Dimensioni puntegg. areol. (pareti radiali) trach. prim.	—	12–14 μ	—	—	16–20
Dimensioni puntegg. areol. (pareti rad.) trach. tard.	—	8–10 μ	—	—	10–13
Dimensioni puntegg. areol. trach. prim. (campo d'incr.)	—	4 μ (media)	—	—	6,6 μ
Dimensioni puntegg. areol. trach. tard. (campo d'incr.)	—	4×2 μ (media)	—	—	5×6,
N. punteggiature areolate (campo d'incrocio) . . .	—	2 (rar. 1)	—	—	1–2 (
N. file stomatiche.	—	—	7–10 per zona	7–10 per zona	
Frequenza stomi (per 500 μ^2)	—	—	43 (media)	38 (media)	
Altezza apparato stomatico	—	—	45 μ	55 μ	
Larghezza apparato stomatico	—	—	34 μ	32 μ	

ABIES ALBA

o 2 anni	Ramo 6 anni	Foglie 2 anni	Foglie 6 anni	Tronco
media)	—	—	—	—
—	—	—	—	8 mm
—	—	—	—	3,8 mm
—	10 cell. (mass.)	—	—	45 cell. (mass.)
	67 (media)			30 (media)
	250 (media)			346 (media)
	20 μ (media)			20 μ (media)
	88 μ (media)			206 μ (media)
	23 μ (media)			62 μ (media)
	16 μ (media)			40 μ (media)
	1220 (media)			2446 μ (media)
	1345 μ (media)			3321 (media)
	1,5 μ (media)			5 μ (media)
—	5 μ (media)			12,5 μ (media)
	13–16 μ			16–20 μ
	8–10 μ			10–13 μ
	5 μ (media)			6,6 μ (media)
—	5 × 3 (media)			5 × 6,6 (media)
—	2 (rar. 1)			1–2 (rar. 3)
—	—	12 per zona	12 per zona	—
—	—	38 (media)	45 (media)	—
—	—	57 μ	63 μ	—
—	—	38 μ	40 μ	—

Se *Abies nebrodensis*, sulla base di questi soli caratteri discriminativi, non si può considerare una specie a sé, molti altri caratteri su esposti, oltre questi ultimi, sono tali, però, da indurci a considerarla una entità ecologica molto ben differenziata.

SPIEGAZIONE DELLE TAVOLE

Tavola I.

Figg. 1 e 1 *bis* – *A. nebrodensis* e *A. alba*. Rametti di 2 anni: notare il diverso spessore sugheroso (maggiore in *A. nebrodensis*, minore in *A. alba*). Sez. trasv. (× 50).

Figg. 2 e 2 *bis*. – *A. nebrodensis* e *A. alba*. Rami di 6 anni: notare il diverso spessore degli anelli (più esiguo in *A. nebrodensis*, più spesso in *A. alba*) e la diversa quantità di legno tardivo (maggiore in *A. nebrodensis*, minore in *A. alba*). Sez. trasv. (× 70).

Figg. 3 e 3 *bis*. – *A. nebrodensis* e *A. alba*. Foglie di 6 anni: notare le diverse dimensioni degli elementi del palizzata (minori in *A. nebrodensis*, maggiori in *A. alba*). Sez. trasv. (× 500).

Tavola II.

Figg. 4 e 4 *bis*. – *A. nebrodensis* e *A. alba*. Tronco a livello della corteccia giovane: è evidente che il processo di biseriazione del parenchima tangenziale avviene più lentamente in *A. nebrodensis* che in *A. alba*. Sez. trasv. (× 70).

Figg. 5 e 5 *bis*. – *A. nebrodensis* e *A. alba*. Tronco a livello del legno: anche nel tronco di *A. nebrodensis* su una medesima superficie il legno tardivo può prevalere talvolta sul primaticcio, mentre sempre l'inverso si ha in *A. alba*. Sez. trasv. (× 70).

Tavola III.

Figg. 6 e 6 *bis*. – *A. nebrodensis* e *A. alba*. Legno del tronco: è evidente la diversa altezza dei raggi (maggiore in *A. nebrodensis*, minore in *A. alba*. Sez. tang. (× 70).

Figg. 7 e 7 *bis*. – *A. nebrodensis* e *A. alba*. Legno del tronco in sez. rad.: notare l'elevato contenuto amilaceo nei raggi di *A. nebrodensis* e la sua assenza in quelli di *A. alba* (× 500).

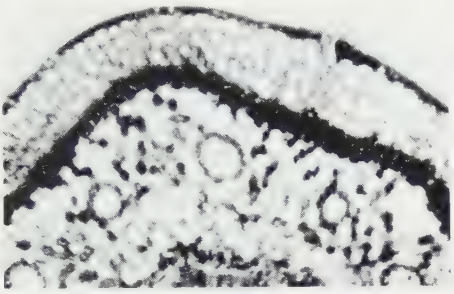


Fig. 1. – *A. nebrodensis.*

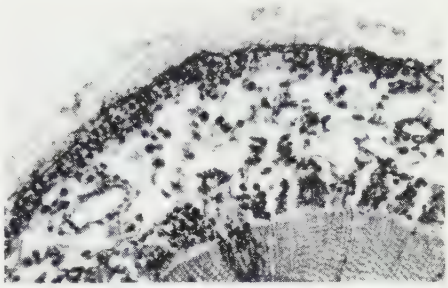


Fig. 1 *bis.* – *A. alba.*

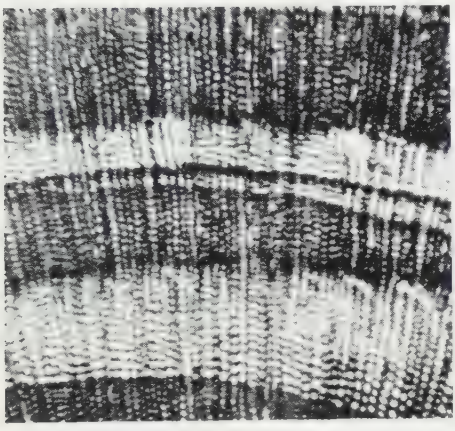


Fig. 2. – *A. nebrodensis.*

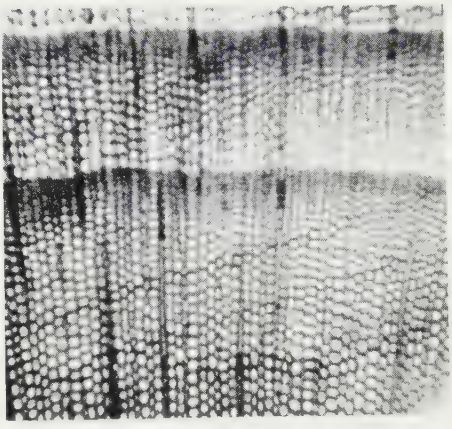


Fig. 2 *bis.* – *A. alba.*

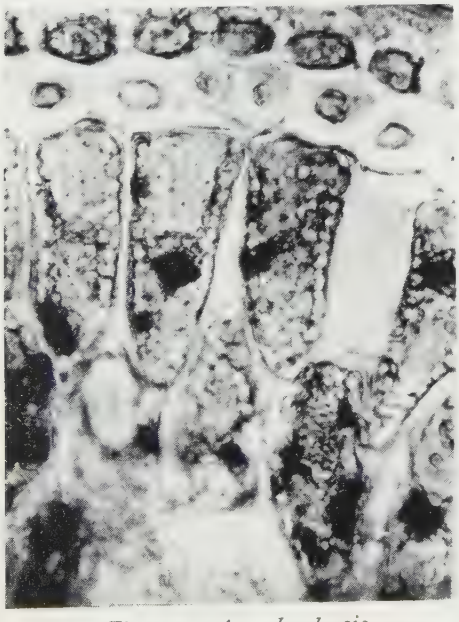


Fig. 3. – *A. nebrodensis.*

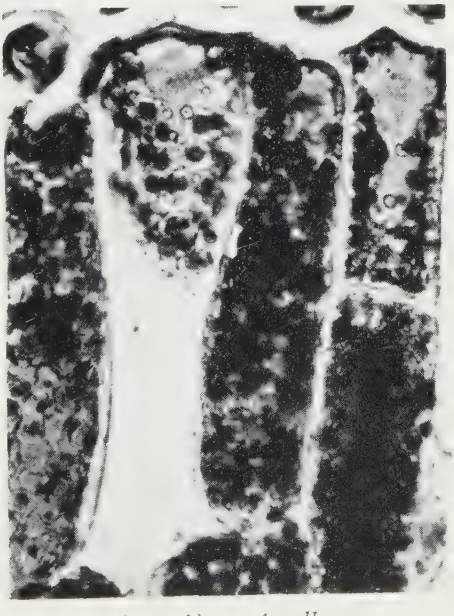


Fig. 3 *bis.* – *A. alba.*

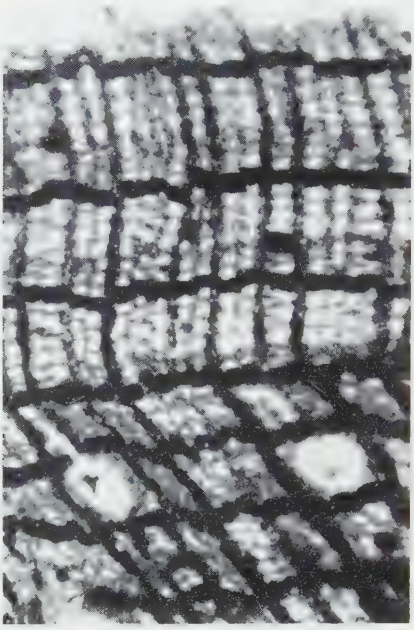


Fig. 4. – *A. nebrodensis.*

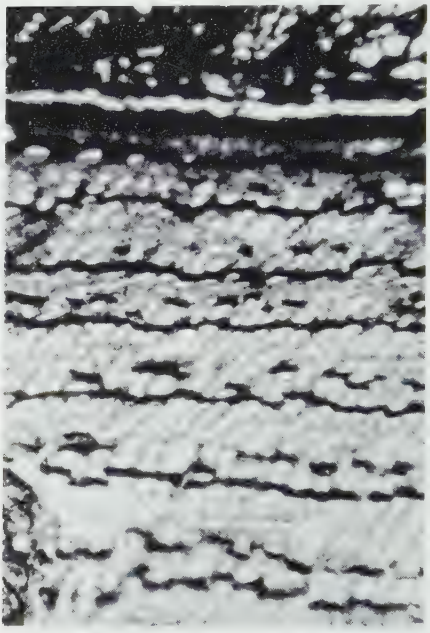


Fig. 4 *bis.* – *A. alba.*

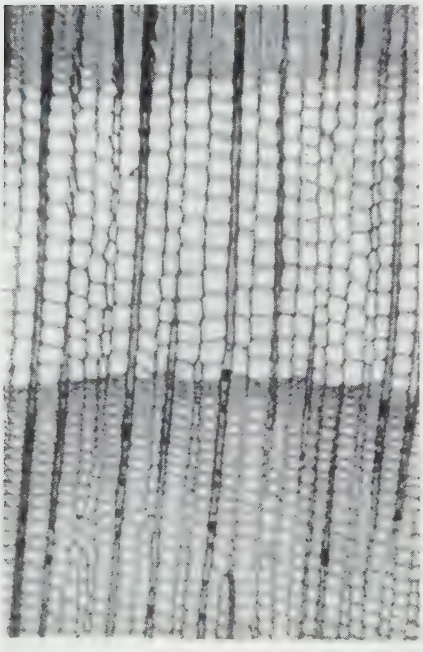


Fig. 5. – *A. nebrodensis.*

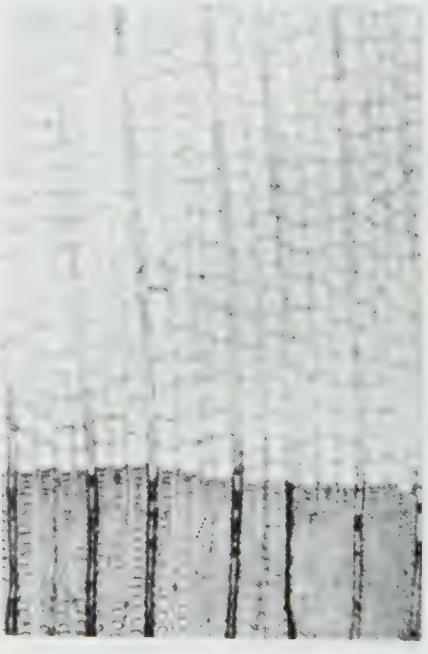


Fig. 5 *bis.* – *A. alba.*

Fig. 6. – *A. nebrodensis.*

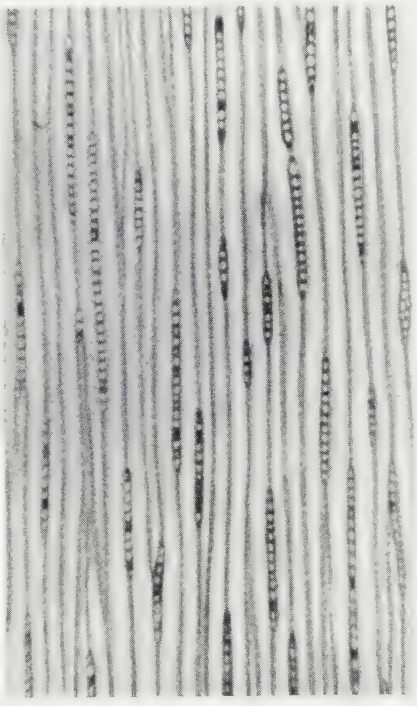


Fig. 6 *bis.* – *A. alba.*

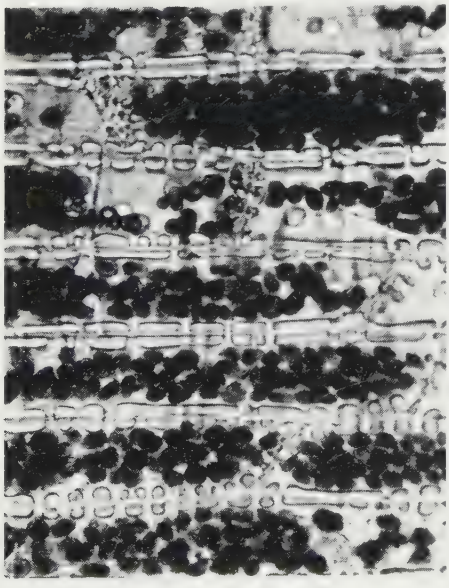


Fig. 7. – *A. nebrodensis.*

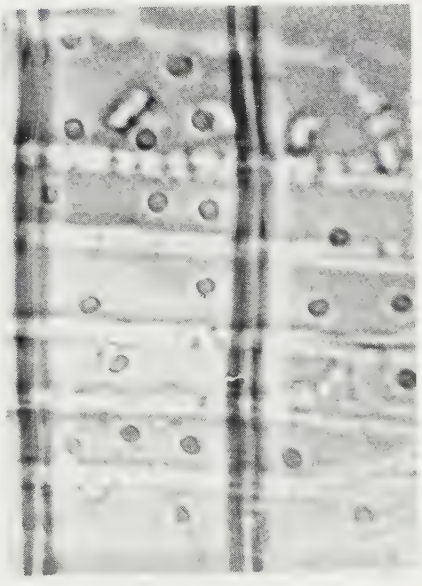


Fig. 7 *bis.* *A. alba.*

cedono numerose collaterali, molte delle quali finissime, che si risolvono sulle fibre muscolari. Poiché le fibre più grosse decorrono per estensioni ragguardevoli nella parete muscolare della ventosa, non di rado raggiungendo con le loro ultime diramazioni il bordo esterno di questa, ne deriva che una unica fibra, per mezzo delle sue numerosissime collaterali, tiene sotto il suo controllo un numero rilevante di unità muscolari. Va ancora rilevato che le fibre di maggiori dimensioni e quindi anche le gigantesche, sono sempre accompagnate sin dal loro ingresso nella muscolatura della ventosa da fibre di calibro estremamente fine; queste costituiscono attorno ai grossi neuriti plessi assai fini che seguono il tronco principale e le sue collaterali sino in corrispondenza della loro risoluzione a ridosso delle fibrocellule muscolari.

Confermando un precedente reperto osservato in *Loligo*, ho potuto dimostrare anche in *Ommatostrephes* un contingente di fibre nervose che, originato da pirenofori situati nel ganglio della ventosa, si distribuisce alla compagine dell'epitelio che riveste il fondo della coppa acetabolare della ventosa stessa. Tali fibre nervose si originano da cellule del ganglio situate prevalentemente al suo polo distale e quindi più prossimo al fondo della coppa acetabolare. Tali cellule nervose hanno per solito dimensioni modeste (10–15 micron) rispetto ai pirenofori dai quali prendono origine le fibre motrici destinate alla muscolatura. Data la vicinanza del ganglio all'epitelio ora accennato, è possibile alcune volte seguire il decorso di tali fibre. Esse penetrano nell'epitelio isolate o anche riunite in fascetti. Ciascuna fibra, una volta superata la membrana basale, si risolve in vari e più fini filamenti che, disposti fra le cellule, formano delicati e finissimi plessi nei quali non è possibile osservare formazioni a carattere terminale (fig. 1).

Già in precedenza in *Loligo* avevo per varie ragioni prospettato la possibilità che tale corredo nervoso esplicasse una funzione effettrice ed in particolare eccito–secretrice. Orbene analogo significato penso di poter attribuire al corredo nervoso plessiforme dell'epitelio che riveste il fondo acetabolare della ventosa di *Ommatostrephes*. Fra le cellule epiteliali di rivestimento batiprismatiche sono infatti intercalati numerosi elementi secernenti che riversano alla superficie libera dell'epitelio un abbondante secreto viscoso. Si tratta di cellule a forma di otre che, in corrispondenza del loro polo distale, presentano uno stoma imbutiforme, più o meno svasato a seconda del momento funzionale nel quale è stato colto l'elemento. Il nucleo di tali cellule è basale, il terzo o la metà distale del corpo cellulare essendo occupato da materiale di secrezione; questo è rappresentato da una sostanza granulare che ha le caratteristiche istochimiche di un mucopolisaccaride acido. Gli elementi secernenti presenti in gran numero, intercalati fra le cellule epitaliali di rivestimento, mi sembra concorrano a giustificare la presenza del ricco plesso nervoso essenzialmente distribuito al terzo basale del rivestimento epitaliale.

D'altro canto in seno all'epitelio sono dislocati numerosi neuroni primari ai quali sembra deputato il compito di recettori. Trattasi di elementi nervosi estremamente polimorfi e di variabile dimensione. Taluni, monopolari, hanno forma globosa altri affusata o a clava. Quelli fusati raggiungono col loro

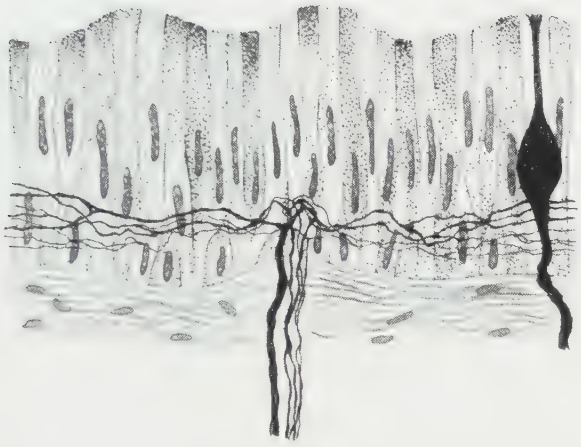


Fig. 1

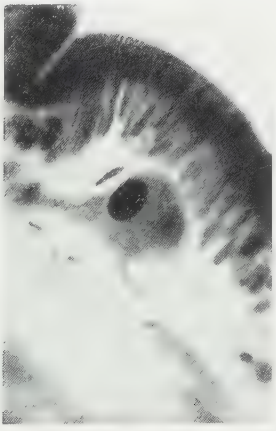


Fig. 2

apice la superficie epiteliale esterna ed a questo livello presentano numerosi peluzzi che paiono continuarsi con la struttura fibrillare del corpo cellulare (fig. 1). Altri ancora di forma irregolare emettono dal corpo cellulare numerosi prolungamenti che si risolvono entro l'epitelio stesso mentre l'altro prolungamento, avente carattere di neurite, ne fuoriesce per raggiungere il neuropilo gangliare. (fig. 2). Tale abbondanza e polimorfismo di recettori sembrano rappresentare non solo l'espressione della particolare sensibilità della ventosa ma anche il risultato di una iniziale differenziazione funzionale dell'apparato recettore.

BIBLIOGRAFIA.

GRAZIADEI P., *Sulla presenza di elementi nervosi negli epiteli di rivestimento della ventosa di* Sepia officinalis, « Z. Anat. Entw. Gesch. », *121*, 103–115 (1959).

GRAZIADEI P., *Nouvelles données sur le système nerveux de la ventouse du bras sessile de* Loligo vulgaris, « Acta Anat. », *40*, 231 -248 (1960).

SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA I

Fig. 1. – Epitelio batiprismatico che riveste il fondo della coppa acetabolare della ventosa. Nell'epitelio penetrano fibre nervose originate da pirenofori del ganglio della ventosa; a questo corredo nervoso viene attribuita una funzione eccito–secretrice. Nell'epitelio si trovano altresì numerosi neuroni sensoriali di varia forma. Nel disegno è illustrato uno di tali elementi, fusato e nel quale il polo distale raggiunge la superficie epiteliale esterna presentando a questo livello numerosi peluzzi. Dal polo profondo si origina il neurite destinato a reggiungre il ganglio della ventosa.

Fig. 2. – Epitelio batiprismatico che riveste il fondo della coppa acetabolare della ventosa. Entro l'epitelio si nota un pirenoforo di forma globosa dal quale si staccano due prolungamenti; l'uno risolventesi entro l'epitelio, l'altro, con carattere di neurite, destinato ai centri gangliari. (Microfot. Metodo di Bielschowsky–Gros) .

Fisiologia. — *Le lesioni del labirinto nelle rane sottoposte a centrifugazione* (*). Nota di Claudio Testa e Umberto Bordoni, presentata (**) dal Socio R. Margaria.

Margaria e coll. (1958) studiando l'effetto di intense accelerazioni gravitarie su rane e pesci immersi in acqua, riscontrarono, quasi costantemente, alterazioni di tipo vestibolare, confermate, per quanto riguarda i pesci, da un controllo istologico che permise di osservare il distacco degli otoliti dalle creste e macule.

Un ulteriore approfondimento sulla natura dei disturbi vestibolari in rane sottoposte a centrifugazione è contenuto in una comunicazione di Gualtierotti e coll. (1959), che si può così riassumere:

1° rane sottoposte a 2000 g e successivamente accecate, perdono l'equilibrio e l'orientamento: questa perdita è attribuita al distacco degli otoliti dalla cappa gelatinosa che ne costituisce il sostegno;

2° il test per giudicare del danno labirintico è dato dal nuoto, dalla capacità di recuperare la posizione prona una volta che l'animale sia posto in terra supino, dal salto;

3° gli animali presentano recupero completo del senso di equilibrio e orientamento dopo 10–12 gg; una successiva centrifugazione non provoca alcun disturbo, eliminando così l'obiezione che il recupero sia dovuto a ricostituzione dell'apparato otolitico.

Gli Autori avevano supposto che vi fosse, nelle rane, un meccanismo ignoto, responsabile dell'orientamento ed equilibrio, che verrebbe evidenziato una volta che i sistemi tradizionali (vestibolo, vista, recettori cutanei e muscolari) vengano posti fuori causa.

Abbiamo voluto approfondire ulteriormente il problema esaminando con particolare dettaglio la possibilità di recupero di rane slabirintate mono– e bilateralmente.

Gruppi, di 8–10 rane furono slabirintate mono– e bilateralmente, in etere, mediante taglio longitudinale mediano del palato e trapanazione della base della piramide (che, essendo traslucida, mostra in trasparenza il sito esatto del sacculo, che costituisce la parte più basale dell'orecchio interno); si sutura poi il palato con un filo di seta. Con questa tecnica viene distrutto anche l'organo dell'udito, che ha sede nel sacculo. Una parte degli animali veniva anche accecata.

(*) Dall'Istituto di Fisiologia Umana dell'Università di Milano.

Questa ricerca è stata finanziata dell'Ufficio di Ricerca Scientifica dell'Air Research and Development Command, United States Air Force, tramite il suo Ufficio Europeo, secondo il Contratto AF 61 (052)–23.

(**) Nella seduta del 19 novembre 1960.

Le rane venivano lasciate 48 h in una vasca contenente acqua fino al livello del dorso, ed esaminate poi ogni 2 gg rispetto alla postura, salto, nuoto. L'analisi della postura e del salto servirono a controllare la riuscita dell'operazione, poiché alterazioni del comportamento, rispetto a questi due parametri, implicano compromissione monolaterale del vestibolo [3–5]. Come indice dell'alterata cinesi di esclusiva origine vestibolare si è esaminato il comportamento dell'animale durante il nuoto: essendo l'animale immerso in acqua, infatti, è quasi del tutto assente lo stimolo gravitario dei recettori tattili e muscolari.

L'avvenuta distruzione del labirinto è sempre stata controllata istologicamente.

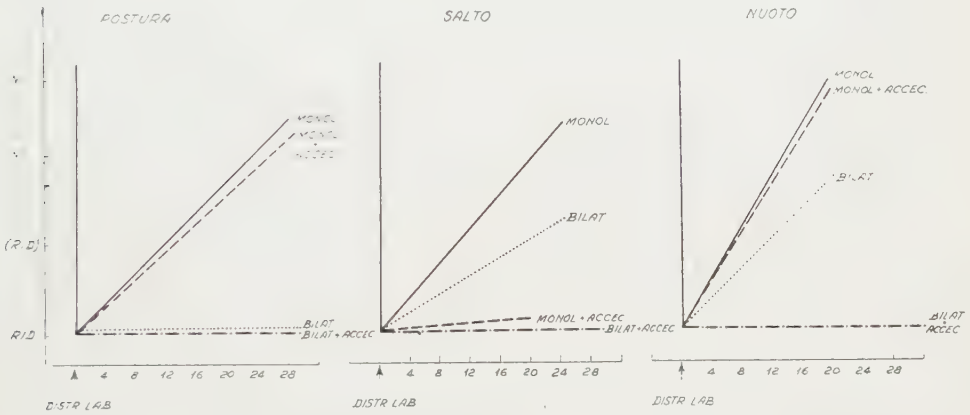


Fig. 1. – Illustrazione schematica delle modificazioni indotte nei tre tests: postura, salto e nuoto nella rana in seguito a distruzione monolaterale o bilaterale del labirinto, con o senza accecamento.

Sull'ascissa tempo in giorni dalla distruzione del labirinto. Sulla ordinata modificazione della funzione in quattro stadi arbitrari: *N* normale; (*N*) quasi normale; (*RID.*) alterazione di media intensità; *RID.* funzione fortemente compromessa.

Risultati.

A) Le rane slabirintate monolateralmente presentavano dopo 48 h nel 90 % dei casi postura obbligata in torsione verso il lato operato; tutte saltavano a vite e deviavano, nel nuoto, verso il lato operato. Gli animali miglioravano progressivamente fino a ritornare normali dopo 20 gg nel salto e nel nuoto; per quanto riguardava la postura permaneva invece un accenno alla torsione del dorso.

B) Le rane slabirintate monolateralmente e accecate presentavano dopo 48 h postura obbligata in torsione verso il lato operato nel 90 % dei casi. Molto difficile era esaminare il comportamento nel salto perché, mancando l'organo della vista, non potevano eseguire che piccoli salti, poco indicativi. Nel nuoto era evidente la torsione del dorso e la deviazione verso il lato operato. Come si è osservato nell'altro gruppo, nei 20 gg successivi le rane dimostrarono una progressiva normalizzazione della postura [5], residuandone

solo una lieve torsione verso il lato operato: il senso di direzione nel nuoto migliorò invece fino a raggiungere la norma.

C) Le rane slabirintate bilateralmente dopo 48 h presentano di solito postura obbligata in torsione verso un lato; se si corregge però manualmente tale postura, quasi tutti gli animali tendono a mantenere quella nuova loro imposta. Le rane slabirintate monolateralmente presentano invece torsione non suscettibile di correzione. L'animale slabirintato bilateralmente, quindi, è incapace di correggere una qualsiasi abnorme postura che gli venga imposta; nell'animale operato monolateralmente invece agisce la nota azione di prevalenza da parte del labirinto sano. È difficile indurre questi animali a saltare. Quando vengano immersi in acqua, ed occasionalmente anche fuori, compaiono violente crisi rotatorie: l'animale non nuota, ma si dibatte disordinatamente, rovesciandosi, e senza accennare a dirigersi da qualche parte determinata. Anche questo rilievo si accorda con osservazioni precedenti [5] fatte su mammiferi slabirintali bilateralmente: gli animali si comportano quasi normalmente finché poggiano in terra; immersi in acqua perdono la capacità di orientarsi e di nuotare, si dibattono disordinatamente e infine affogano. Nei 20 gg successivi all'operazione negli animali a visione integra, la postura permane indifferente, si ottiene più facilmente il salto; diminuiscono le crisi vertiginose quando gli animali siano immersi in acqua.

D) Le rane slabirintate bilateralmente e accecate dopo 48 h presentano postura indifferente; non si riesce a farle saltare, e il nuoto è reso impossibile per le crisi rotatorie già descritte nel gruppo *C*. Anche in queste rane si osservano saltuarie crisi rotatorie a terra di breve durata. Questa condizione non appare suscettibile di miglioramento fino al 30° giorno dall'operazione.

Discussione.

I dati da noi ottenuti confermano, in sostanza, le osservazioni ormai classiche compiute in passato. Di alcune divergenze si può facilmente render conto.

Degli animali slabirintati monolateralmente, il 90 % presentava postura obbligata; il 100 % salto a vite e deviazione nel nuoto. Quanto al 10 % che non dimostrava postura obbligata, si può spiegare il fatto tenendo presente che la torsione, sintomo primario della slabirintazione monolaterale, può a volte mancare, perché corretta da altre stimolazioni sensitive, provenienti cioè dai recettori visivi, cutanei e muscolari: si tratta infatti di rane non accecate e poggianti sul terreno; in acqua tutti gli animali presentavano torsione del dorso con deviazione verso il lato operato, chiari segni di deficit vestibolare monolaterale. La stessa azione vicariante da parte dei recettori cutanei, visivi e muscolari si può invocare per spiegare il recupero delle funzioni motorie dopo la slabirintazione.

Anche le rane slabirintate monolateralmente e accecate paiono adattarsi alla loro condizione supplendo coi recettori cutanei e muscolari alla

prevalenza del labirinto restante, poiché la postura ritorna rapidamente normale e si riacquista il senso dell'orientamento nel nuoto.

Gli esperimenti negli animali slabirintati bilateralmente del gruppo *C* confermano dati già noti. Interessante è il rilievo di saltuarie crisi rotatorie a terra, che fanno supporre che l'informazione visiva, gravitaria e propriocettiva sia a volte insufficiente e non riesca a supplire completamente, nell'animale slabirintato, alla funzione espletata dal vestibolo. Costanti le crisi rotatorie in acqua: tale dato ci induce a considerare l'immersione in acqua come un mezzo particolarmente adatto ad esaminare le reazioni labirintiche, in quanto la perdita delle informazioni gravitarie fornite dai recettori cutanei e muscolari non compensa più il deficit vestibolare e ne rende più evidenti le manifestazioni. In questi animali pare si abbia un miglioramento di queste crisi vertiginose in acqua col passare dei giorni, probabilmente grazie all'effetto vicariamente della vista.

Infatti gli animali slabirintati totalmente ed accecati presentano i segni più classici ed imponenti di compromissione vestibolare, che rimangono definitivi. L'assenza di recupero non giustifica più l'ipotesi [1] che nella rana possa esistere un meccanismo particolare per il senso dell'orientamento al di fuori di quello tradizionale.

Si può quindi dedurre che i segni di deficit labirintico indotti in animali sottoposti a centrifugazione a 2000 g sono probabilmente provocati da lesioni parziali e, forse, monolaterali. Quasi impossibile risulta il controllo istologico sulla effettività di tale tipo di deafferentazione, data la particolare costituzione anatomica della regione in esame. L'orecchio interno della rana, infatti, pur essendo molto simile a quello dei mammiferi, presenta considerevoli differenze riguardo all'apparato otolitico, essendo questo costituito da una sospensione di cristallini di $CaCo_3$ nell'endolinfa; alcuni di questi cristallini poggiano sulla cappa gelatinosa delle creste e macule e fungono da statoliti: lavorando con le comuni tecniche di decalcificazione, i cristallini si sciolgono e, date le loro dimensioni, non rimane traccia di una ganga di sostegno che serva, come nei mammiferi e nei pesci, a localizzarli. La piccolezza di questi otoliti spiega anche la difficoltà di ottenere una totale interruzione delle connessioni col recettore col metodo della centrifugazione a 2000 g.

Bibliografia.

[1] T. Gualtierotti, G. Gallitelli e R. Margaria, *Atti Congr. Intern. Medicina Aeron.*, Roma, ottobre 1959.
[2] R. Margaria, T. Gualtierotti e D. Spinelli, « J. Av. Med. », *29*, 433 (1958).
[3] W. J. McNally, e J. Tait, « An. J. of Physiol. », *75*, 155 (1925).
[4] U. Moncharmont, *Anatomia della rana*, Ed. Pellerano–Del Gaudio, Napoli 1950.
[5] Prosser, Brown, Bishop, John, Wulf, *Comparative animal Physiology*, Ed. Saunders, London 1950.

Fisiologia. — *Distribuzione della frequenza di scarica della singola fibra del sistema muscolare dell'uomo durante contrazioni isometriche massimali* (*). Nota di Francesco Bracchi, Miryam Cattorini e Torquato Gualtierotti, presentata (**) dal Socio R. Margaria.

Gualtierotti e Bracchi (1959) avevano riscontrato che la frequenza di scarica del motoneurone spinale è indipendente dalla tensione esercitata dal muscolo corrispondente, tranne che nel primissimo periodo della contrazione; e che la frequenza di scarica a regime costante è significativamente maggiore nei muscoli dell'arto superiore rispetto a quelli dell'arto inferiore.

Le presenti ricerche sono state eseguite allo scopo di stabilire la distribuzione delle frequenze di scarica della singola fibra muscolare, e quindi del singolo motoneurone spinale, nei diversi distretti corporei di uno stesso individuo. Gli esperimenti sono stati condotti con la tecnica già illustrata nel lavoro citato (Gualtierotti e Bracchi, 1959). In ogni singolo muscolo è stata determinata la frequenza di scarica di almeno 4 fibre per un periodo di 1/2 – 1 min alla tensione isometrica massima volontaria. Nella Tabella I sono riportati i risultati ottenuti negli 11 muscoli esplorati.

Tabella I.

Muscolo	Innervazione	Frequenza media alla massima tensione	σ
Massetere	V cran.	18,44	2,2
Trapezio	XI cran. C 2–C 3	18,86	3
Deltoide	C 4–C 6	15,97	3
Bicipite	C 5–C 6	18,52	2,2
Brachioradiale	C 5–C 6	17,58	2,5
Tricipite	C 6–C 8	16,71	2,3
Gran pettorale	C 5–T 1	18,28	2,6
Retto addominale	T 6–L 1	15,27	1,6
Spinoso dorsale	T 6–T 7	15,99	2,1
Retto femorale	L 2–L 4	11,69	0,78
Gemelli	L 5–S 2	10,30	1

(*) Dall'Istituto di Fisiologia Umana dell'Università di Milano.

Questa ricerca è stata finanziata dall'Ufficio di Ricerca Scientifica dell'Air Research and Development Command, United States Air Force, tramite il suo Ufficio Europeo, secondo il Contratto AF 61 (052)–23.

(**) Nella seduta del 19 novembre 1960.

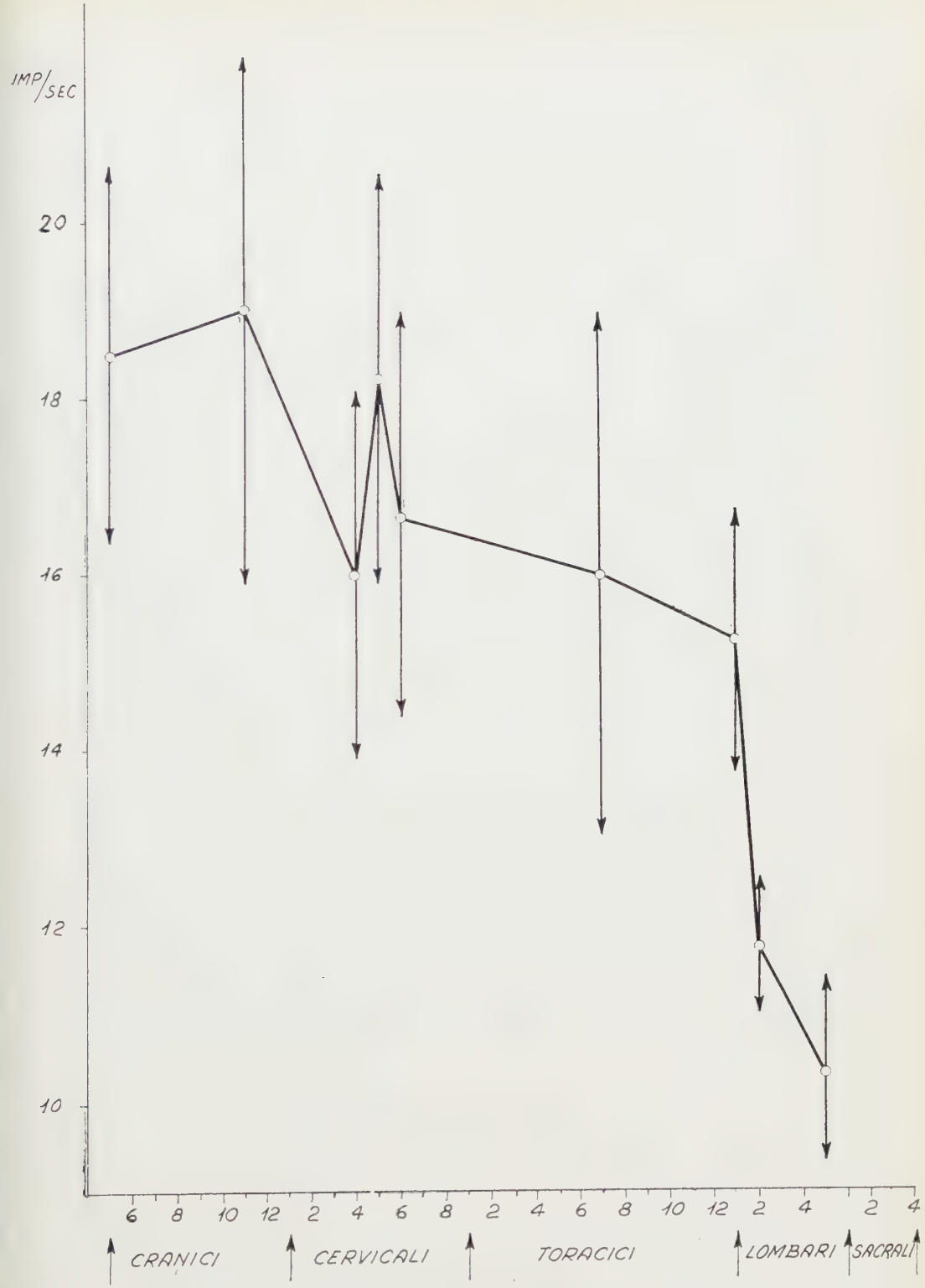


Fig. 1. – Illustrazione schematica del rapporto tra la posizione dei centri motori nell'encefalo e nel midollo e la frequenza di scarica dei corrispondenti gruppi muscolari.

Sull'ascissa posizione dei centri motori. Sull'ordinata potenziali d'azione della singola fibra muscolare per secondo.

Appare dall'andamento degli esperimenti che:

a) ogni unità motoria raggiunge molto rapidamente una frequenza di scarica costante a lei caratteristica e la mantiene invariata per lunghissimi periodi, anche di minuti;

b) in uno stesso muscolo le unità motorie entrano in azione a livelli critici di tensione che sembrano costanti per ciascuna di esse;

c) le unità motorie non sembrano presentare rotazione funzionale: non si sono infatti mai osservati, per un valore di tensione corrispondente allo stato di frequenza costante, periodi di silenzio della singola unità motoria con riprese periodiche, come sarebbe richiesto se una rotazione fisiologica avesse luogo;

d) ogni singolo muscolo dell'arto inferiore, e in grado minore quelli innervati dai nervi cranici, sembrano essere costituiti da unità motorie assai approssimatamente omogenee per quanto riguarda la loro frequenza di scarica: hanno, cioè, un basso valore di σ, di poco diverso da quello risultante da vari rilievi sulla stessa fibra. I muscoli dell'addome e in parte quelli del cinto scapolare, invece, sembrano contenere unità motorie miste. Se ne può dedurre che i centri motori spinali possono essere composti o da motoneuroni tutti dello stesso tipo, oppure da motoneuroni misti a scarica più o meno rapida;

e) la frequenza di scarica delle unità neuromotrici è significativamente diversa a seconda che le unità appartengano alla parte cefalo–toracica del midollo spinale e ai nervi cranici da una parte, oppure alla intumescenza lombare.

Si conferma quindi l'esistenza di una significativa differenza nella frequenza di scarica dei motoneuroni spinali nella parte più alta del midollo rispetto a quella dei motoneuroni della parte più bassa: la frequenza è massima nei muscoli della faccia, del collo, del cinto scapolare e del braccio, si riduce sensibilmente nei muscoli dell'addome e raggiunge il minimo nei muscoli dell'arto inferiore. Dal grafico della fig. 1, in cui sono indicate le frequenze di scarica delle singole fibre muscolari in rapporto alla posizione dei centri di innervazione nel midollo spinale dall'alto in basso, si può dedurre che vi è un decremento della frequenza caratteristica di scarica dei singoli motoneuroni spinali discendendo dal midollo cervicale all'intumescenza lombare.

Non sembra invece che vi sia alcuna differenza nei valori tipici di frequenza di scarica della singola fibra nei muscoli flessori ed estensori. Si può quindi concludere che la gamma di frequenze nel sistema muscolare dell'uomo è legata esclusivamente alla distribuzione topografica dei muscoli lungo l'asse verticale del corpo.

Questi risultati presuppongono l'esistenza di motoneuroni spinali con caratteristiche diverse: le massime differenze riscontrate si hanno fra due gruppi, uno corrispondente alla parte alta del midollo spinale e uno al midollo lombare, aventi il primo una frequenza di scarica circa doppia del secondo. Ciò fa supporre che esistano due gruppi di motoneuroni, uno a sca-

rica rapida ed uno a scarica lenta, il primo prevalente nella parte superiore e il secondo nella parte inferiore del midollo spinale. Tali due gruppi di motoneuroni sono stati descritti nella recente letteratura: Eccles e coll. (1958) e Buller e coll. (1959) hanno infatti dimostrato l'esistenza nel midollo spinale del gatto di motoneuroni con breve e motoneuroni con lunga iperpolarizza-

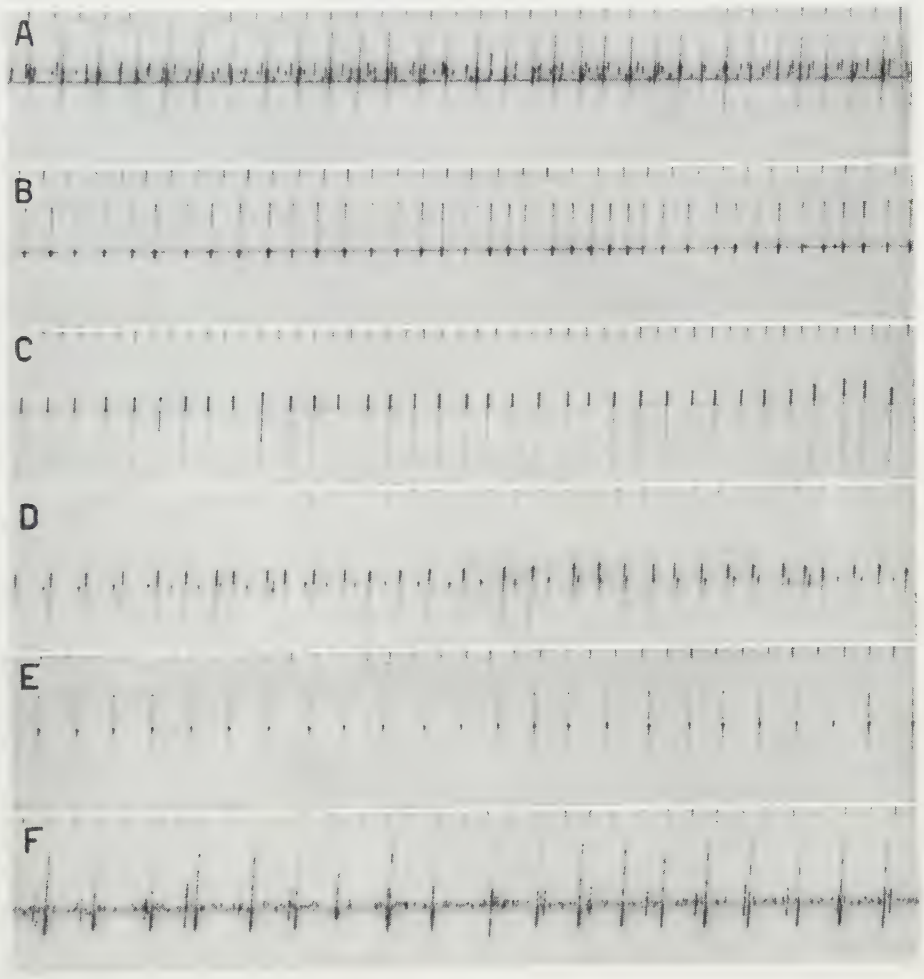


Fig. 2. – Potenziali d'azione di una singola fibra dei seguenti muscoli:

A massetere; *B* bicipite; *C* deltoide; *D* retto dell'addome; *E* retto femorale; *F* gemelli. Si noti il progressivo decrescere della frequenza da *A* a *F*.

zione postuma, e quindi a frequenza di scarica risp. rapida e lenta. Ad essi corrispondono muscoli a contrazione rapida e lenta: twitch (scossa muscolare semplice) = 25 e 75 msec. Questi Autori hanno anche dimostrato che tale caratteristica dei motoneuroni non è legata al muscolo che innervano, poiché l'innesto di nervi « rapidi » su muscoli « lenti » o viceversa modifica le caratteristiche funzionali del muscolo.

Sulla base dei risultati suesposti si può avanzare l'ipotesi che i muscoli ad azione prevalentemente tonica, in funzione antigravitaria, sono innervati in prevalenza da motoneuroni a scarica lenta. Infatti i muscoli dell'arto inferiore e in misura minore quelli dell'addome sembrano essere particolarmente ricchi di innervazione a frequenza bassa, mentre nel viso, collo e arto superiore prevalgono le frequenze rapide. Questa caratteristica distribuzione potrebbe costituire un modulo stabilitosi una volta per tutte nel midollo spinale dell'uomo, in funzione della stazione eretta. Esperimenti di controllo su quadrupedi potranno indicare se la diversa distribuzione del peso, in quel caso uguale sulle 4 membra, sia accompagnata da una corrispondente diversa distribuzione delle frequenze rapide e lente nel sistema muscolare.

Bibliografia.

A. J. Buller, R. M. Eccles e J. C. Eccles, *Atti XXI Congr. Int. Fisiologia*, Buenos Aires, p. 45 (1959).

J. C. Eccles, R. M. Eccles, e A. Lundberg, « J. Physiol. », *142*, 275 (1958).

T. Gualtierotti e F. Bracchi, « Boll. Soc. It. Biol. sper. », *35*, 2071 (1959).

Fisiologia. — *Relazioni elettrofisiologiche tra ippocampo e* neocortex (*). Nota di Ruggero Corazza e Pier Luigi Parmeggiani, presentata (**) dal Socio G. C. Pupilli.

In una Nota precedente (1) abbiamo descritto le modificazioni dei ritmi pulsatori dell'ippocampo e della neocorteccia provocate dalla stimolazione elettrica ripetitiva del N. ischiatico nel Gatto curarizzato e non narcotizzato. Per effetto di tale stimolazione compaiono nei tracciati dell'*archicortex* onde di aspetto sinusoidale (200–500 μV; 3–5/sec) e in quelli del *neocortex*, su di uno sfondo costituito da onde rapide e di scarsa ampiezza (20–100 μV; 30–40/sec), oscillazioni di potenziale della frequenza di 2–5/sec e di ampiezza progressivamente crescente (100–200 μV), la quale sovente palesa regolari variazioni (*waxing and waning*). Si è potuto dimostrare che le onde neocorticali di bassa frequenza costituiscono una manifestazione bioelettrica del *neocortex*. Esponiamo ora gli effetti provocati dalla coagulazione di determinate strutture rinencefaliche e talamiche sui fenomeni descritti.

Per quanto concerne la tecnica di preparazione degli animali, di derivazione dell'attività elettrica delle strutture in esame e di stimolazione del N. ischiatico rimandiamo per brevità alla Nota già citata (1).

Per procedere alla diatermocoagulazione delle strutture rinencefaliche (porzione basale del setto, colonne discendenti del fornice, fasci mammillo–talamici) e talamiche (nuclei aspecifici), si introducevano nell'encefalo due elettrodi di Hess (2) tripli, costituiti da aghi di acciaio del diametro di 0,25 mm, rivestiti di vernice isolante fuorché per un tratto di 1 mm in corrispondenza della punta: la coagulazione era ottenuta col metodo dipolare, connettendo una coppia di aghi col coagulatore di Wyss (3) e facendo passare per una durata pari a 20 sec una corrente alternata ad alta frequenza (500.000 Hz) e di intensità pari a 37–42 mA. Era così possibile attuare coagulazioni unilaterali e bilaterali, più o meno estese secondo il numero di coppie formate coi sei aghi a disposizione.

Il controllo istologico della sede e della estensione delle coagulazioni nelle strutture sottocorticali veniva eseguito su sezioni seriate, colorate col metodo di Nissl, delle formazioni encefaliche prese in esame.

(*) Lavoro eseguito, col sussidio del Consiglio Nazionale delle Ricerche, nell'Istituto di Fisiologia umana dell'Università di Bologna.

(**) Nella seduta del 10 dicembre 1960.

(1) R. Corazza e P. L. Parmeggiani, « Rend. Acc. naz. Lincei », Cl. Sci. fis., mat. nat., serie 8ª, questo volume.

(2) W. R. Hess, *Beiträge zur Physiologie des Hirnstammes.* – I. *Die Methodik der lokalisierten Reizung und Ausschaltung subkortikaler Hirnabschnitte.* Leipzig, Georg Thieme (1932), pp. 43–51.

(3) O. A. M. Wyss, « Helv. physiol. Acta », III, 437 (1945).

Dopo la coagulazione bilaterale della porzione basale del setto e del tubercolo olfattorio, per effetto della stimolazione ripetitiva del N. ischiatico non si manifesta la sincronizzazione dell'attività elettrica dell'ippo-

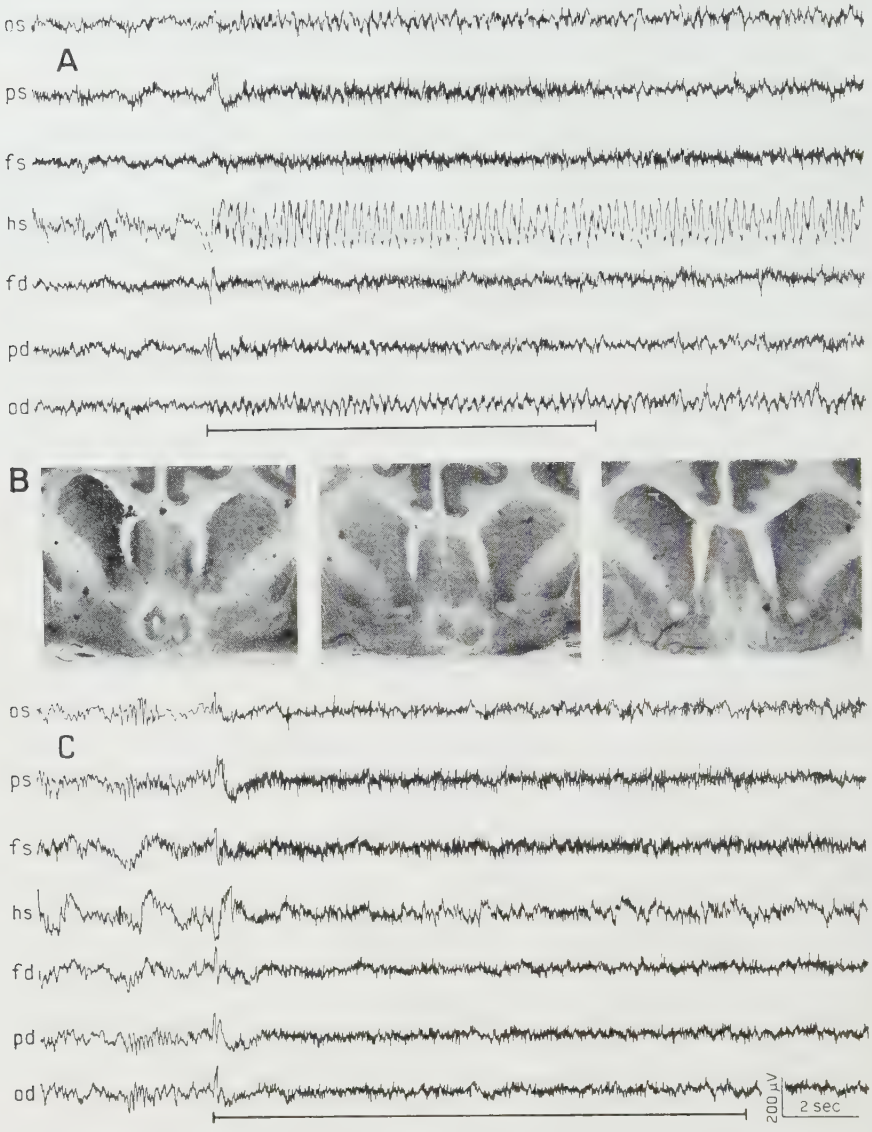


Fig. 1. – Effetti della stimolazione elettrica ripetitiva del N. ischiatico sull'attività elettrica dell'ippocampo e della neocorteccia dopo coagulazione di strutture rinencefaliche.

Animale curarizzato e non narcotizzato. A: stimolazione del N. ischiatico destro (2 V; 20/sec; 1 msec) prima della coagulazione. B: estensione delle lesioni provocate dalla coagulazione (500.000 Hz; 40 mA; 20 sec), la quale interessa la base del setto e il tubercolo olfattorio (colorazione col metodo di Nissl; ingr. 2 ×). C: stimolazione del N. ischiatico destro (3 V; 20/sec; 1 msec) dopo la coagulazione. La calibrazione indicata in C vale anche per A. In questa e nella figura successiva le lettere che precedono ciascun elettrogramma indicano la sede dalla quale è stata effettuata la derivazione dei potenziali (*os* = area occipitale sinistra; *ps* = area parietale sinistra; *fs* = area frontale sinistra; *hs* = ippocampo sinistro; *hd* = ippocampo destro; *fd* = area frontale destra; *pd* = area parietale destra; *od* = area occipitale destra) e la linea sotto i tracciati indica il momento e la durata della stimolazione del nervo. Gli elettrogrammi riprodotti in questa e nella figura successiva sono stati registrati mediante il metodo monopolare.

campo; il che è conforme a quanto avevano osservato Green e Arduini [4] nel Coniglio. Nei tracciati neocorticali un ritmo evidente delle onde di bassa frequenza non è allora presente, mentre è ancora possibile ottenere la reazione di risveglio (fig. 1).

Dopo la coagulazione di una porzione del talamo che comprende i nuclei *reuniens*, *centralis medialis*, *rhomboidalis*, *interanteromedialis* in corrispondenza del piano sagittale mediano, e i nuclei *submedius*, *paracentralis*, *ventralis medialis*, *medialis dorsalis*, *anterior medialis* e il tratto mammillo–talamico in corrispondenza del piano sagittale paramediano di un lato, la stimolazione periferica non desta un ritmo evidente di onde neocorticali di bassa frequenza, pur palesandosi i fenomeni di sincronizzazione dell'attività elettrica dell'ippocampo. Dopo la interruzione incompleta della colonna discendente del fornice di un lato, associata a quella completa del fornice e del fascio mammillo–talamico dell'altro lato, nei tracciati derivati dalle aree frontali del *neocortex* non si osserva più un ritmo di onde di bassa frequenza per effetto della stimolazione del N. ischiatico, essendo per altro meno appariscenti anche i fenomeni di sincronizzazione a livello dell'ippocampo (fig. 2).

Non abbiamo compiuto esperimenti cronici, limitandoci a controllare gli effetti della stimolazione periferica sull'attività elettrica del *neocortex* e dell'ippocampo per alcune ore dopo che l'animale era stato sottoposto alla coagulazione delle strutture anzidette.

Gli esperimenti di coagulazione da noi eseguiti indicano che dall'ippocampo partono gl'impulsi che provocano la comparsa delle onde di bassa frequenza derivabili dal *neocortex* nelle condizioni sperimentali esposte. Ricordiamo che Green e Morin [5], in esperimenti sulla Cavia, hanno registrato risposte diffuse a tutta la neocorteccia per effetto della stimolazione elettrica (0,3–1 V; 0,5 msec) della commessura dell'ippocampo o del fornice ovvero del tratto mammillo–talamico. La stimolazione elettrica ripetitiva (7–10 V; 5 msec; 30/sec; 10–15 sec) di una colonna del fornice provoca nell'Uomo la comparsa di un ritmo di onde delta negli elettrogrammi derivati dall'area frontale ipsilaterale: per stimolazioni progressivamente più intense si può osservare la diffusione dell'effetto anche all'area frontale contralaterale, alle rimanenti regioni dell'emisfero ipsilaterale e meno frequentemente a quelle dell'emisfero contralaterale [García Austt, Arana, Migliaro, Sande e Segundo [6]].

Nei nostri esperimenti è stato inoltre osservato che dopo la coagulazione dei fasci mammillo–talamici e di taluni nuclei aspecifici del talamo, il ritmo delle onde di bassa frequenza non si palesa più con evidenza nei tracciati neocorticali. L'intervento del talamo e in particolare dei suoi nuclei

(4) J. D. Green a. A. A. Arduini, « J. Neurophysiol. », XVII, 533 (1954).

(5) J. D. Green a. F. Morin, « Amer. J. Physiol. », CLXXII, 175 (1953).

(6) E. García Austt Jr., R. Arana, E. Migliaro, M. T. Sande a. I. P. Segundo, « EEG clin. Neurophysiol. », VI, 653 (1954).

aspecifici nella genesi di tali onde sembra pertanto assai probabile. Una ulteriore chiarificazione deriva dal confronto fra le onde di bassa frequenza da

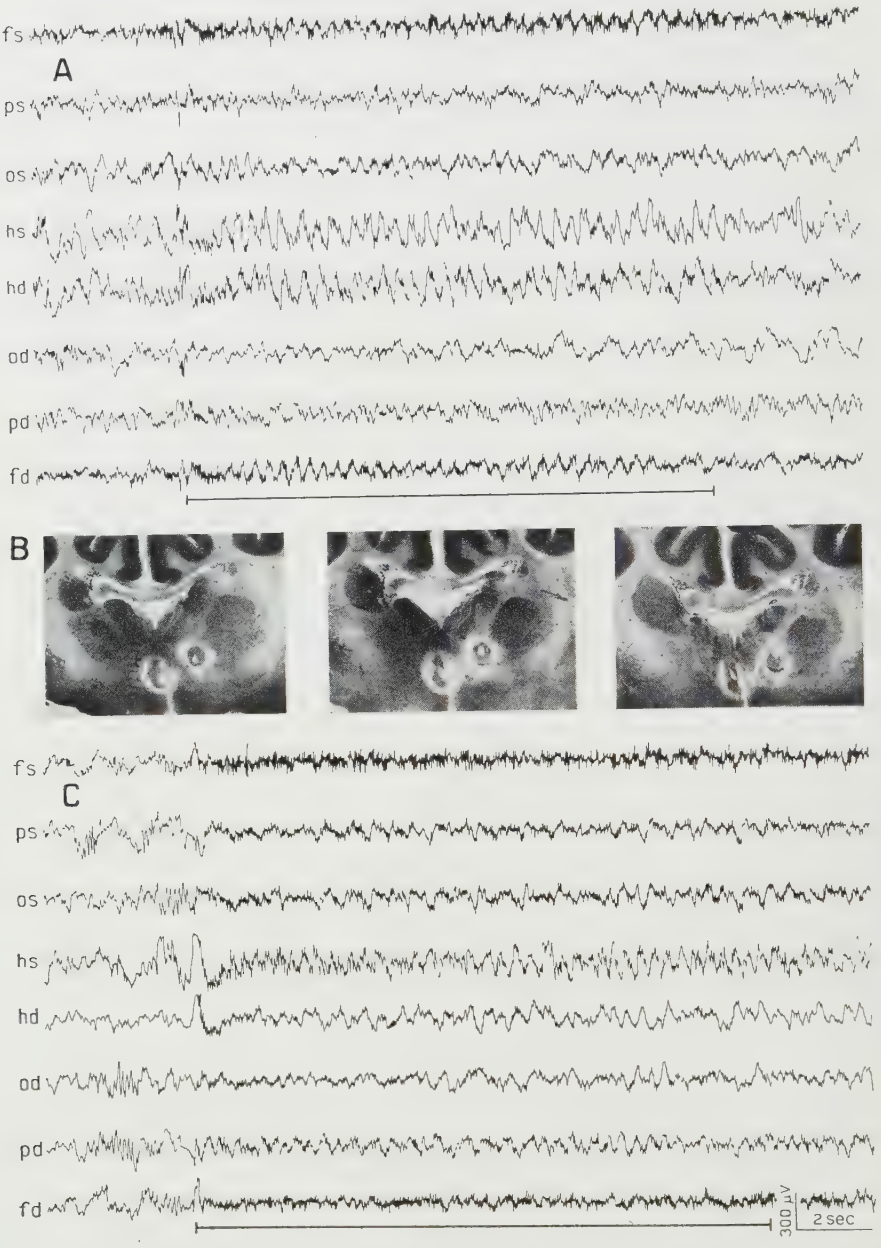


Fig. 2. – Effetti della stimolazione elettrica ripetitiva del N. ischiatico sull'attività elettrica dell'ippocampo e della neocorteccia dopo coagulazione di strutture rinencefaliche.

Animale curarizzato e non narcotizzato. A: stimolazione del N. ischiatico destro (0,5 V; 20/sec; 1 msec) prima della coagulazione. B: sede ed estensione delle coagulazioni (500.000 Hz; 37 mA; 20 sec), le quali hanno provocato la interruzione incompleta del fornice a sinistra e quella completa del fornice e del fascio mammillo-talamico a destra (colorazione col metodo di Nissl; ingr. 2×). C: stimolazione del N. ischiatico destro (1 V; 20/sec; 1 msec) dopo la coagulazione. La calibrazione indicata in C vale anche per A.

noi descritte e le risposte a reclutamento evocate nella corteccia cerebrale dalla stimolazione di bassa frequenza dei nuclei talamici aspecifici [Morison e Dempsey [7], Dempsey e Morison [8, 9]]. È evidente che i due fenomeni elettrici hanno aspetti in comune, dei quali i più significativi sono la proprietà del reclutamento e le periodiche variazioni di ampiezza (*waxing and waning*).

In conformità ai fatti osservati appare verosimile che l'ippocampo possa modulare l'attività del sistema talamico aspecifico, fungendo da intermediari i corpi mammillari e forse anche il sistema reticolare ad azione sincronizzante [Magni, Moruzzi, Rossi e Zanchetti [10], Cordeau e Mancia [11]].

Le presenti ricerche [cfr. anche [1]] sembrano avvalorare altresì l'ipotesi che l'ippocampo operi, in opposizione al sistema reticolare attivatore, in un processo di regolazione centrale, quando per effetto di stimoli di varia natura la sua attività elettrica risulti fortemente sincronizzata.

(7) R. S. Morison a. E. W. Dempsey, « Amer. J. Physiol », CXXXV, 281 (1942).
(8) E. W. Dempsey a. R. S. Morison, « Amer. J. Physiol. », CXXXV, 293 (1942).
9) E. W. Dempsey a. R. S. Morison, « Amer. J. Physiol. », CXXXV, 301 (1942).
(10) F. Magni, G. Moruzzi, G. F. Rossi a. A. Zanchetti, « Arch. it. Biol. », XCVII, 33 (1959).
(11) J. P. Cordeau a. M. Mancia, « EEG clin. Neurophysiol. », XI, 551 (1959).

Patologia. — *Penetrazione e metabolismo degli ormoni tiroidei nelle cellule isolate di adenocarcinoma Ehrlich–ascite* (*). Nota di Jean Roche, Italo Covelli e Gaetano Salvatore, presentata (**) dal Socio L. Califano.

Cellule non proliferanti di *E. coli* concentrano rapidamente ed in quantità importante i due principali ormoni tiroidei, la L–tiroxina (T_4) e la 3 : 5 : 3′–triiodo–L–tironina (T_3); gli ioduri e le iodotirosine (3–monoiodo–L–tirosina, MIT e 3 : 5–diiodo–L–tirosina, DIT) precursori biologici delle iodotironine, non vengono invece fissati dalle cellule bacteriche (Roche, Salvatore e Covelli, 1959). La penetrazione in tali cellule degli ormoni tiroidei ma non degli altri aminoacidi iodati o degli ioduri potrebbe rappresentare una proprietà particolare delle cellule bacteriche, giacché non sembra che i tessuti dei mammiferi, almeno *in vivo*, posseggono la stessa specificità nei riguardi dei vari composti iodati.

E noto, infatti, che gli ioduri diffondono nella maggior parte dei tessuti e dei liquidi dell'organismo animale (De Visschers e Beckers, 1957; Pitt–Rivers e Tata, 1959) e d'altronde le iodotironine, anche se in condizioni normali non sono presenti in circolo, vanno incontro a processi metabolici analoghi a quelli subiti dalle iodotironine, quali la desalogenazione (Albert e Keating, 1951; Stanbury, Kassenaar e Meijer, 1956) e la degradazione della catena alaninica (Tong, Taurog e Chaikoff, 1954) ciò che lascia dedurre che esse penetrino nella maggior parte delle cellule.

La presenza, però, tanto nelle cellule bacteriche (B–TBP: Pontieri, Salvatore, Cocelli e Roche, 1960), quanto in quelle degli animali (C–TBP: Tata, 1958, 1960) di un sistema proteico specifico, analogo a quello esistente nel plasma di tutti i vertebrati (TBP: Gordon, Gross, O'Connor e Pitt–Rivers, 1952; Salvatore, Vecchio e Macchia, 1959; Ingbar e Freinkel, 1960), capace di fissare selettivamente le iodotironine fra tutti i composti dello iodio, farebbe supporre che le cellule degli organismi superiori abbiano specificità di fissazione non dissimile da quella posseduta dalle cellule bacteriche. Il metabolismo delle iodotirosine potrebbe, difatti, avvenire solo a livello di organi, quali il rene o il fegato, dotati di funzioni metaboliche particolari e la distribuzione degli ioduri potrebbe essere extracellulare, ossia avvenire soltanto nella sostanza fondamentale del connettivo. *In vivo*, cioè, la ripartizione degli ioduri e delle iodotirosine potrebbe essere mascherata dalla interferenza della complessità strutturale dei tessuti, che sono tutti, ad eccezione del cristallino, dotati di connettivo.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Patologia generale della Università di Napoli.
(**) Nella seduta del 19 novembre 1960.

Nel presente lavoro si è quindi studiata la fissazione delle iodotironine, dell'acido 3 : 5 : 3'–triiodotiroacetico (TA_3), delle iodotirosine e degli ioduri in cellule animali isolate. Allo scopo di ottenere cellule animali non artificialmente isolate e condizioni sperimentali paragonabili a quelle che si realizzano in una sospensione batterica, sono state adoperate cellule di adenocarcinoma Ehrlich–ascite.

Le cellule del tumore d'ascite sono sospese *in vivo* nel liquido ascitico, che rappresenta l'equivalente della sostanza fondamentale del connettivo; d'altronde la presenza nel mezzo d'incubazione di proteine plasmatiche riduce la fissazione delle iodotironine alle cellule di *E. coli* (Covelli, 1960): si è quindi anche studiata l'azione del liquido ascitico e del plasma sulla fissazione degli ormoni tiroidei alle cellule isolate di adenocarcinoma di Ehrlich.

Le eventuali trasformazioni metaboliche delle iodotironine ad opera delle cellule isolate dell'adenocarcinoma di Ehrlich, sono state, inoltre, studiate mediante analisi radiocromatografica.

Parte sperimentale.

Il ceppo di adenocarcinoma Ehrlich–ascite veniva mantenuto mediante trapianti in topini bianchi (ceppo Swiss), maschi, del peso medio di 25 g. La sospensione cellulare (in media a 7–8 giorni di sviluppo) nel liquido ascitico veniva prelevata dalla cavità peritoneale del topo, resa incoagulabile con eparina e centrifugata a 500 g per 3 min a + 4° C. Le cellule venivano poi risospese in Krebs medium II–A (Krebs, 1950) privo di Ca^{++}, lavate tre volte, avendo cura di eliminare al tempo stesso le emazie eventualmente presenti, ed infine diluite nel medium II–A (KRP) o in quello I (KRB) in modo da avere nelle diverse prove tra 15 e 120 mg di cellule peso fresco per ml. La quantità di cellule in ogni saggio veniva valutata mediante: *a*) misura della torbidità della sospensione finale al fotometro Klett–Summerson con filtro 42; *b*) volume cellulare misurato secondo le indicazioni di McKee et al. (McKee, Lonberg–Holm e Jehl, 1953); *c*) peso secco (2 h a + 100° C); *d*) conta diretta delle cellule, previa opportuna diluizione. Nelle nostre condizioni, 10 mg di cellule peso secco corrispondono a circa 0,06 ml di cellule (quindi a 60 mg peso fresco), a $23 \cdot 10^6$ cellule ed a circa 400 U. Klett (filtro 42). Tali valori sono solo approssimativamente concordanti nelle varie prove nelle quali si è pertanto fatto sempre riferimento al volume cellulare (V_C) e quindi al peso fresco delle cellule (assumendo $d = 1$) direttamente misurato ovvero calcolato in base al peso secco (1 mg peso secco = 6 mg di cellule).

A) *Prove di fissazione dei composti iodati.*

Alle sospensioni cellulari si aggiungeva secondo le varie prove: L–tiroxina (T_4), 3 : 5 : 3'–triiodo–L–tironina (T_3), acido 3 : 5 : 3'–triiodotiroacetico (TA_3), 3 : 5–diiodo–L–tirosina (DIT), 3–monoiodo–L–tirosina (MIT) e INa, tutti marcati con ^{131}I (0,01 μC/ml) in concentrazioni finali comprese tra $2 \cdot 10^{-5}$ M e $2 \cdot 10^{-8}$ M.

Le prove venivano poi incubate a + 38° C e a + 4° C, in agitazione, per la durata di 6 ore, in aerobiosi (aria o carbogeno) o in anaerobiosi (N_2 95 % + CO_2 5 %).

A vari tempi dall'inizio dell'incubazione (in genere: 10', 20', 30', 60', 180' e 360') veniva prelevato un campione di 2 ml di sospensione cellulare che veniva poi centrifugato a 10.000 g per 5' a + 4° C. Allo scopo di determinare per ciascun tempo di incubazione lo ^{131}I totale presente nella sospensione (identico, nella stessa prova per tutti i vari tempi) e quello presente nella fase extracellulare (variabile in funzione della fissazione alle cellule), venivano eseguite misure di radioattività (e.s. < 2 %; contatore a scintillazione a cristallo forato NaI·Tl con analizzatore monocanale) su 1 ml della sospensione totale (^{131}I totale : $^{131}I_T$) e, dopo centrifugazione, su 1 ml del sopranatante (^{131}I extracellulare : $^{131}I_E$).

La fissazione alle cellule, F_C, espressa in percento della quantità totale presente nella sospensione, era calcolata in base all'espressione:

$$(I) \qquad F_C = \frac{^{131}I_T - ^{131}I_E}{^{131}I_T} \times 100 .$$

I risultati venivano anche espressi in base al volume virtuale che il composto iodato presente nell'unità di volume (o di peso) delle cellule avrebbe occupato se esso fosse stato distribuito alla stessa concentrazione che nella fase extracellulare. Tale volume, definito come « apparente volume di distribuzione » o « spazio » (intracellulare, riferito all'unità di volume), corrisponde, in numero, al rapporto:

$$\frac{\text{concentrazione di } ^{131}I \text{ nelle cellule}}{\text{concentrazione di } ^{131}I \text{ nel mezzo}} , \left(\frac{C}{M}\right).$$

Tale rapporto veniva calcolato in base alla formula:

$$(II) \qquad \frac{C}{M} = \frac{F_C}{V_C (100 - F_C)}$$

ossia, sostituendo F_C:

$$(III) \qquad \frac{C}{M} = \frac{^{131}I_T - ^{131}I_E}{V_C \times ^{131}I_E}$$

dove V_C è il rapporto tra il volume della fase cellulare ed il volume totale V_C era calcolato a partire dal peso secco delle cellule nella sospensione, in base alla relazione: 1 mg peso secco $\equiv$ 6 mg peso fresco $\equiv$ 0,006 ml volume cellulare.

B) *Prove sull'azione del siero e del liquido ascitico di topo sulla fissazione delle iodotironine.*

Alle sospensioni cellulari in liquido di Krebs–Ringer si aggiungevano: *a*) L–tiroxina (T_4) o 3 : 5 : 3'–triiodo–L–tironina (T_3) marcate con ^{131}I (concentrazioni finali $2 \cdot 10^{-6}$ M e $2 \cdot 10^{-8}$ M); *b*) liquido ascitico proveniente dallo stesso animale (concentrazioni finali tra 0,6 e 7,5 mg di proteine/ml,) ovvero

siero di topo (concentrazioni finali tra 0,3 e 3,0 mg di proteine/ml), ovvero KRP nelle prove di controllo.

La concentrazione cellulare (V_C), in ciascuna serie di prove, era compresa tra 0,030 e 0,120 (11,5 e $46 \cdot 10^6$ cellule/ml). I tre costituenti dei diversi sistemi studiati (cellule, proteine del siero o del liquido ascitico ed iodotironine marcate) venivano addizionati in ordine diverso secondo le varie prove: *a*) cellule d'ascite e proteine del siero o del liquido ascitico (TBP); componente del sistema aggiunto per ultimo: iodotironine (prove di ripartizione degli ormoni tra la fase intra- ed extra-cellulare); *b*) cellule ed ormoni previamente incubati per 30' a + 38° C; componente aggiunto per ultimo: proteine del siero o del liquido ascitico (prove di reversibilità della fissazione delle iodotironine alle cellule).

Dopo l'aggiunta dell'ultimo componente del sistema, le prove venivano incubate in aerobiosi, in agitazione, a + 38° C e, a tempi diversi, venivano eseguite le misure necessarie per il calcolo della radioattività fissata alle cellule (F_C) e del volume apparente di distribuzione (C/M) di T_3 e T_4.

C) *Analisi radiocromatografica dei metaboliti delle iodotironine.*

L'analisi dei composti iodati presenti nelle cellule di adenocarcinoma Ehrlich-ascite veniva eseguita dopo 6 ore di incubazione a + 38° C, in presenza di T_3 o di T_4 ($2 \cdot 10^{-6}$ M), in aerobiosi. Le cellule erano raccolte per centrifugazione, lavate tre volte con NaCl 0,154 M a pH = 9, a + 4° C e sottoposte all'azione degli ultrasuoni (10 Kc, 20 min) ovvero omogeneizzate in Potter-Elvehjem, a freddo.

L'estratto acellulare, dopo centrifugazione per 60' a 24.000 g a + 4° C, veniva liofilizzato e la polvere ottenuta delipidata con una miscela di etere privo di perossidi e di etanolo assoluto (95 : 5) alla quale si aggiungeva 0,1 % di NH_4OH conc. Nella fase eterea passavano soltanto tracce della radioattività presente. La polvere così ottenuta veniva risospesa in H_2O e disciolta per aggiunta di NH_4OH 2 N; le proteine venivano precipitate mediante etanolo assoluto. Dopo 30' a + 4° C, la miscela veniva centrifugata e l'estrazione etanolo-ammoniacale veniva ripetuta 4 volte fino ad estrarre circa 85 % della radioattività iniziale del liofilizzato. Gli estratti ottenuti erano riuniti, si aggiungeva un volume eguale di cloroformio e di NH_4OH 2 N, si agitava la miscela per qualche minuto e poi si separavano le due fasi per centrifugazione: quella inferiore, cloroformica, contenente circa il 5 % della radioattività e quella superiore, etanolo-ammoniacale, comprendente il restante 80 % dello ^{131}I iniziale.

Tutte le operazioni venicano eseguite a + 4° C.

Gli estratti etanolici-ammoniacali venivano portati a secco sotto pressione ridotta, in atmosfera di N_2 ($t° < 30°$ C). Il residuo era ripreso con una miscela di metanolo-NH_4OH conc. (3 : 1); si centrifugava, ed il sopranatante, in cui era gran parte dello ^{131}I, era riportato a secco sotto pressione ridotta; tale operazione di purificazione veniva ripetuta più volte.

L'analisi cromatografica bidimensionale veniva eseguita su carta Wh. n. 1 con i seguenti solventi:

a) alcool amilico terziario saturo di NH_4OH 2 N, senso ascendente, 40 h, $t° = 17° C$;

b) *n*–BuOH saturo di NH_4OH 2 N, senso discendente, 18 h, $t° = 17° C$.

La localizzazione delle macchie radioattive era eseguita mediante autoradiografia, l'identificazione di esse con l'ausilio di sostanze di riferimento pure, incorporate nella miscela da analizzare o deposte a lato di esse e rivelate con la reazione di Pauly.

Risultati.

A) *Fissazione dei composti iodati.*

La fig. 1 riporta graficamente la fissazione (F_C), in funzione del tempo, della 3 : 5 : 3′–triiodo–L–tironina (T_3), della L–tiroxina (T_4), dell'acido 3 : 5 : 3′–triiodo–tiroacetico (TA_3), della 3 : 5–diiodo–L–tirosina (DIT) e degli ioduri da parte delle cellule isolate dell'adenocarcinoma di Ehrlich–ascite.

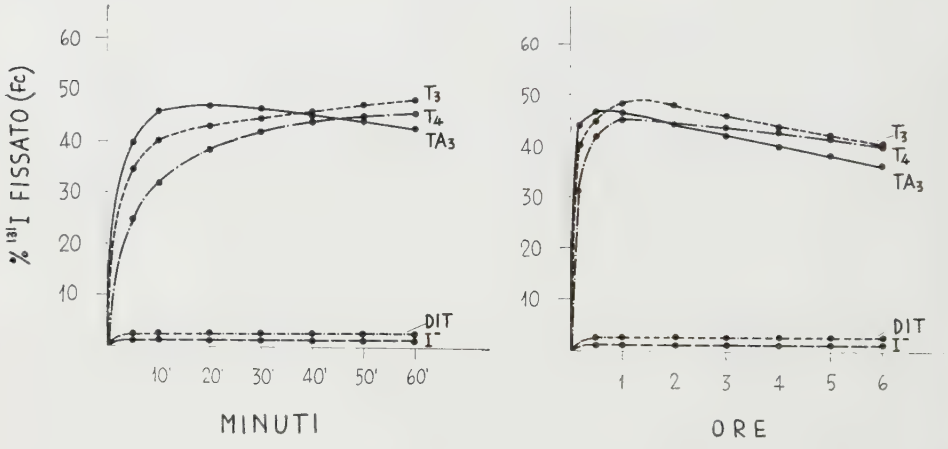


Fig. 1. – Fissazione (F_C) in funzione del tempo di L–tiroxina (T_4), 3 : 5 : 3′–triiodo–L–tironina (T_3), acido 3 : 5 : 3′–triiodotiroacetico (TA_3), 3 : 5–diiodo–L–tirosina (DIT) e INa (I^-), marcati con ^{131}INa, da parte di cellule dell'adenocarcinoma di Ehrlich ascite sospese in KRP. ($V_C = 0{,}030$; conc. finale composti iodati $= 2 \cdot 10^{-6}$ M; aerobiosi; $t° = + 38° C$).

L'esame della figura dimostra che le due iodotironine e TA_3 vengono rapidamente fissate dalle cellule isolate del tumore d'ascite, mentre non lo sono né la DIT, né gli ioduri; la 3–monoiodotirosina (MIT) presenta comportamento analogo a quello dell'aminoacido diiodato. La velocità di fissazione dei composti iodati è maggiore per TA_3 e per T_3 che per T_4; le differenze statisticamente significative, sono particolarmente sensibili dopo 5 e 10 minuti d'incubazione e si vanno man mano attenuando. A partire dalla prima ora la fissazione delle iodotironine, e quella di TA_3, sembra subire una leggera riduzione: corrispondentemente l'analisi elettroforetica del mezzo di incubazione dimostra la presenza in esso di quantità progressivamente crescenti di ioduri.

Il lavaggio delle cellule a pH alcalino non libera le iodotironine; al contrario tutta la radioattività fissata passa in soluzione insieme con le proteine endocellulari dopo rottura delle cellule.

A + 4° C la penetrazione di T_3, T_3 e TA_3 è più lenta e progressiva nel tempo ma raggiunge dopo alcune ore un valore leggermente più elevato di quello che si ha a + 38° C.

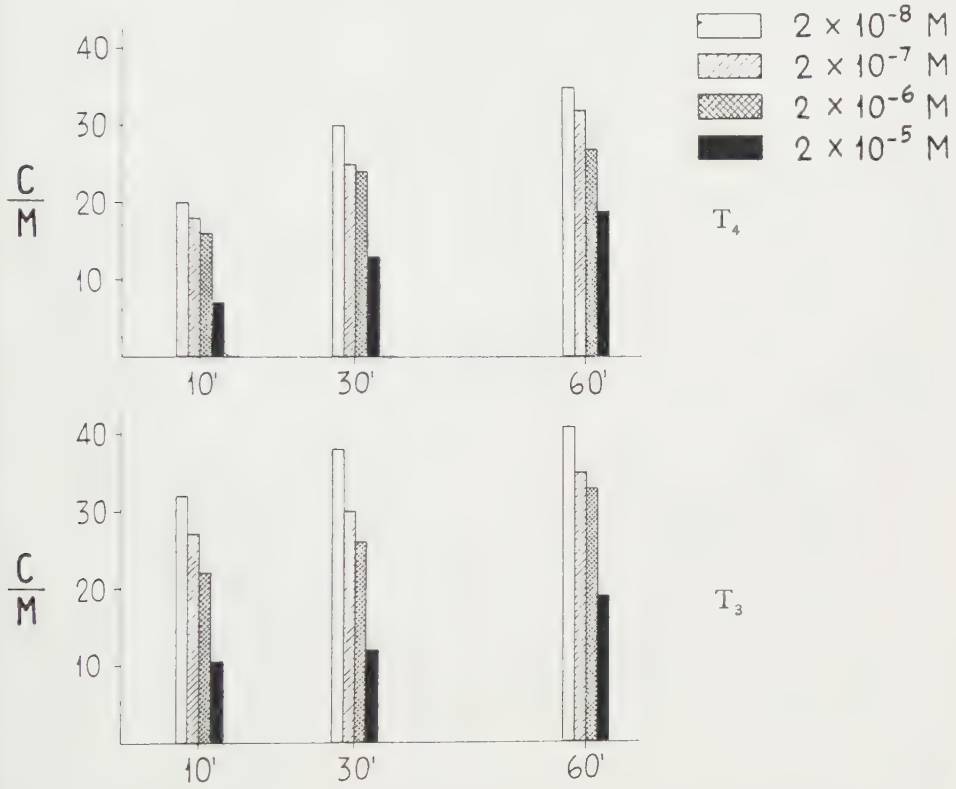


Fig. 2. – Apparente volume di distribuzione (C/M) delle iodotironine, in funzione della loro concentrazione nel mezzo (concentrazione cellulare costante: $V_C = 0{,}030$; KRP; aerobiosi, $t° = + 38°$ C).

Ascisse: tempo in minuti: ordinate: rapporto C/M $\left(\frac{^{131}\text{I per g di cellule}}{^{131}\text{I per g di mezzo}}\right)$.

In anaerobiosi le curve di fissazione sono analoghe a quelle ottenute in aerobiosi a + 4° C: le differenze, tuttavia, in entrambi i casi riguardano più la forma della curva che i valori parziali o finali della fissazione.

La cinetica della fissazione cellulare delle iodotironine è stata studiata non solo in diverse condizioni di incubazione (temperatura, ambiente, etc.) ma anche in funzione della concentrazione degli ormoni nella fase extracellulare e della quantità di cellule presenti nella sospensione.

Nella figura 2 sono riportati i valori dell'« apparente volume di distribuzione (C/M) delle iodotironine » in funzione della concentrazione di esse nel mezzo.

Si nota che lo « spazio » intracellulare delle iodotironine (C/M) diminuisce leggermente con l'aumentare della concentrazione di esse nel mezzo fino a $2 \cdot 10^{-6}$ M per poi abbassarsi notevolmente a $2 \cdot 10^{-5}$ M.

Nella Tabella I sono riportati i valori relativi alla fissazione (F_C) e al « volume apparente di distribuzione intracellulare delle iodotironine » (C/M) in funzione della concentrazione delle cellule nel mezzo (V_C).

TABELLA I.

Corpi iodati 2×10^{-6} M	Tempo in minuti	V_C 0,015		0,030		0,060		0,120	
		F_C	C/M	F_C	C/M	F_C	C/M	F_C	C/M
T_4	10	20	16,6	32	15,7	47	14,6	64	14,6
	30	26	23,5	42	24,1	57	22,1	72	21,4
	60	29	27,4	45	27,3	62	27,2	75	25
	180	27	24,5	43	25,2	60	25	73	22,5
	260	24	21	40	22,3	56	21,2	70	19,5
T_3	10	25	22,5	40	22,3	55	20,4	69	18,5
	30	28	26	44	26,2	60	25	75	25
	60	35	35,7	48	33,3	67	33,7	80	33,2
	180	31	30	46	28,4	62	26	76	26,4
	360	26	23,5	41	23,2	57	22,1	71	20,4
TA_3	10	30	28,5	46	28,4	61	26	76	26,4
	30	32	31,5	47	29,6	63	28,4	77	27,8
	60	29	27,4	46	28,4	62	26,1	75	25
	180	25	22,5	42	24,1	58	23	73	22,5
	360	22	18,7	36	18,8	52	18	67	16,8

Fissazione (F_C) e volume apparente di distribuzione (C/M) della L-tiroxina (T_4), della 3 : 5 : 3′–triiodo–L–tironina (T_3) e dell'acido 3 : 5 : 3′–triiodotiroacetico (TA_3) alle cellule isolate di adenocarcinoma Ehrlich–ascite, in funzione del volume cellulare relativo (V_C). (KRP, aerobiosi, $t^o = +38^oC$).

I dati riportati nella Tabella I dimostrano che mentre la fissazione è tanto più forte quanto maggiore è la concentrazione delle cellule nel mezzo, lo « spazio » intracellulare delle iodotironine per unità di volume è praticamente costante per tutte le concentrazioni cellulari prese in esame (da 15 a 120 mg/ml, peso fresco).

B) *Inibizione della fissazione per la presenza nel mezzo di* TBP *extracellulare (siero o liquido ascitico).*

Nella fig. 3 sono riportate le curve di fissazione della T_3 e della T_4 ($2 \cdot 10^{-6}$M) alle cellule isolate di adenocarcinoma di Ehrlich ($V_C = 0{,}120$), in presenza di siero di topo o di liquido d'ascite dello stesso animale (concentrazione finale in proteine nel mezzo di incubazione: 3 mg/ml).

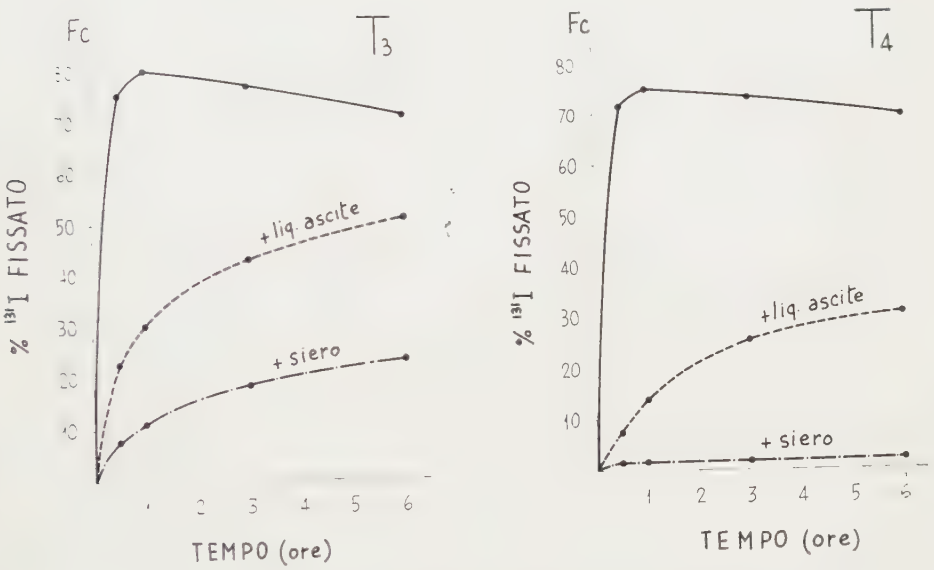
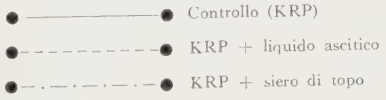


Fig. 3. – Fissazione (F_C) di 3 : 5 : 3'–triiodo–L–tironina (T_3) e di L–tiroxina (T_4), marcate con ^{131}I, (conc. finale $2 \cdot 10^{-6}$M) da parte delle cellule isolate dell'adenocarcinoma di Ehrlich–ascite ($V_C = 0{,}120$) sospese in KRP con aggiunta di liquido ascitico o di siero di topo (proteine: 3 mg/ml). Aerobiosi; $t° = +38°$ C. Ascisse: tempo in ore; ordinate: % ^{131}I fissato.



L'esame della figura dimostra che:

1° tanto il liquido d'ascite che il siero di topo inibiscono fortemente la fissazione *in vitro* degli ormoni tiroidei alle cellule del tumore d'ascite;

2° a concentrazione proteica eguale, l'inibizione da siero è molto più forte di quella da liquido ascitico;

3° tanto col siero che col liquido ascitico la fissazione di T_4 è più fortemente inibita che quella di T_3;

4° in presenza di siero o liquido ascitico la penetrazione intracellulare degli ormoni tiroidei è meno rapida ma aumenta più regolarmente fino al termine dell'incubazione, mancando la discesa della curva che dopo la prima ora si osserva regolarmente in mezzo salino isotonico.

I valori relativi ai volumi apparenti di distribuzione (C/M) di T_3 e T_4 nelle cellule isolate dell'adenocarcinoma Ehrlich–ascite in presenza di quantità diverse di liquido ascitico o di siero di topo, sono riportate nella Tabella II.

TABELLA II.

	Proteine (mg/ml)	T_3		T_4	
		$V_C = 0{,}030$	$V_C = 0{,}120$	$V_C = 0{,}030$	$V_C = 0{,}120$
Controllo	0	33,3	33,2	27,3	25
+Liquido ascitico	0,6	15,0	17,4	9,4	11,6
	1,2	7,8	8,3	3,7	4,5
	3,0	2,9	3,6	1,39	1,4
	7,5	1,75	2,1	0,36	0,44
+Siero di topo	0,3	16,9	19,5	10,5	12,8
	0,6	7,8	8,7	3,3	3,6
	1,2	2,5	4,3	0,68	1,0
	3,0	0,68	1,0	0,36	0,44

Variazione del volume apparente di distribuzione (C/M) nella L–tiroxina (T_4) e della 3 : 5 : 3′–triiodo–L–tironina (T_3) nelle cellule isolate dell'adenocarcinoma Ehrlich–ascite in funzione del volume cellulare relativo (V_C) e della concentrazione in proteine del liquido ascitico o del siero di topo nel mezzo di incubazione. (Cellule incubate 1 h in KRP, concentrazione delle iodotironine = $2 \cdot 10^{-6}$ M, aerobiosi, $t^\circ = +38^\circ$C).

La diminuzione del rapporto C/M (e quindi l'inibizione della fissazione), a concentrazione cellulare eguale, è tanto maggiore quanto più forte è la quantità di liquido ascitico o di siero di topo presente nella fase extracellulare; a concentrazione in proteine eguale è tanto maggiore quanto minore è la concentrazione cellulare (a $V_C = 0{,}030$ la diminuzione di C/M è più marcata che a $V_C = 0{,}120$).

Risultati analoghi circa l'inibizione esercitata dal liquido ascitico o dal siero di topo sulla fissazione delle iodotironine alle cellule isolate sono stati ottenuti in presenza di concentrazioni ormonali molto inferiori ($2 \cdot 10^{-8}$ M); il fenomeno, anzi, sia con il siero che con il liquido ascitico è più notevole che a concentrazione $2 \cdot 10^{-6}$ M.

Le prove sulla reversibilità della fissazione cellulare delle iodotironine hanno dimostrato che tanto il siero che il liquido ascitico sono capaci di indurre il passaggio alla fase extracellulare degli ormoni precedentemente fissati. Il fenomeno è tanto più notevole quanto maggiore è la concentrazione in proteine del mezzo esterno.

C) *Metabolismo* in vitro *delle iodotironine nelle cellule isolate dell'adenocarcinoma Ehrlich ascite.*

La penetrazione degli ormoni tiroidei nelle cellule isolate dell'adenocarcinoma Ehrlich-ascite è seguita da parziale metabolismo di essi: degradazione della catena alaninica (derivati iodotiroacetici) e debole desiodurazione (ioduri) (vedi fig. 4).

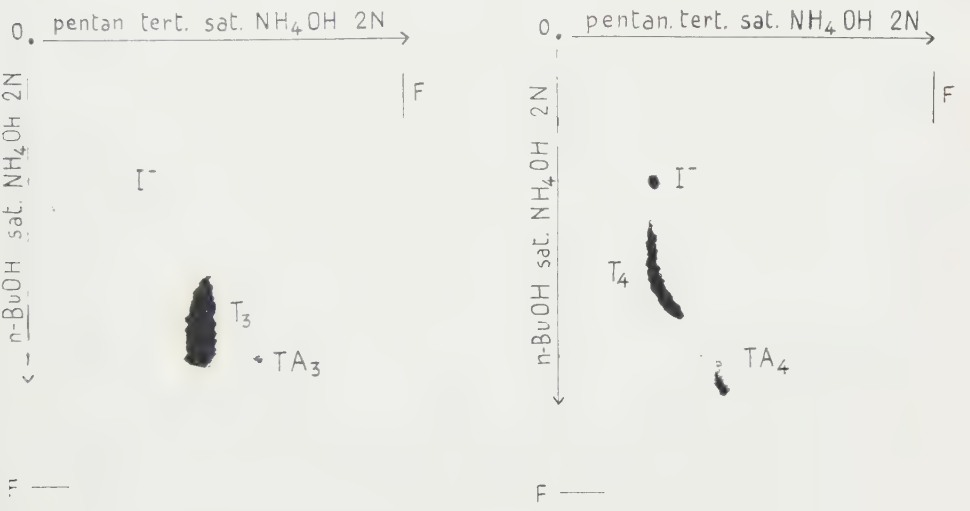


Fig. 4. – Autoradiografia dei cromatogrammi bidimensionali dell'estratto etanolico-ammoniacale di cellule dell'adenocarcinoma di Ehrlich-ascite incubate 6 h *in vitro* a + 38° C in presenza di T_3 (a sinistra) e di T_4 (a destra) marcate con ^{131}I, (conc. finale: $2 \cdot 10^{-6}$ M)

1ª dimensione: *n*-BuOH sat. NH_4OH 2 N, senso discendente;
2ª dimensione: pentanolo tert. sat. NH_4OH 2 N, senso ascendente.
O = origine; F = fronte; I = ioduri; T_3 = 3 : 5 : 3′-triiodo-L tironina; TA_3 = acido 3 : 5 : 3′-triiodotiroacetico; T_4 = L-tiroxina; TA_4 = acido 3 : 5 : 3′ : 5′-tetraiodotiroacetico; t° = + 17°C.

Discussione.

I risultati ottenuti dimostrano che i due principali ormoni tiroidei (L-tiroxina e 3 : 5 : 3′-triiodo-L-tironina) e l'acido 3 : 3′ : 5-triiodotiroacetico, sono rapidamente fissati dalle cellule isolate di adenocarcinoma Ehrlich-ascite. La fissazione è più rapida per i composti triiodati che per la tiroxina, ma raggiunge dopo 40′ di incubazione valori praticamente sovrapponibili. Dopo 30′ la fissazione sembra arrestarsi, ma in relatà deve ritenersi raggiunto un certo grado di equilibrio tra la concentrazione degli ormoni nelle cellule e quella nel mezzo esterno; si tratta, in realtà, di un equilibrio dinamico, come è dimostrato dal fatto che, continuando l'incubazione, la fase extracellulare si arricchisce in iodio inorganico formato dalla desalogenazione intracellulare e successivamente espulso o diffuso nel mezzo esterno. La fissazione cellulare degli ormoni non dipende da attività metaboliche giacché

a + 4° C ovvero in assenza di ossigeno, essa si verifica ugualmente: l'assenza di metabolismo modifica però la cinetica della fissazione ed il raggiungimento dell'equilibrio. Tuttavia la fissazione di T_3, T_4 e TA_3 è certo espressione della penetrazione degli ormoni nell'interno della cellula e non di adsorbimento alle membrane cellulari, sia perché il lavaggio a pH alcalino non libera gli ormoni fissati, sia perché è possibile ottenere, dopo rottura dell'integrità cellulare, un estratto proteico acellulare che racchiude tutta la radioattività precedentemente fissata. La presenza, inoltre, di un certo grado di degradazione metabolica (ved. fig. 3) conferma la penetrazione intracellulare degli ormoni.

Analogamente a quanto accade per le cellule bacteriche (Roche, Salvatore e Covelli, 1959), le iodotirosine e gli ioduri non vengono affatto fissati: le cellule isolate concentrano, dunque ,selettivamente gli ormoni tiroidei ed i loro derivati acetici contro un gradiente esterno: dopo 1 h di incubazione la concentrazione di T_3 e di T_4 nelle cellule ascite è rispettivamente 33 e 27 volte maggiore di quella della fase extracellulare. Tali valori sono molto vicini a quelli che in condizioni del tutto analoghe si hanno per le cellule bacteriche: rispettivamente 30 e 22 (cfr. Covelli, 1960). Ciò depone a favore della esistenza di uno stesso meccanismo di penetrazione degli ormoni tiroidei *in vitro*, tanto nelle cellule degli animali che in quelle bacteriche. Come in queste ultime (B–TBP), la penetrazione delle iodotironine e dei loro derivati è dovuto alla presenza nella cellula di un sistema proteico capace di fissare selettivamente le iodotironine. Tale sistema (C–TBP) è dotato di « capacità » molto elevata, giacché aumentando anche la concentrazione di ormoni nel mezzo (da $2 \cdot 10^{-8}$ a $2 \cdot 10^{-6}$ M) la fissazione cellulare non viene sensibilmente diminuita [1]. A concentrazione di $2 \cdot 10^{-5}$ M (circa 1000 volte maggiore di quella presente in media nel plasma dei mammiferi) sembra invece raggiunta la soglia di saturazione nel sistema capace di legare gli ormoni (ved. fig. 2).

A pari concentrazione di ormone un maggior numero di cellule fissa, come è logico, maggior quantità di iodotironine, ma il rapporto tra la concentrazione di ormone nelle cellule rispetto a quella del mezzo esterno (C/M) non varia sensibilmente (ved. Tabella I). Ciò indica che, a una data concentrazione di ormoni, si stabilisce un equilibrio tra fase intra ed extra cellulare che dipende solo dalla natura dell'ormone e dal grado di affinità del TBP intracellulare per esso.

La presenza nel mezzo d'incubazione dei liquidi extracellulari (liquido d'ascite o siero) inibisce la fissazione degli ormoni proporzionalmente alla concentrazione di proteine presenti; l'equilibrio, cioè, viene spostato a favore della fase extracellulare per la presenza in essa di un sistema proteico capace

(1) B–TBP = *bacterial thyroxine binding protein*: sistema proteico capace di fissare specificamente le iodotironine, presente nelle cellule bacteriche (Pontieri, Salvatore, Covelli e Roche, 1960).

C–TBP = *cellular thyroxine binding protein*: sistema proteico capace di fissare specificamente le iodotironine, presente nelle cellule degli organismi animali (Tata, 1960).

anch'esso di legare le iodotironine (TBP). La maggiore inibizione che tale sistema provoca sulla fissazione di T_4 rispetto a quella di T_3 è dovuta non solo alla maggiore affinità del TBP (extracellulare) verso T_4 (Tata, 1960) ma anche al fatto che il C–TBP (intracellulare) fissa più rapidamente T_3 che T_4.

L'affinità relativa del liquido ascitico per le iodotironine, a concentrazione proteica eguale, è maggiore di quella delle proteine cellulari (C–TBP) ma minore di quella del siero (TBP). Se, come sembra, il liquido ascitico rappresenta l'equivalente degli spazi extracellulari, ossia della sostanza fondamentale del connettivo, la presenza in esso di un TBP con affinità intermedia tra quella del siero (TBP) e quella del sistema proteico intracellulare (C–TBP), potrebbe rivestire una notevole importanza fisiologica. Se le cellule animali, difatti, fossero direttamente a contatto con il plasma, la penetrazione in esse degli ormoni tiroidei sarebbe completamente inibita dalla presenza del TBP plasmatico; se, invece, i liquidi extracellulari fossero completamente sprovvisti di TBP (come avviene *in vitro* per le cellule sospese in KRP), la penetrazione degli ormoni sarebbe troppo rapida ed irregolare. Il TBP degli spazi extracellulari potrebbe quindi regolare la penetrazione degli ormoni nelle cellule permettendone il passaggio da un sistema dotato di affinità molto elevata (plasma) ad uno ad affinità minore (cellule) mediante lo stabilirsi del duplice equilibrio:

$$TBP_{(plasma)} \rightleftharpoons TBP_{(interst.)} \rightleftharpoons C\text{–}TBP.$$

L'esistenza di tale equilibrio è dimostrata anche dalla reversibilità della fissazione cellulare a mezzo del TBP extracellulare e dal fatto che mentre in liquido salino isotonico la concentrazione intracellulare degli ormoni rispetto a quella del mezzo esterno (C/M) è indipendente dalla quantità di cellule presenti (ved. Tabella I), in presenza di liquido ascitico o di siero la diminuzione di C/M è tanto maggiore quanto minore è la concentrazione di cellule nel mezzo (ved. Tabella II).

I risultati ottenuti dimostrano anche che il metabolismo delle iodotironine interviene solo per una piccola frazione degli ormoni fissati alle cellule isolate. Il legame col sistema proteico intracellulare, li protegge difatti dalle varie degradazioni metaboliche, come è stato dimostrato da Tata (1960) e da Lissitzky (1960) per la desiodazione enzimatica; solo la piccola aliquota degli ormoni che è presente nella cellula allo stato libero può essere degradata dagli enzimi intracellulari.

Se il meccanismo di azione degli ormoni tiroidei è legato all'integrità della molecola della iodotironina, C–TBP avrebbe un ruolo molto importante nel proteggerla dalle degradazioni metaboliche; se invece esso dipende dalle trasformazioni metaboliche cui va incontro la molecola dell'ormone, C–TBP, regolando la quantità di ormone libero, regolerebbe indirettamente anche la quantità di esso che può venire metabolizzata e quindi la frazione « attiva ». In entrambi i casi, la fissazione al sistema proteico intracellulare (C–TBP) sarebbe legata all'attività biologica degli ormoni.

Le cellule isolate di tumore ascitico possono costituire mezzo utile per lo studio delle caratteristiche (*affinità*, *capacità*, *specificità*) del sistema proteico intracellulare capace di legare le iodotironine: rispetto alle usuali tecniche di elettroforesi su carta o su colonna, la fissazione viene qui studiata a pH 7,3 e con concentrazioni ormonali bassissime, corrispondenti a quelle fisiologiche (10^{-8} M). Le cellule isolate possono inoltre rappresentare *in vitro* un modello per lo studio dei fattori che regolano *in vivo* l'equilibrio di ripartizione degli ormoni tiroidei tra le fasi intra ed extracellulari, le quali, al contrario di quanto è possibile con le sezioni di organo, possono essere facilmente separate ed analizzate.

Bibliografia.

Albert A. and Keating F. R. Jr., « J. Clin. Endocrinol. », *11*, 996 (1951).

Covelli I., « C. R. Soc. Biol. », *154* (1960) in corso di stampa.

De Visschers M. et Beckers C., « J. Physiol. » (Paris) *49*, 439 (1957).

Gordon A. H., Gross J., O'Connor D. and Pitt-Rivers R., « Nature » (London) *169*, 19 (1952).

Ingbar S. H. and Freinkel N., « Rec. Progress Hormone Res. », *16*, 353 (1960).

Krebs H. A., « Biochim. Biophys. Acta », *4*, 249 (1950).

Lissitzky S., « Bull. Soc. Chim. Biol. », in corso di stampa (Relazione alla Riunione Franco-Britannica del 27–28 maggio 1960, Parigi).

McKee R. W., Lonberg-Holm K. and Jehl J. A., « Cancer research », *13*, 557 (1953).

Pitt-Rivers R. and Tata J. R., *The Thyroid Hormones*, Pergamon Press. (London 1959), p. 125.

Pontieri G. M., Salvatore G., Covelli I. et Roche J., « C. R. Soc. Biol. », *154* (1960), in corso di stampa.

Roche J., Salvatore G. et Covelli I., « C. R. Soc. Biol. », *153*, 1116 (1959).

Salvatore G., Vecchio G. e Macchia V., « Rendiconti Accad. Naz. Lincei », serie VIII, *27*, 420 (1959).

Stanbury J. B., Kassenaar A. A. H. and Meijer J. W. A., « J. Clin. endocrinol. Metab. », *16*, 735 (1956).

Tata J. R., « Biochim. Biophys. Acta », *28*, 91 (1958).

Tata J. R., « Bull. Soc. Chim. Biol. » (1960), in corso di stampa. (Relazione alla Riunione Franco-Britannica del 27–28 maggio 1960, Parigi).

Tong W., Taurog A. and Chaikoff I. H. « J. Biol. Chem. », *207*, 59 (1954).

Anatomia e Istologia patologica. — *Sulle necrosi encefaliche tardive da Roentgenirradiazione nell'uomo* (*). Nota di EDMONDO GULÌ, presentata (**) dal Corrisp. A. GIORDANO.

Nel campo dell'indagine neuropatologica, ci troviamo ancor oggi, spesso, di fronte a considerevoli difficoltà nel definire dal punto di vista diagnostico, il significato di focolai di necrosi coagulativa, di rammollimenti o di focolai infiammatori, i cui caratteri morfologici non consentono il loro inquadramento nello schema nosologico attuale, o la cui sintomatologia può venire difficilmente spiegata, da un punto di vista rigidamente meccanicistico, con la compromissione di ben definiti sistemi di fibre.

Con una certa frequenza, riscontriamo, infatti, all'esame anatomo– ed istopatologico di individui, che in vita non avevano presentato alcuna sintomatologia neuropsichica, esiti di encefalomalacie o di encefalodistrofie focali, in strutture nervose deputate a funzioni motorie o sensitive, mentre altre volte è difficile riconoscere il legame anatomo–funzionale tra il focolaio e la fenomenologia rilevata.

Indicativo, da questo punto di vista, ci pare il caso recentemente occorso alla nostra osservazione, di un individuo di 43 anni, nel quale una sintomatologia neurologica di deficit motorio, tale da indurre il sospetto di un fatto neoplastico, è esplosa terminalmente in una fenomenologia di mutismo acinetico, quale è stata delineata da Cairns, legata alla compromissione delle strutture mediane del tronco dell'encefalo.

Al riscontro diagnostico (n. Prot. 30260, dell'Istituto di Anatomia e Istologia Patologica dell'Università di Milano), si potè constatare un rammollimento recente della parte media del corpo calloso, dell'*induseum*, delle formazioni cingolari, del setto pellucido e delle fibre perforanti del trigono ed uno *status spongiosus* dell'area anteriore della circonvoluzione calloso–marginale e del sistema delle fibre radiate di questa regione.

Se la sintomatologia di mutismo acinetico poteva essere considerata, nel suo meccanismo patogenetico, espressione di una inibizione funzionale delle strutture reticolari, conseguente alla lesione dell'area cingolare anteriore, e, fenomenologicamente, come risultato di una dissociazione dello stato di coscienza da quello di vigilanza, il mancato reperto, all'atto del riscontro diagnostico e degli accertamenti istologici, di emboli nei tronchi dei rami callosi o di possibili sorgenti emboligene nella rete vascolare corporea e la differenza del quadro morfologico rilevato con quello di altre forme degenerativo–necrotiche, come ad esempio la sindrome di Marchiafava–Bi-

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia e Istologia Patologica dell'Università di Milano (Direttore: prof. Alfonso Giordano).

(**) Nella seduta del 10 dicembre 1960.

gnami, conferivano al caso, dal punto di vista anatomo– ed istopatologico, notevoli difficoltà di inquadramento nosologico.

Particolarmente significative apparivano, in esso, le alterazioni dei vasi della regione compromessa, strettamente limitate alla parte del corpo calloso rammollito ed integrantisi in fenomeni di vasculonecrosi, con accentuato ispessimento delle strutture avventiziali, comparsa di metamorfosi fibrinoide delle pareti, lieve metacromasia delle strutture vasali e dissociazione della avventizia da parte di una sostanza con caratteri fibrinoidi, finemente fibrillare, che ne provocava un considerevolissimo ispessimento.

Questi fenomeni, che per la mancanza di segni clinici ed istopatologici di una iteratività dei processi di rammollimento parcellari del corpo calloso, devono venir considerati primitivi alla alterazione necrotica, erano così caratteristici di una lesione vascolare tardiva da Roentgenirradiazione encefalica, da indurre a ricercare nei precedenti anamnestici del soggetto, e a valorizzare, nell'eziopatogenesi dell'alterazione riscontrata, una irradiazione con raggi Roentgen, nella regione temporale sinistra subita dal paziente, quattro anni prima dell'esordio della fenomenologia morbosa, esitata, con rapida progressività, nella morte.

Questo periodo di latenza di quattro anni, tra l'applicazione della terapia radiante e l'esordio fenomenologico della lesione, rappresenta uno dei più lunghi della letteratura, con quelli di Fischer e Holfelder, di Markiewicz, di Zulch, e richiama in primo luogo l'attenzione del medico e del ricercatore sulle possibili, gravissime conseguenze tardive, che una terapia radiante, anche se a dosi relativamente basse, come nel nostro caso (20.000 *r*, somministrati nel corso di un anno), può avere, se applicata sull'encefalo.

In secondo luogo, tale periodo di latenza propone interessanti quesiti patogenetici sull'origine delle necrosi encefaliche tardive da Roentgenirradiazione. Su questo problema ha ancora di recente richiamata l'attenzione lo Zulch, in un tentativo di conciliare il dualismo concettuale che vede opposte diverse impostazioni teoretiche della patogenesi delle lesioni encefaliche tardive: l'una che riconosce nelle alterazioni vascolari progressive il *primum movens* del processo morboso, l'altra che considera il danno parenchimale come fenomeno primitivo, quest'ultima basata sui reperti casistici di necrosi precoci da Roentgenirradiazione di gliomi encefalici.

A noi pare che, sulla base dei reperti rilevati, le alterazioni vasali siano sufficientemente dimostrative per poter considerare il danno vascolare come primitivo, in accordo con i dati sperimentali di Scholz, senza dover ammettere l'intervento di un fattore allergico per spiegare, sulla base di una lesione primitivamente parenchimale, la progressività del processo di necrosi.

In terzo luogo, sembra che il quadro anatomo– ed istopatologico delle lesioni encefaliche tardive da Roentgenirradiazione sia abbastanza tipico, oltre che dal punto di vista eziologico, anche da quello rigidamente morfologico, perché ad esso venga riconosciuto il significato di entità nosologica, anche nella diagnostica anatomo–clinica.

La possibilità di diagnosticare, anche sulla base di reperti bioptici (Behrend e Ostertag), l'intervento del fattore radiante, nel determinarsi delle necrosi focali dell'encefalo, costituisce per altro stimolo sufficiente per tale orientamento di ricerca.

Il problema delle necrosi encefaliche tardive da Roentgenirradiazione, di notevole attualità e di grande significato anatomo-clinico, presenta, ancor oggi, numerosi punti oscuri, soprattutto nei riguardi della patogenesi delle alterazioni: i più importanti sono rappresentati dalla quasi costante integrità della sostanza grigia delle zone sottoposte all'azione radiante, nonostante il danno grave delle fibre sottostanti, e dalla natura ed origine delle alterazioni vasali. Sono in corso nel nostro Istituto studi in proposito, su materiale umano, per portare un contributo alla conoscenza di tali problemi.

Biologia. — *Aspetti biochimici della metamorfosi degli Insetti. L'acido desossiribonucleico durante lo sviluppo larvale e la metamorfosi di* Musca domestica *L.* (*). Nota di SALVATORE RUSSO–CAIA, presentata (**) dal Socio G. COTRONEI.

In una precedente Nota (Russo–Caia, 1960) (1) ho riferito i risultati di alcune ricerche sulle variazioni quantitative dell'acido ribonucleico durante lo sviluppo larvale e la metamorfosi di *Musca domestica* L.

Da queste ricerche è risultato che durante l'accrescimento larvale il contenuto di RNA per unità di peso è in continua diminuzione, ed appare inversamente proporzionale allo sviluppo raggiunto dall'individuo: tanto più la larva è grande, tanto minore è la concentrazione dell'RNA nei suoi tessuti. Nella pre–metamorfosi viene raggiunto un livello minimo, che si mantiene anche nelle prime ore di vita pupale; il contenuto di RNA aumenta poi (senza però mai raggiungere gli elevati livelli delle piccole larve) fino a circa 100 ore dalla formazione del pupario, e quindi si mantiene pressoché invariato – con una tendenza alla diminuzione – fino alla fine della metamorfosi. Questo comportamento è stato considerato in relazione alle sintesi proteiche che avvengono durante l'accrescimento larvale ed ai fenomeni di istolisi ed istogenesi che si verificano nella vita pupale; sono stati inoltre ricordati alcuni aspetti del metabolismo proteico durante la metamorfosi, messi in evidenza da precedenti ricerche sugli enzimi proteolitici (Russo–Caia, 1960) (2), sulla eliminazione dei cataboliti azotati (Russo–Caia, 1960) (3) e sulle modificazioni dell'azoto totale (Russo–Caia, 1960) (4).

Numerose ricerche infatti indicano che esiste un rapporto fra il tenore in RNA di una cellula e la sua attitudine a sintetizzare proteine (vedi Brachet, 1960) (5,6).

Non si è ancora avuta la dimostrazione di un intervento dell'acido desossiribonucleico nelle sintesi proteiche; tuttavia vi sono numerosi argomenti (Brachet, 1960) (5,6) in base ai quali si deve ritenere che anche il DNA eserciti un ruolo, sia pure indiretto, in questo fenomeno.

Lo studio delle relazioni tra i due tipi di acidi nucleici rappresenta anzi uno degli aspetti più interessanti del problema dei rapporti metabolici fra

(*) Ricerche eseguite nell'Istituto di Zoologia ed Anatomia Comparata della Università di Camerino, con il contributo del C.N.R. e della Rockefeller Foundation.

(**) Nella seduta del 10 dicembre 1960.

(1) S. RUSSO CAIA, questi « Rendiconti », *29*, 215 (1960).

(2) S. RUSSO-CAIA, « Acta Embryol. Morphol. Exper. », *3*, 131 (1960).

(3) S. RUSSO CAIA, « Rend. Ist. Sci. Camerino », *1*, 67 (1960).

(4) S. RUSSO–CAIA, « Riv. Biol. », *53*, 409 (1960).

(5) J. BRACHET, *The Biochemistry of Development*. Pergamon (1960).

(6) J. BRACHET « Rend. Ist. Sci. Camerino », *1*, 3, (1960).

nucleo e citoplasma (vedi Urbani, 1960) [7]. Proseguendo nelle mie ricerche sugli aspetti biochimici della metamorfosi, ho compiuto una serie di osservazioni sul comportamento del DNA nello sviluppo post-embrionale di *Musca domestica*, ed in questa Nota espongo i risultati ottenuti.

Il materiale su cui sono stati compiuti i dosaggi, le modalità di allevamento, ed i criteri con i quali è stata fatta la seriazione degli stadi di sviluppo sono quelli già esposti nei precedenti lavori.

Per quanto riguarda la tecnica usata, dopo aver estratto l'RNA con acido perclorico a freddo secondo Ogur e Rosen (1950) [8] si è trattata la polvere residua con HCl 1 N per 20' a 80°C; successivamente a questa idrolisi si è determinato il contenuto di DNA nel supernatante mediante la spettrofotometria nell'U. V., compiuta al Beckman a 260 mμ.

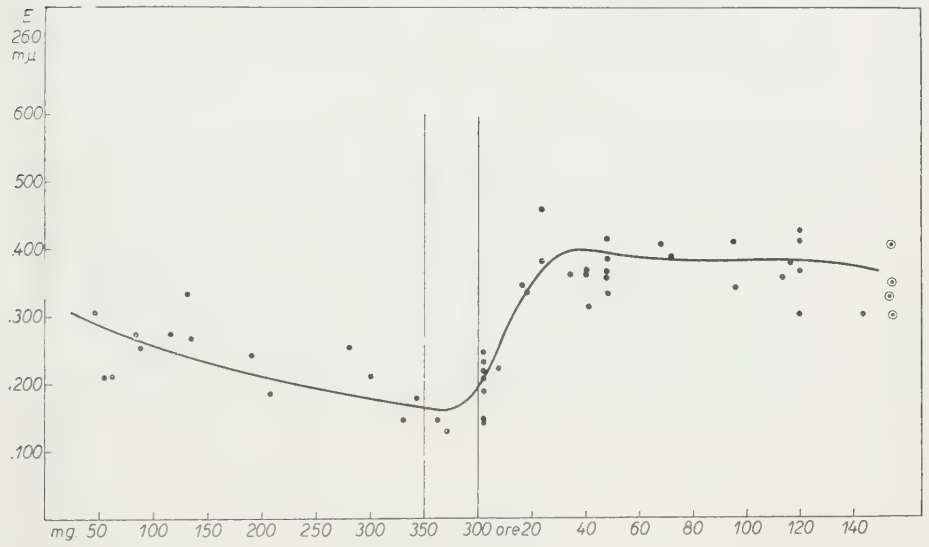


Fig. 1. – Comportamento del DNA durante lo sviluppo larvale e la metamorfosi di *Musca domestica* L. In ordinate il contenuto di DNA per unità di peso fresco, espresso in Estinzioni ottiche a 260 mμ, in ascisse gli stadi di sviluppo ordinati in base al peso (di 10 individui) per le larve, in base alle ore trascorse dall'impupamento per le pupe. La prima linea verticale indica la fine dell'accrescimento larvale, la seconda la formazione del pupario; i simboli all'estrema destra, i valori nelle immagini.

I risultati riportati nel grafico sono espressi in Estinzioni ottiche, e si riferiscono ad unità di peso fresco; tanto nelle larve che nelle pupe si è infatti idrolizzato il DNA con quantità di HCl corrispondenti ad una concentrazione di 20 mg di tessuto/ml. A scopo di controllo della precedente serie di osservazioni, è stato sempre determinato il contenuto di RNA degli estratti perclorici; il grafico dei risultati ottenuti è perfettamente sovrapponibile a quello già pubblicato nella precedente Nota.

(7) E. URBANI, « Riv. Biol. », *53*, 91 (1960).
(8) M. OGUR, G. ROSEN, « Arch. Biochem. », *25*, 262 (1950).

Le variazioni del contenuto di DNA, riportate nel grafico, mostrano un andamento ben definito, diverso da quello dell'RNA. Anche in questo caso durante l'accrescimento larvale si osserva una diminuzione del contenuto per unità di peso, e viene raggiunto un livello minimo nella pre–metamorfosi; immediatamente dopo la formazione del pupario il tenore in DNA aumenta però rapidamente e notevolmente, e già alla 24ª ora di vita pupale i valori sono molto più elevati di quelli osservati durante tutto l'accrescimento larvale. Essi rimangono poi pressoché invariati fino alla fine della metamorfosi, ed anche nella immagine.

Il contenuto di DNA, che dopo un rapido e notevole aumento iniziale resta invariato fino alla schiusura dell'insetto perfetto, non mostra modificazioni che possano essere interpretate considerando la metamorfosi nettamente divisa in un periodo di istolisi ed in una successiva fase di istogenesi; anche in questo caso quindi, come per l'RNA, questi dati biochimici confermano i risultati delle ricerche istologiche che, dai lavori di Perez (1910) [9] in poi, hanno sempre dimostrato la contemporaneità dei due fenomeni.

Durante la metamorfosi non vi è prima demolizione e poi ricostruzione, ma piuttosto progressiva sostituzione delle strutture dell'immagine a quelle della larva, e le trasformazioni delle sostanze proteiche, che sono la base di questi fatti morfologici, avvengono gradualmente.

Le modificazioni dei due tipi di acidi nucleici osservate durante lo sviluppo larvale e la metamorfosi di *Musca domestica* si accordano invece molto bene con le osservazioni morfologiche le quali mostrano che lo sviluppo delle strutture larvali e di quelle immaginali avviene nei Ditteri in modo completamente diverso.

È noto infatti dalle classiche ricerche di Perez (1910) [9] sulla *Calliphora erythrocephala* che mentre durante lo sviluppo larvale si ha solo un aumento di dimensioni delle cellule, che non si moltiplicano e diventano al termine dell'accrescimento enormi, le strutture dell'adulto – presenti già nella larva nei dischi immaginali – si sviluppano esclusivamente per divisione cellulare, e le cellule restano sempre molto piccole. La moltiplicazione delle cellule immaginali, lenta nella vita larvale, diviene molto intensa durante la metamorfosi, nella quale si osserva una estrema attività di proliferazione cariocinetica.

Durante l'accrescimento larvale si osserva una diminuzione sia dell'RNA che del DNA, probabilmente perché l'accumulo progressivo di sostanze di riserva sopratutto lipidiche ne fa diminuire la concentrazione relativa nei tessuti; mentre però la diminuzione dell'RNA è molto notevole, il contenuto di DNA si modifica assai meno.

Ciò può indicare che mentre i fenomeni di divisione cellulare, in cui interviene il DNA, hanno un andamento relativamente costante, la sintesi di materiali citoplasmatici legata all'aumento di volume delle cellule, in cui interviene l'RNA, tende sempre più a diminuire.

(9) C. Perez, « Arch. Zool. Exp. Gén. », *4*, 1 (1910).

Con la metamorfosi ha inizio lo sviluppo delle strutture immaginali; esso avviene per divisione cellulare, ed il contenuto di DNA aumenta fino a valori mai raggiunti nelle larve e si mantiene elevato fino alla fine della vita pupale. La quantità assoluta di RNA presente nei tessuti è naturalmente sempre maggiore di quella del DNA; se però si fa un rapporto tra la percentuale dei due acidi nucleici durante lo sviluppo si osserva che esso, nettamente a favore dell'RNA nelle piccole larve, diminuisce poi progressivamente e si avvicina all'unità con l'inizio della metamorfosi.

Le non numerose ricerche di altri Autori sul comportamento degli acidi nucleici nello sviluppo embrionale e post-embrionale degli Insetti sono state già ricordate nella precedente Nota (Russo-Caia, 1960) [1]; qui interessa solo ricordare le recenti osservazioni istochimiche di Wigglesworth (1957, 1959) [10,11] in *Rhodnius prolixus*; in relazione alle modificazioni indotte dall'ecdisone nelle nucleoproteine di diversi tessuti, questo Autore ritiene che il meccanismo d'azione dell'ormone (che negli Insetti regola i fenomeni della muta e dell'accrescimento) si eserciti sopratutto attraverso un controllo delle sintesi proteiche.

In conclusione, dalle presenti ricerche sul contenuto di DNA durante lo sviluppo larvale e la metamorfosi di *Musca domestica* L. risulta che questo composto diminuisce durante l'accrescimento larvale, e raggiunge un livello minimo nella pre-metamorfosi; subito dopo la formazione del pupario il tenore in DNA aumenta invece notevolmente e rapidamente.

Questo comportamento, esaminato comparativamente a quello dell'RNA, può essere considerato una espressione biochimica delle diverse modalità con cui avviene lo sviluppo delle strutture larvali (ipertrofia cellulare e assenza di divisioni) e di quelle immaginali (intensa moltiplicazione cellulare).

(10) V. B. WIGGLESWORTH, « Symp. Soc. Exp. Biol. », *11*, 204 (1957).

(11) V. B. WIGGLESWORTH, *The Control of Growth and Form: A Study of the Epidermal Cell in an Insect.* Cornell Univ. Press, N. Y. (1959).

Biologia. — *Sul significato ecologico dell'azoto conchigliare nell'Elicide dunicola* Euparypha pisana *(Müll.)* (*). Nota di Maria Rosaria Gaudiosi e Cesare F. Sacchi, presentata (**) dal Corrisp. G. Montalenti.

Una delle regole ecologiche più note, formulate per i Molluschi terrestri in base ai dati ed alle considerazioni del Rensch [1], stabilisce che dimensioni, spessore e struttura fisica del nicchio sono in relazione stretta con i fattori dell'ambiente, e raggiungono valori considerati come tipici della specie dove i fattori stessi si aggirano su livelli ottimali.

Questa ricerca è stata suggerita dall'aspetto insolito che presenta la conchiglia di una particolare forma locale di *Euparypha pisana* (Müll.), nota da mezzo secolo per le dune di Chioggia. Essa (vedasi figura) si distacca

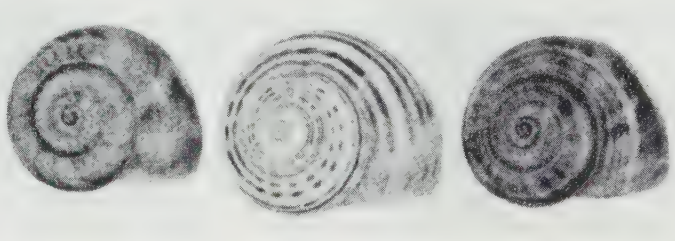


Fig. 1. – Conchiglie di due individui *testudinea* (ai lati) e di un individuo normale dalla popolazione di *Euparypha pisana* (Müll.) di Chioggia (dune di Sottomarina).

nettamente dal materiale « normale » perché il suo nicchio, anzi che essere bianco, opaco, d'aspetto subcretaceo, è subtrasparente, bruniccio, apparentemente corneo. Può essere provvisto di un'ornamentazione completa, oppure presentare interruzioni, fusioni totali, o parziali, delle righe in bande, secondo il complicato schema ornamentale della specie, che è l'Elicide più polimorfa della fauna paleartica (cfr. Sacchi, 1952) [2]. Il Monterosato, in litteris al Taylor (1914) [3] diede alla forma di Chioggia il nome di *testudinea*, perché, anche se alla lontana, essa potrebbe richiamare alla mente un oggetto di tartaruga.

La presenza di una tale morfologia del nicchio appare enigmatica in un ambiente, come quello di duna, che è dominato, tra le sue componenti, dalla prolungata aridità estiva: questa, che fa strage di individui giovani, è sopportata dagli adulti di quelle specie di Elicidi che presentano estivazione

(*) Ricerca eseguita presso il Centro di Studio per la Biologia del C.N.R.
(**) Nella seduta del 10 dicembre 1960.

con geotropismo negativo, in grazia dell'alta efficacia protettiva del guscio il quale, oltre ad essere globoso, e pertanto ad esporre un minimo di superficie, è anche bianco, ispessito e quasi impermeabile anche alle radiazioni solari, ed è completato da un epiframma pure bianco, molto ispessito e calcareo. Un nicchio subtrasparente in ambiente arido è talmente in contrasto insomma, con un'altra regola, quella dei colori, che la supposizione più ovvia ci è parsa (cfr. Sacchi, 1960) [4] non quella di un significato adattativo di *testudinea* (che rilevammo presente nelle dune di Sottomarina, a Chioggia, con frequenza del 2–3 °/₀; ma che trovammo nel Veneziano anche altrove, pur se rarissima: per esempio nelle vecchie dune di Capo Sile ed a Punta Sabbioni); ma quella di una possibile persistenza di simili fenotipi, forse dati da una mutazione recessiva, in ambienti, quali quelli Veneziani, il cui clima è extramediterraneo, dunque più umido e più fresco di ambienti analoghi d'altre regioni litorali italiane, e pertanto è meno sfavorevole che altrove per essi.

La fo. *testudinea* non ha in realtà che rassomiglianze superficiali con altri individui a nicchio « corneo » viventi su terreni poverissimi di calcare, e pertanto con metabolismo deficiente di Ca^{++}, e per di più in climi freschi, come sulla Manica ed altrove verso le zone limiti settentrionali della specie. A differenza di questi, che hanno guscio sottilissimo e di estrema fragilità, lo spessore di *testudinea* non è inferiore a quello delle altre *E. pisana* veneziane, per quanto l'intera specie abbia a Venezia, dove il calcare è molto abbondante nelle sabbie, ma il clima non consente una stagione calda molto prolungata, una conchiglia relativamente sottile.

L'aspetto corneo di *testudinea* potrebbe dunque attribuirsi a due ordini di motivi: 1° la particolare ricchezza del nicchio in componente protidica (conchiolinica); 2° l'orientazione particolare dello strato intermedio (prismatico) calcareo.

Per una soluzione del problema, accanto a materiale normale e *testudinea* di Chioggia, raccolto da noi nell'autunno del 1956; ed a materiale di Cadice, pure raccolto da noi, nel maggio dello stesso anno, è stato analizzato un campione di Santa Cruz de Tenerife, pure della primavera 1956. Accanto a *testudinea*, si è cioè considerato materiale proveniente:

1° da un biotopo ricco di calcare, ma di clima non ottimale per *E. p.* (Chioggia);

2° da un biotopo ricco di calcare e di clima considerabile come ottimale per una specie termofila mediterranea (dune della spiaggia di Cadice);

3° da un biotopo climaticamente ottimale, ma povero di calcare (Tenerife: sabbie basaltiche).

Le conchiglie di Chioggia sono prevalentemente ornate, e subglobose (cfr. Sacchi, 1952 cit.) [2]; quelle di Cadice sono per buona parte inornate o con disegno pallidissimo, spesse, cretacee, subdepresse (Porpora & Sacchi, 1958) [5]; quelle di Tenerife sono tutte ornate, globose, simili di forma alle popolazioni del Marocco meridionale (Sacchi, 1955) [6] ma più sottili di queste.

La relativa stenoecia della specie, che è sovrattutto legata alle dune marittime litorali, e lo è comunque in tutte le zone di raccolta del materiale usato, assicura il massimo possibile di comparabilità ambientale.

Tutto il materiale, dopo breve permanenza in alcool etilico diluito (50 % circa) per uccidere l'animale e facilitare lo strappo del muscolo columellare, che ne consente l'estrazione completa dalla conchiglia, è stato disseccato e conservato in carta prima dell'inizio delle analisi. In queste è stato comunque evitato l'uso della parte apicale (giovanile) del nicchio, e della columella, alle quali potrebbe pur sempre aderire qualche frustolo di tessuto delle ghiandole digestiva e dell'albumina.

L'azoto totale è stato determinato per titolazione previa ossidazione della sostanza in esame. 100–200 mg di sostanza, finemente polverizzati, erano ossidati con miscela d'ossidazione; l'ammoniaca era distillata al micro–Kjeldahl e titolata con HCl 0,01 N.

I resultati ottenuti, esprimenti una media di sette determinazioni pel primo e pel quarto campione; di cinque pel secondo e di sei pel terzo, sono i seguenti (Tabella I), espressi in mg di azoto per 100 g di sostanza conchigliare. Di ogni campione, oltre alla media aritmetica, sono dati lo scarto quadratico medio e l'errore medio.

Tabella I.

	Normali Chioggia	*testudinea*	Cadice	Tenerife
m	156,47	144,27	118,10	184,30
s	± 4,1	± 3,1	± 6,3	± 3,4
e	± 1,55	± 1,39	± 2,58	± 1,28

La Tabella I mostra, come sarebbe parso probabile, che l'azoto totale è più elevato nei nicchi fortemente ornati di disegno bruno (Chioggia e Tenerife) che non nel materiale ispessito e poco ornato di Cadice. Esso è anche superiore nei normali di Chioggia in confronto a *testudinea*, ma con differenze meno rilevanti rispetto a quelle riscontrate nel confronto con gli altri campioni, e che vanno anche considerate nel quadro delle possibilità di randomizzazione molto minori nella raccolta in natura di una forma rara come *testudinea*, in confronto a materiale normale di una specie che può raggiungere in duna densità anche di centinaia di individui per mq. Il campione analizzato per *testudinea* era, infatti, di soli quindici individui, contro ottanta di Tenerife e trecento degli altri due lotti.

Appare, tuttavia, sufficientemente sicuro, anche per la modestia dello scarto quadratico medio, che *testudinea* non contiene più azoto conchigliare

dei normali di Chioggia, e che il suo aspetto « corneo » non è dunque dovuto a scarsezza relativa della frazione calcarea, ma, con ogni probabilità, come potrà cercare di dimostrarsi in seguito con le abituali tecniche mineralogiche, ad una struttura atipica dello strato intermedio del guscio.

Per accertare se i dati ottenuti e riportati in Tabella I debbano riferirsi soltanto ad azoto proteico, si è proceduto poi ad un'altra serie di determinazioni, dell'*azoto acidosolubile* nel materiale previamente trattato con acido tricloroacetico al 50 %. Tale ricerca si è peraltro dovuta limitare ai lotti più numerosi. I resultati ottenuti, riportati in Tabella II, di tre determinazioni per ciascun lotto, sono pure espressi in mg di azoto per 100 g di sostanza.

Tabella II.

Normali Chioggia	Cadice	Tenerife
51,0	34,0	81,0
51,0	34,0	80,4
50,0	33,8	80,5

La quota d'azoto acidosolubile trovata potrebbe essere attribuita a diverse sostanze azotate, come aminoacidi, acido urico, urea, ecc. La ricerca qualitativa di queste sostanze è stata eseguita mediante diverse reazioni colorate.

L'*acido urico*, notoriamente termine principale del catabolismo azotato nei Molluschi aerobi, è stato ricercato col reattivo di Folin. Reazione negativa. L'*urea*, la cui presenza nel ricambio dei Polmonati è, d'altronde, ancora molto dubbia, per quanto scarsi siano i dati disponibili a questo proposito, è stata ricercata tanto col metodo colorimetrico (reattivo di Nessler) quanto col metodo enzimatico (titolazione dopo incubazione con ureasi). Entrambe le reazioni hanno dato resultati negativi. Si è infine determinata anche la eventuale presenza di *sali d'ammonio* – eventuale resultato di una decomposizione spinta dei composti proteici – mediante il reattivo di Nessler, dopo distillazione d'una sospensione in acqua del materiale polverizzato. Anche quest'ultima reazione è risultata negativa.

Nettamente positiva, per contro, la *reazione della ninidrina* (5 ml di soluzione in esame addizionati di una soluzione alcolica allo 0,2 % di ninidrina; indi, concentrazione). Il liquido ha assunto sempre bella colorazione violetta, se il materiale sospeso in acqua, dopo filtrazione, veniva trattato direttamente con la soluzione alcolica di ninidrina. Eseguendosi invece la reazione della ninidrina sul filtrato, dopo precipitazione con acido tricloroacetico, la colorazione ottenuta era purpurea.

La positività della reazione della ninidrina conferma la supposizione basata sul netto parallelismo rilevato tra azoto acidosolubile ed azoto totale:

il primo è dato, prevalentemente almeno, da composti intermedi della sintesi o della demolizione proteica. Per quanto quest'ultimo processo, trattandosi di materiale morto da tempo, nonostante le precauzioni prese per la buona conservazione, e la facile conservabilità intrinseca del materiale conchigliare, sia da ritenersi prevalente, non può escludersi la presenza di prodotti intermedi di sintesi, perché tutto il materiale fu raccolto in stagioni di intensa attività vitale per animali di duna.

In sostanza, i dati ottenuti confermano a livello biochimico la regola del Rensch sull'ottimalità ambientale: sia in condizioni di calcare abbondante nell'ambiente, ma di clima poco favorevole (in sostanza, troppo fresco per buona parte dell'anno); sia in climi perfettamente idonei, quali i climi atlantici, ma con disponibilità da Ca^{++} scarsa, la conchiglia di *Euparypha pisana* si arricchisce relativamente della parte organica, cioè è relativamente più povera di calcare, da questo dipendendo essenzialmente lo spessore e l'aspetto opaco del nicchio. A tali fenomeni porta un contributo anche il forte variare delle frequenze dei fenotipi con ornamentazione bruna (che, secondo quanto si conosce in specie affini, è data da pigmenti di natura melaninica: cfr. per esempio Cain & Sheppard, 1952 [7]) costituente, com'è noto, un insieme di zone dove sembra relativamente prevalere, in confronto con le zone non pigmentate, la conchiolina.

Gli Autori ringraziano per la loro cortese assistenza il prof. Enzo Leone, Professore di Biochimica applicata nell'Università di Sassari, e l'amico prof. Francesco Ghiretti, Caporeparto di fisiologia alla Stazione zoologica di Napoli. Esprimono parimenti il loro ringraziamento al dott. Francisco Español, Direttore del Museo zoologico di Barcellona, che ha procurato il materiale canariense.

Bibliografia.

[1] Rensch B., *Ueber die Abhängigkeit der Grosse des relativen Gewichts und der Oberflächenstruktur der Landschneckenschalen von den Umweltsfaktoren*, « Z. Morph. Oekol. Tiere », *25*, 757–807 (1932).

[2] Sacchi C. F., *Ricerche sulla variabilità geografica in popolazioni italiane di* Euparypha pisana (*Müll.*), « Ann. Mus. Civ. St. Nat. Genova », *65*, 211–258 (1952).

[3] Taylor J. W., *Monograph of the land fresh-water Mollusca of the British Isles, 3* (*Zonitidae, Endodontidae and Helicidae*). Leeds (1914).

[4] Sacchi C. F., *Mediterraneismo e fattori insulari nell'ecologia dei Molluschi non marini della laguna di Venezia* (in corso di stampa su « Atti Ist. Ven. »).

[5] Porpora L. & Sacchi C. F., *Ricerche su* Euparypha arietina (*Rossm.*). – II. *Dati biometrici*, « Ann. Ist. Zool. Univ. Napoli », *10*, 1–52 (1958).

[6] Sacchi C. F., *Fattori ecologici e storici nel polimorfismo delle* Euparypha *del Marocco occidentale*, « Studia Ghisleriana » [3], *2*, 43–66 (1955).

[7] Cain A. J. & Sheppard P. M., *The effect of natural selection on body colour in the land snail* Cepaea nemoralis, « Heredity », *6*, 217–231 (1952).

Biologia. — *Sulla citologia del pancreas endocrino nei Teleostei. Ricerche sperimentali in* Gambusia holbrooki *Grd.* (*). Nota di Pietro Ghiani e Leandro Federici, presentata (**) dal Corrisp. E. Remotti.

In un ciclo di lavoro su *Gambusia Holbrooki* Grd. abbiamo avuto occasione di ritrovare in numerose forme alcuni interessanti particolari nella distribuzione dell'endocrino pancreatico. In relazione alle note questioni sull'argomento rinvenibili nella letteratura – più oltre unitamente ai nostri reperti cercheremo di discuterle – siamo stati indotti da questi primi dati ad una più sistematica osservazione sulle strutture pancreatiche, seguendo alcune tecniche istomorfologiche per la rivelazione dei citotipi insulari (fissazione Bouin; colorazione cromo-ematossilina-floxina sec. Gomori; colorazione paraldeide fucsina sec. Scott).

In una prima parte delle indagini abbiamo utilizzato forme prelevate dalle abituali condizioni di allevamento di acquario dell'Istituto nei mesi da marzo a maggio del corrente anno. Di queste osservazioni forniamo le linee essenziali, sufficienti per la comprensione delle successive esperienze, nei seguenti punti:

1° la distribuzione del tessuto endocrino è prevalentemente prossimale: il pancreas – ampiamente disseminato – presenta ai livelli prossimali una massa principale, che è quasi del tutto endocrina; esclusivamente endocrine sono le formazioni intraepatiche;

2° nell'ambito della massa principale sopradetta è distinguibile una formazione globosa, delimitata da una sottile membrana seguibile pressoché su tutto il contorno, ricca di cellule disposte in zolle e cordoni. Tale formazione si allunga per circa 50–100 micron o poco più in senso cefalo caudale e talora sporge verso la cavità celomatica con un tratto della propria circonferenza dalla zona pancreatica che la ingloba. Le cellule che compongono la formazione stessa sono a limiti non sempre ben distinti, nucleo rotondeggiante o più spesso ovale, con un nucleolo e cromatina dispersa in minuti granuli, citoplasma chiaro privo di granulazioni tingibili o con scarsissime granulazioni che in modo appena percettibile assumono una tinta rosa con la floxina del Gomori, negative alla paraldeide–fucsina e negative alla cromematossilina. Poche cellule periferiche sono positive alla cromematossilina, non sempre presenti cellule positive alla paraldeide fucsina;

3° il restante endocrino della massa principale comprende cordoni di cellule disposti lungo una trama vasale. Prevalgono – ma non costante-

(*) Ricerca eseguita nell'Istituto di Anatomia e Fisiologia Comparate della Università di Genova.

(**) Nella seduta del 10 dicembre 1960.

mente – al centro cellule a citoplasma grande allungato sui vasi (talora a rosetta intorno ad un vaso) con granulazioni floxinofile, alla periferia cordoni di cellule con granulazioni positive alla cromematossilina. Rare le cellule paucigranulari descritte nella formazione globosa. Perifericamente ancora possono trovarsi strutture esocrine;

4° rare cellule di tipo endocrino isolate o a piccoli gruppi (in tale caso una sola tra le tre morfologie cellulari indicate è rappresentata per ogni gruppo) sono distribuite in zone diverse tra le strutture esocrine;

5° la formazione globosa sopradescritta non è presente in ogni forma di Gambusia. Distribuendo tutto il materiale osservato in tre classi di lunghezza delle forme (forme piccole da 1 a 1,5 cm; forme medie da 1,5 a 2 cm; forme grandi da 2 a 2,5 cm) si è potuto rilevare che la formazione in questione, per gruppi casuali di 10 forme ciascuno, si presentava con costanza in tutte le forme grandi, raramente (2 su 10) nelle medie, mai nelle piccole. Non abbiamo potuto dimostrare una correlazione con la distribuzione sessuale: in ogni caso la composizione citologica non sembra assumere variazioni in questo senso.

Sulla scorta di queste osservazioni abbiamo proceduto a due gruppi di esperienza:

A) in cristallizzatori con 300 cc di acqua di fonte abbiamo posto per ciascuno due gambusie di taglia grande con aggiunta di dosi diverse di cloruro di cobalto: gr 1,5; gr 0,75; gr 0,30. La durata della esperienza era segnata dall'inizio di manifestazioni di sofferenza dell'animale (atteggiamenti motori con riflessi di immersione, movimenti di maneggio, disturbi dell'equilibrio); in media circa 5, 8, 24 ore rispettivamente ai dosaggi;

B) in cristallizzatori con 200 cc d'acqua era aggiunta – per due gambusie – allossana gr 1, dose fissata in controlli preliminari sul tempo di sopravvivenza, che in tali condizioni ha oscillato dalle 12 alle 14 ore.

Opportuni controlli nelle stesse condizioni di *habitat* – ovviamente senza sostanze tossiche – sono stati distribuiti per ogni gruppo di esperienze.

La indagine istomorfologica, oltre a limitarsi come ovvio a forme fissate ancora vitali, ha riguardato per ora solo gli individui – di saggio e controllo – di sesso femminile al fine di evitare comunque disomogeneità correlate a impulsi sessuali (ved. in Pallot [1]), nonostante la riserva sopra espressa a questo proposito.

Nei saggi trattati con cloruro di cobalto la zona globosa a cellule paucigranulari si è ritrovata lesa costantemente ed *in toto*: nuclei picnotici, ravvicinati, citoplasma ridotto ed indistinto, intensa replezione di vasi sanguigni, sino ad aspetti di fusione vera e propria della struttura in alcune zone. Solo pochi elementi cellulari rimangono indenni in qualche settore periferico; alcuni di questi presentano granuli positivi alla cromematossilina, non alla paraldeide fucsina. Di particolare rilievo la presenza di vaste zone a cellule

(1) G. Pallot, *Sur l'existence d'une poussée sexuelle dans le pancreas des poissons osseux*, C. R. Soc. Biol. Paris », *140* [7-8], 292 (1946).

floxinofile fuori della formazione globulosa, indenni anche sullo stesso piano di sezione. Altre cellule lese con nucleo picnotico e più o meno evidente perdita citoplasmatica si trovano a gruppi o isolati attorno ai manicotti perivasali intraepatici od in altre sedi tra il tessuto esocrino.

Nelle forme trattate con allossana la formazione globosa è rimasta sempre indenne. Lesioni si sono ritrovate sparse nei manicotti perivasali e soprattutto nella massa pancreatica principale, specie in quella porzione più periferica si è dimostrata più ricca di cellule con granuli ad affinità per la cromematossilina. La lesione consiste in picnosi nucleare, vario grado di alterazione citoplasmatica, con costante degranulazione, vacuolizzazioni frequenti, talora lisi completa.

La formazione globosa, che è stata qui descritta (e che dai dati esposti sembra interessata in modo elettivo dalla azione del cloruro di cobalto), per la sua morfologia generale potrebbe essere avvicinata alle formazioni tipo insula principale di Rennie, ben nota nel pancreas di teleostei a pancreas disseminato (ved. anche in Lepori [2]). Si discosta peraltro nella composizione citologica. In questo tipo di isole sono abitualmente descritti i due tipi cellulari che Diamare [3] indicò come cellule scure prevalentemente centrali e cellule chiare periferiche. Con il lavoro di Bowie [4] in *Neomaenis griseus* si introduce per i teleostei la terminologia di alfa e beta usata da Lane [5] e da Bensley [6] per i mammiferi e la disposizione topografica indurrebbe a far ritenere le cellule chiare periferiche omologhe alle beta di Bowie e le scure centrali alle alfa dello stesso autore. Altra cosa può essere la corrispondenza tra queste alfa e beta e le cellule alfa e beta così denominate soprattutto nei mammiferi sulla scorta di ancor più recenti metodi di rivelazione, che almeno dal punto di vista istomorfologico trovano il loro cardine nella cromematossilina floxina sec. Gomori [7], nella paraldeidefucsina secondo Scott [8], nelle impregnazioni argentiche oltre che in varie modificazioni dell'Azan. Una rassegna di queste possibilità si ritrova in Ferner [9], oltre

(2) N. G. Lepori, *Il pancreas nei pesci*, « Arch. it. Anat. Embr. », *58*, 1 (1953).

(3) Ved. Diamare, *Studi comparativi sulle isole di Langerhans del pancreas*, Mem. I. « Intern. Monatschr. Anat. u. Phys. », XVI, 1899 [limitatamente allo specifico argomento; per la vasta opera di Diamare ved. ancora in: Diamare, *Il pancreas endocrino*, « Quaderni di Anatomia pratica », serie X (1955)].

(4) D. J. Bowie, *Citological studies of the islets of the islets of Langerhans in a teleost*, Neomaenis griseus, « Anat. Rec. », *29* [1], 57 (1925).

(5) M. A. Lane, *The cytological characters of the areas of Langerhans*, « Am. J. of Anat. », *7*, 409 (1907).

(6) R. R. Bensley, *Studies on the pancreas of the guinea pig.*, « Am. J. of Anat. », *12*, 297 (1911-12).

(7) G. Gomori, *Observations with differential stains on human islets of Langerhans*, « Am. J. Path. », *17*, 395 (1941).

(8) H. R. Scott, *Rapid staining of beta cell granules in pancreatic islet*, « Stain Technol. », *27*, 267 (1952).

(9) H. Ferner, *Das Inselsystem des Pancreas*. C. Thieme, Stuttgart 1952.

che recentemente in Allara [10] unitamente ad una critica sui dati istochimici. Come è noto una serie di dati sui mammiferi concorda nel far ritenere la cellula beta, indicata da questi metodi, come insulinogena, mentre per le alfa le attribuzioni funzionali possono ritenersi piuttosto incerte (ved. anche recentemente in Verne [11]), se pure molti Autori propenderebbero a considerarle legate alla produzione di glucagone o fattore iperglicemizzante.

Ritornando ai teleostei, Saviano [12] e Caesar [13] in diverse specie con metodi confrontabili (Azan modificato Gomori e cromematossilina floxina) tendono a rimanere aderenti al concetto di cellule alfa, scure e centrali e beta chiare e periferiche, ma avvertono sulla relatività della disposizione topografica, nel senso che cordoni di cellule chiare si spingono assai centralmente. Va ancora notato che Caesar in realtà non si esprime in termini di alfa e di beta, precisando piuttosto le affinità tintoriali delle cellule: l'autore centra inoltre la propria osservazione sui reperti di secrezione colloide, riprendendo i concetti di Stapelfunktion (funzione di accumulo) espressi da Bargmann [14] e che in certa misura riecheggiano nelle ricerche (ancora sui teleostei) di Clausen [15] ed in quelle sulla attività stagionale di Pallot [16]. D'altra parte Mosca [17] con gli stessi metodi (e con paraldeide fucsina) considera le alfa periferiche e le beta centrali; le microfotografie dello stesso autore potrebbero tuttavia far rilevare la possibilità anche di invertire la topografia con opportuni piani di sezione.

Le ricerche eseguite sui teleostei con sostanze ritenute insulotrope con esiti citopatosici (per la maggior parte orientate soprattutto alla dimostrazione dei principi ormonali ancora estraibili o comunque in attività dopo l'azione del tossico) non offrono elementi concordi per la identificazione dei citotipi.

Saviano [12] con allossana osserva lesioni sia in cellule chiare che scure; ma prevalentemente nelle seconde o alfa per l'autore, mentre Doerr [18] non trova lese le cellule « chiare » e Grosso [19] mostra di ritenere ancora le lesioni

(10) E. Allara, *Aspetti istologici dei processi secretori nelle ghiandole endocrine*, « Mon. Zool. », vol. 62, suppl.: « Atti Soc. It. Anat. », convegno ottobre 1953, pp. 118–33.

(11) J. Verne, *Considerations sur la signification histophysiologique des cellules A dans les ilots de Langerhans du pancreas*, « Acta Anat. », *30*, 1911 (1957).

(12) M. Saviano, *Ricerche sull'azione diabetogena dell'allossana nei teleostei.* – Nota II. *Osservazioni istologiche sul tessuto insulare*, « Boll. S.I.B.S. », *23*, 1300 (1947).

(13) R. Caesar, *Zur Zytologie des Inselorgane von Teleostiern mit besonderer Berüchsichtigung des Kolloidvorkommens*, « Ziitschrift f. Zellfosrch. », *40*, 571 (1954).

(14) W. Bargmann, *Die Langerhansschen Inseln*: in *Handbuch der mikroskop. Anat. des Menschen*, Bd. 6/2 (1939).

(15) D. M. Clausen, cit. da R. Caesar [13].

(16) G. Pallot e W. Schatzle, *Le balancement saisonnier des formules cytologiques et des cycles secretoires dans les îlots pancreatiques des Teleosteens*, « C.R.S.B. », *147*, 1440 (1953); ved. anche: « Bull. Hist. appl. », *16*, 33 (1939).

(17) L. Mosca, *Sulla citologia delle isole pancreatiche*, « Biol. Lat. », vol. 8 (1955).

(18) W. Doerr, *Alloxanwirkung bei Fischen*, « Virch. Arch. », *318*, 175 (1950).

(19) L. L. Grosso, *The effect of allossan on the pancreas, liver and kidney of the* Teleost Lebistes reticulatus, *with notes on the normal pancreas*, « Zoologica », *35*, 169 (1950).

da allossana nei teleostei avvicinabili ai reperti riscontrati nei mammiferi. Mosca con allossana [20] trova lese le cellule periferiche e con cloruro di cobalto [17] trova pure interessata la periferia delle isole.

Riprendendo i nostri dati dunque nella formazione globosa che abbiamo descritto non vi è questione di cellule chiare e scure, ma è stata posta in evidenza la notevole prevalenza di un tipo cellulare che non è – nei limiti dei metodi impiegati – ravvicinabile con sicurezza né alle alfa né alle beta. Abbiamo di proposito evitato queste terminologie nelle descrizioni; cellule floxinofile e cellule cromematossilinofile sono comunque rappresentate nel restante endocrino, con una distribuzione topografica reciproca non ben definita, se pure con una certa prevalenza di cellule cromematossilinofile alla periferia dove maggiormente si addensano anche le lesioni da allossana. Non però nell'isolotto globoso i cui elementi a citoplasma paucigranulare si ritrovano indenni dopo il trattamento con allossana ed invece lesi ampiamente dal cloruro di cobalto.

La questione di altri tipi cellulari oltre le cellule alfa e beta è stata più volte agitata in osservazioni su diverse specie di vertebrati. Limitandoci ai teleostesi, Bowie [4] descrive una cellula con granulazioni piuttosto rade (di colore rosso con il metodo usato dall'autore), nucleo centrale sferico od ellittico che l'autore denomina cellula gamma avvicinandola all'elemento descritto da Bensley [5] nei mammiferi; tale elemento si trova anche in abbondanza, sia nelle isole grandi che piccole, frammisto alle altre cellule. Un altro elemento, che l'autore ritiene da avvicinare alle gamma, presenta caratteristiche nucleari simili, granulazioni citoplasmatiche scarse o assenti del tutto; di queste cellule con poche beta sono prevalentemente composte le piccole isole. L'autore ritiene che la cellula gamma (e quindi anche l'altro elemento ad essa dall'autore correlato) abbia una potenzialità evolutiva tanto verso le alfa che le beta, sebbene, concluda, *sufficient proof of such potentiality is lacking*.

Le cellule gamma di Bowie sono ancora menzionate da Saviano [12]. Lepori descrive in *Muraena helena* [21] cellule a nucleo acidofilo e più recentemente [22] in *Moena Chryselis* segnala elementi in cariocinesi nell'area periferica insulare a cellule chiare ed avanza l'ipotesi che la cellula gamma di Bowie sia una cellula in profase mitotica.

Nelle nostre ricerche la presenza di un'isola globosa, composta almeno in grande prevalenza di cellule paucigranulari è quindi il dato che è suggestivo indubbiamente accostare alla elettività della lesione da cloruro di cobalto per l'isola stessa. Seguendo l'indicazione di dati diversi che dimostrano diminuita la quantità di glucagone nel pancreas per azione del clo-

(20) L. Mosca, *Ricerche di orientamento sul fattore iperglicemizzante delle isole pancreatiche nei teleostei*, « Boll. Soc. it. Patol. », 2 (1951).

(21) N. G. Lepori, *Ricerche istologiche e citologiche sul pancreas di alcuni teleostei*, « Atti Soc. Toscana di Scienze Naturali », Mem., vol. 9 (1952).

(22) N. G. Lepori, *Cellule chiare e cellule scure nelle isole di Langerhans dei teleostei*, « Mon. Zool. it. », 67, 83 (1959).

ruro di cobalto in mammiferi (Wuylstecke e coll. [23], Eser e coll. [24]), ed in pesci (Mosca [25]), alla cellula paucigranulare dovremmo attribuire il valore di immagine morfologica della attività glucagonica. Comunque la elettività della lesione tende certo a conferire una più spiccata individualità a questo elemento, anche senza volerne negare eventuali rapporti genetici con le altre cellule. Vogliamo ancora ricordare che anche in uccelli, e proprio in analoghe condizioni sperimentali, acquista evidenza (Ghiani [26]) un terzo tipo di cellula endocrina, avvicinabile alla cellula non argentofila e diversa dalle beta, descritta nelle stesse forme (van Campenhout e Cornelis [27]; Ghiani [28]).

Ovviamente attendiamo da altre ricerche attualmente in corso conferma e ampliamento su un piano più generale delle osservazioni qui segnalate, che d'altra parte pur offrendo per ora solo una ipotesi, possono inquadrarsi tra i documenti della complessità sempre più evidente dell'endocrino pancreatico.

(23) C. A. Wuylstecke, G. Cornelis e Chr. De Duve, *Influence du traitement au cobalt sur le contenu en facteur HG du pancreas du cobaye*, « Arch. int. de Phys. », 60, 105 (1952).

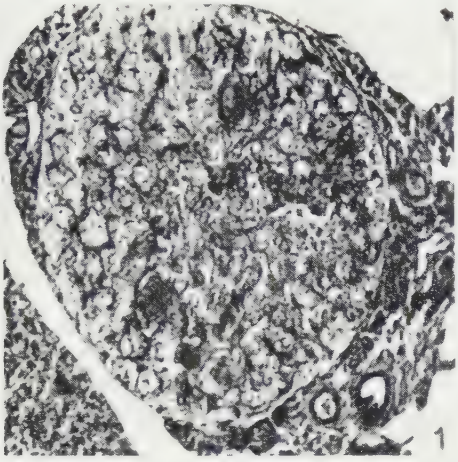
(24) S. Eser e coll., 1952, vedi in E. van Campenhout: *The cytotoxic effect of cobalt sal on the alpha cells of the islands of Langerhans*, « J. exp. Zool. », vol. 129 [3], 535 (1955).

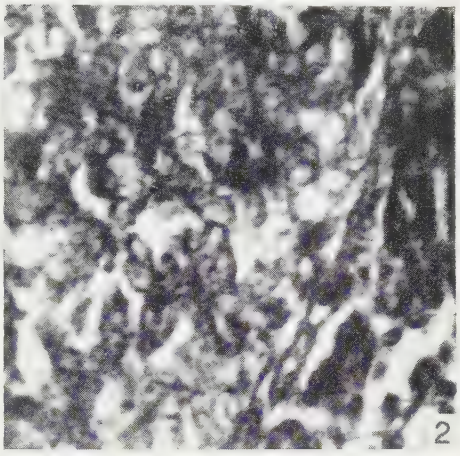
(25 L. Mosca, *Azione del cloruro di cobalto e del dietilditiocarbamato di sodio sulle isole pancreatiche dei teleostei*, « Boll. Soc. Med. Chir. Pisa », *21*, 117 (1953).

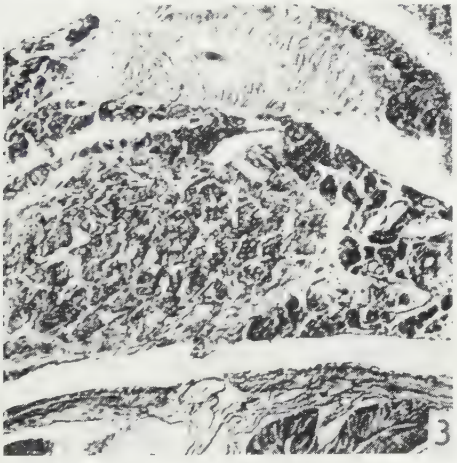
(26) P. Ghiani, *Aspetti di fisiomorfologia cellulare del pancreas endocrino. Ricerche con cloruro di cobalto in embrione di pollo*, « Atti Acc. Lig. di Scienze e Lett. », vol. 13 (1956).

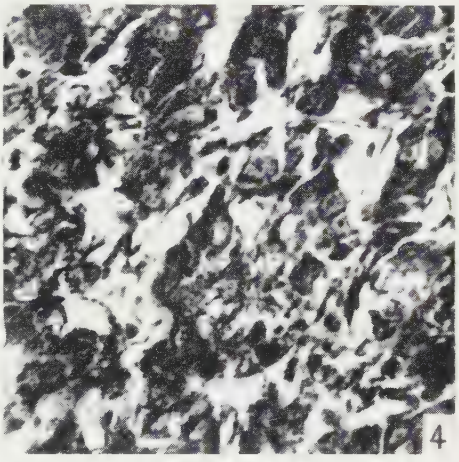
(27) E. van Campenhout e G. Cornelis, *Les ilots endocrines du pancreas des oiseaux*, « C. R. Anat. », XL Reun., Bordeaux 1953.

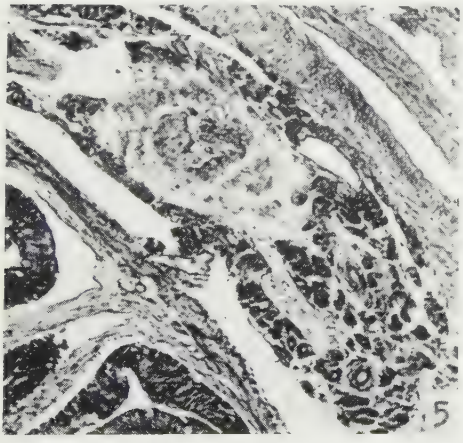
(28) P. Ghiani, *Evoluzione citologica del pancreas endocrino. Ricerche in embrione di pollo*, « Atti Acc. Lig. di Scienze e Lett. », vol. 13 (1956).

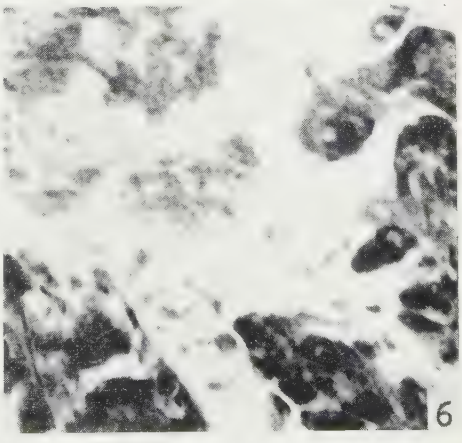












1) Isola globosa contornata da altro tessuto pancreatico, nell'isola cellule di un solo tipo (paucigranulari). 2) Particolare della prec., dal centro verso sinistra cellule paucigranulari, con nuclei grandi prev. ovalari, a destra limite dell'isola, ed al di fuori cellule scure (alfa). 3) Isola equivalente a quella in 1), lesa da $CoCl_2$. 4) Particolare della lesione. 5) Polo inferiore prospiciente un vaso di isola globosa in lisi totale da $CoCl_2$, contornata da altro tessuto pancreatico indenne. 6) Particolare del polo inferiore in lisi, cellule di contorno extrainsulari indenni e floxinofile (alfa), in posizione pure prospiciente un vaso e pertanto in condizioni di aggredibilità probabilmente equivalenti. (Cromematossilina–floxina sec. Gomori; ingr. fin.: 1–3–5: 250×; 2–4–6: 1300 ×).

COMMEMORAZIONI

Commemorazione del Socio Umberto Pierantoni

tenuta (*) dal Socio ALESSANDRO GHIGI.

Nel primo anno di questo secolo, in occasione della assemblea generale della *Anatomische Gesellschaft* in Pavia, si costituì l'Unione Zoologica Italiana, la quale tenne in Napoli, nel 1901, il suo secondo Convegno Zoologico Nazionale. Umberto Pierantoni fu eletto cassiere–economo del Sodalizio, del quale io ero stato nominato vice–segretario. Da allora data la nostra amicizia e la nostra collaborazione appassionata per la tutela degli interessi scientifici, didattici ed organizzativi della Zoologia italiana.

L'una e l'altra risalgono adunque a quasi un sessantennio ed io mi accingo a parlare di lui, che fu più volte onorato da questa Accademia, con spirito di amico, che ha potuto non solo apprezzarne l'amore per la scienza ed il valore dell'opera di zoologo, ma anche le rare doti di bontà.

Era nato il 25 settembre 1876 a Caserta e proveniva da una famiglia di giuristi: suo zio Augusto era quel Senatore Pierantoni che fu uno dei più fieri oppositori di Giolitti nel suo primo Ministero. Umberto si laureò a Napoli in Scienze Naturali nel 1899 e fu subito nominato assistente nell'Istituto di Zoologia da Francesco Saverio Monticelli, succeduto in quell'anno ad Achille Costa.

L'attività scientifica e didattica del Pierantoni si è svolta quasi interamente, nell'Università di Napoli, salvo nell'anno 1921–22 in cui fu titolare di Zoologia e Anatomia comparata nell'Università di Sassari e nel successivo triennio dal 22–23 al 24–25, in cui fu titolare di Zoologia a Torino. A Napoli succedette ad Antonio Della Valle nella cattedra di Anatomia comparata, dalla quale passò a quella di Zoologia, nel 1927, dopo la morte del Monticelli.

I primi lavori del giovane Pierantoni vertono sul sistema nervoso stomato–gastrico degli Ortotteri saltatori; ma fino dal 1901, vale a dire appena due anni dopo la laurea, descrisse una nuova specie di Anellide marino della classe degli Oligocheti, prova che egli aveva cominciato a studiare la fauna del Golfo di Napoli, in quella Stazione Zoologica che, per quasi un secolo, è stata ed è ancora il grande istituto di biologia marina, dove tutti gli zoologi del mondo accorrevano per studiare le numerose e svariatissime manifestazioni di vita delle forme animali marine.

Erano i tempi in cui la Stazione Zoologica era diretta personalmente da Anton Dohrn ed in cui Salvatore Lo Bianco chiedeva ogni mattina agli studiosi, quali animali desiderassero fra la serie numerosa di forme che il mare aveva gettato negli apparecchi di raccolta dei pescatori.

Il Pierantoni scelse gli Anellidi e si specializzò negli Oligocheti o lombrici di mare, divenendone rapidamente specialista. Scoperse in breve tempo e

(*) Nella seduta del 10 dicembre 1960.

descrisse nuovi generi e nuove specie di questi animali e ne studiò la biologia, illustrandone in particolar modo l'anatomia, l'embriologia e le svariate modalità di riproduzione. La conoscenza degli Oligocheti marini lo condusse anche a riconoscere l'esistenza di specie di questo gruppo, nuove per la scienza, nelle acque dolci ed altre parassite di Crostacei. Breve è il passaggio dagli Oligocheti ai Discofori o sanguisughe ed anche di questi si occupò. Ma la conoscenza profonda da lui acquisita su questo gruppo di animali, è rivelata nella monografia dell'Archianellide *Protodrilus*, che fa parte della famosa serie di monografie della *Fauna und Flora der Golfes von Neapel*. Questa del *Protodrilus* è una delle poche monografie scritte da zoologi italiani, monografie che dimostrano come la conclusione sistematica di una serie di ricerche anatomiche, embriologiche, fisiologiche ed ecologiche, costituisca la sintesi di tutti i rami della Biologia.

Quando il Pierantoni passò ad aggredire problemi di biologia e di zoologia generale, non dimenticò le sue antiche simpatie e non trascurò lo studio sistematico ed ecologico di Anellidi, di Nemertacei, di Platelminti e di Nematelminti, onde a buon diritto può essere considerato un distinto parassitologo ed elmintologo. Altri lavori riguardano Protozoi e tutti provano come, contemporaneamente alle sue ricerche di maggior lena, egli non trascurasse di esaminare attentamente la fauna che gli veniva recata dal mare.

Il Pierantoni venne in meritata fama specialmente colle sue ricerche sulla simbiosi fisiologica ereditaria, studiata in un primo tempo sulla *Icerya purchasi*, la grossa cocciniglia importata dall'Australia e che costituì un pericolo tremendo per ogni sorta di colture, fino a che non ne furono importati dal paese di origine i naturali predatori: dopo le ricerche sull'*Icerya*, seguirono quelle su di un'altra Cocciniglia, il *Dactylobius citri*: in entrambe queste specie aveva studiato formazioni speciali, il così detto corpo giallo ed in *Aphis brassicae* il così detto corpo verde.

I primi lavori sull'argomento risalgono al 1909 e al 1910 e riguardano la morfologia e l'embriologia degli organi suddetti, già parzialmente osservati e descritti da altri Autori, ma da questi non interpretati nella loro funzione e nel loro significato morfologico. Appartengono a questa categoria di organi, anche il pseudovitello degli Afidi e le masse polari che appaiono negli embrioni di questi Insetti e delle Cocciniglie. Usando una tecnica difficile a quei tempi, compì l'esame istologico di quelle formazioni e, mediante appropriate colorazioni e colture micologiche, riuscì a stabilire che tali formazioni sono di natura simbiotica, ossia le loro cellule contengono miriadi di batteri, le cui speciali attività determinano la funzionalità degli organi stessi. In sostanza, in codesti organi, si raccolgono microrganismi che penetrano successivamente nelle uova, durante il loro sviluppo, attraverso le cellule nutrici ed il cordone nutritivo, mentre per uno speciale comportamento di particolari cellule embrionali, si determina la formazione del nuovo individuo, nel quale si trasmettono i microrganismi simbiotici. Successivamente egli potè stabilire, mediante lo studio embriologico di quelle specie, che la pre-

senza costante dei simbionti in tutti gli individui di ciascuna specie, è assicurata da quella trasmissione che egli definì ereditaria. Riuscì a seguire inoltre il distacco dei batteri dagli organi recettori e il loro passaggio nelle uova, di cui attraversano il follicolo (o le cellule nutrici) ed il corion, per raggrupparsi a un polo, nel plasma, ove sono inglobati da speciali cellule, prodottesi nella segmentazione. Queste, coi batteri, che sono in attiva moltiplicazione, costituiscono l'abbozzo dell'organo simbiotico dell'adulto. Quanto alla funzione di tale organo, il Pierantoni potè stabilire che, negli insetti dei quali si occupava, esso è in rapporto con la utilizzazione dello zucchero, assunto in grande quantità dalle piante e poi scomposto, per mezzo dell'attività dei microrganismi, in anidride carbonica, che viene espulsa dalle trachee ed in alcool che è utilizzato dall'organismo. La priorità del Pierantoni nella illustrazione della simbiosi così detta ereditaria, fenomeno da lui scoperto e da altri Autori confermato in numerose specie d'insetti, fu stabilita senza possibilità di dubbio e fu confermata dal Buchner in un volume sulla simbiosi intercellulare ereditaria nelle piante e negli animali. « Le ricerche del Pierantoni – tolgo questo periodo dalla relazione presentata a questa Accademia dalla Commissione che propose di conferirgli il premio reale nel 1923 per la biologia – hanno aperto un nuovo capitolo della biologia, che interessa quasi tutte le discipline biologiche. Successivamente la simbiosi ereditaria è stata riscontrata in molti gruppi nuovi di animali, ma le attività funzionali che da essa possono dipendere, sono apparse più varie. Per quel che riguarda le funzioni della vita vegetativa, essa è stata dimostrata, oltreché in tutti gli insetti agrari, negli insetti xilofagi, in tutti gli animali ematofagi, insetti ed acari parassiti, vermi succhiatori di sangue (sanguisughe in senso lato) e nuovi casi vengono illustrati ogni giorno nella letteratura ».

Queste parole sono contenute nella citata relazione e portano le firme di Camillo Golgi, Presidente; Giulio Chiarugi; Battista Grassi; Ettore Marchiafava e Filippo Bottazzi.

Le ricerche sulla simbiosi ereditaria infatti, erano state successivamente estese dal Pierantoni stesso ad altri insetti, sistematicamente assai lontani dai Rincoti omotteri. Le ricerche embriologiche su alcuni Coleotteri che vivono nelle grandi masse di granaglie, come la Calandra del riso e il Silvano surinamense, gli fecero pensare alla possibilità che anche i Coleotteri mangiatori di semi possano talora, per il cibo ricco di amido, essere provveduti di organi ausiliari per la digestione delle grandi masse nutritive che essi ingeriscono e trovò che nelle larve di questi insetti esiste un organo simbiotico pari, che si riduce, ma non scompare nell'adulto. Analogamente, secondo le sue ricerche, si può ritenere che la nutrizione legnosa delle Termiti avvenga a spese dei flagellati loro inquilini, che digeriscono la cellulosa mediante microrganismi simbiotici contenuti nel loro endoplasma.

Nel 1914 egli cominciò ad occuparsi della luce negli insetti luminosi, quali sono le lampiridi e formulò l'ipotesi che anche questo fenomeno sia legato ad una forma di simbiosi ereditaria. Più tardi riconobbe egli stesso che le colture che si ottengono dai microrganismi che sono in quegli organi,

misti alla sostanza granulare fotogena, risultano prive di luminescenza, anche se coltivate nei più vari terreni e riconobbe altresì un fenomeno analogo nella luminescenza dei Crostacei Eufausiacei. Ma, insistendo nello studio degli organi fotogeni di altri animali, scoperse, nel 1917, che gli organi luminosi dei Sepiolidi (Molluschi Cefalopodi) posseggono organi fotogeni, la cui attività luminosa è dovuta a diverse specie di microrganismi che furono poi studiati da specialisti. Fu obbiettato in seguito da S. Mortara che i microrganismi presenti negli organi luminosi aperti dei Sepiolidi altro non sono che i comuni vibrioni luminosi delle acque marine ivi localizzatisi. La simbiosi è, comunque, comfermata; invece è ancora oggi questione insoluta se i microrganismi vengano trasmessi ereditariamente o se la coltura si rinnovi ad ogni generazione per penetrazione di vibrioni dall'esterno. Nel *Pyrosoma giganteum* (Tunicato pelagico), mise in evidenza che, per trasmissione diretta dei microrganismi allo stato di spore, si inizia il materiale luminoso di ciascuna colonia e per migrazione di masse provenienti direttamente dagli organi fotogeni, si propagano fotociti per tutta la colonia. Il Pierantoni ha studiato anche la fosforescenza di alcuni Oligocheti e dei Ctenofori e conclude la sua opera sulla simbiosi ereditaria, affermando che questo fenomeno appare « in casi in cui tali funzioni debbono esplicarsi in una maniera eccezionalmente intensa come quando vi sono grandi quantità o speciali sorta di cibo da digerire o quando da piccoli organi debbono trarsi grandi effetti come la luce degli organi luminosi ».

Buona parte dell'attività scientifica del Pierantoni è stata dedicata dal 1927 in poi, allo studio dei globuli del tuorlo, specialmente negli Anfibi. In una prima pubblicazione sull'argomento, il suo pensiero è chiaro: « Da lunghe e numerose osservazioni, io trassi la convinzione che in quelle formazioni aventi forma pressoché costante ed una struttura interna, non fosse possibile di riscontrare delle semplici goccioline di materiale nutritivo di riserva come viene quasi generalmente ritenuto, ma piuttosto degli elementi di natura cellulare, forse degli esseri viventi di vita propria ». In questa supposizione egli era stato confortato dal fatto che Camillo Golgi, in un lavoro pubblicato poco prima della sua morte, studiando le stesse formazioni nelle uova di Rana, era giunto a conclusioni pressocché analoghe, cosicché al Golgi spetta, come scrive il Pierantoni, la priorità dell'osservazione. Il Golgi aveva concluso che: « i globuli del tuorlo sono elementi forniti di tutte le proprietà di organismi viventi, non esclusa l'attività formativa ». Queste ricerche del Pierantoni sollevarono discussioni e dubbi, ma egli seguitò con ulteriori ricerche ed esperimenti a sostenere la propria tesi.

Mi sono limitato a citare i gruppi di ricerche più importanti compiute da Umberto Pierantoni, ma altre molte di natura e di importanza assai varia, sono state da lui compiute. Pubblicò anche due trattati: uno di Zoologia ed uno di Biologia, che sono riusciti utili per la preparazione di studenti universitari e sono stati ricercati fino al loro esaurimento.

Non posso tuttavia omettere che un uomo il quale ha passato l'intera vita nella ricerca scientifica e nell'insegnamento, si è occupato anche di pro-

blemi concernenti la scuola. Per l'attualità della questione della quale io pure mi sono interessato e mi interesso nel momento attuale, dirò che il Pierantoni si è occupato fra gli altri problemi didattici, dell'insegnamento delle Scienze Naturali nelle Scuole Medie. Egli scriveva nel 1935: « L'insegnamento delle Scienze Naturali nelle Scuole Medie italiane trovasi nelle più tristi condizioni in seguito ad una serie di disposizioni legislative e regolamentari che nell'ultimo decennio hanno contribuito a metterlo, nelle intenzioni del legislatore e nella pratica attuazione, alla coda di tutte le altre materie d'insegnamento ».

Questa situazione permane e non è stato possibile, fino ad ora, migliorarla, sebbene il maestro elementare debba oggi guidare il fanciullo nella esplorazione dell'ambiente che lo circonda. Nel seguitare a combattere una dura battaglia per la creazione di una coscienza e di una cultura naturalistica, nell'interesse del nostro paese, continuerò l'opera iniziata da Umberto Pierantoni e dalla Unione Zoologica Italiana.

Un uomo come egli è stato, non poteva essere dimenticato nel reggimento della Università di Napoli, alla quale ha sempre appartenuto, salvo breve intervallo, dal 1899 in poi. Egli ebbe infatti varie cariche accademiche: fu Preside della Facoltà di Farmacia dal 1930–31 al 1933–34 e successivamente di quella di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali dall'anno 1936–1937 al 1942–43. Lavorò, ancor prima di laurearsi, nella Stazione Zoologica e, allo scoppio della guerra 1915–18, ne tenne la direzione fino al ritorno di Rinaldo Dohrn nel 1924 e fu per molti anni membro del Consiglio di Amministrazione di quell'Istituto, in rappresentanza del Ministero dell'Istruzione Pubblica. In definitiva il Pierantoni può essere considerato non soltanto un allievo ma anche un collaboratore della Stazione Zoologica.

Bontà d'animo, signorilità di modi e grande serenità di spirito non gli vennero mai meno. Fu eletto Corrispondente di questa Accademia nel 1927 e Socio Nazionale nel 1947. Amò la gentildonna che fu impareggiabile compagna della sua vita, il figlio, la nuora ed i nipoti ed io lo ricordo legato da grande affetto agli altri parenti ed al suo Maestro Francesco Saverio Monticelli.

Eccezionale era la serenità e la imperturbabilità del suo spirito. Avevamo, nel 1914, assistito assieme al convegno dell'Unione Zoologica a Palermo e decidemmo di andare a Siracusa per assistere nel teatro greco ad una rappresentazione dell'Agamennone di Eschilo. La pioggia cadde e la rappresentazione fu interrotta e rimandata al giorno appresso: piovve tutta la notte e la mattina seguente, tanto che alcuni di noi volevano partire per Catania. Umberto, tranquillo, disse: « Nessuno di noi ha impegni, restiamo; in questo paese il tempo può cambiare da un momento all'altro ». Seguimmo il suo consiglio; sul mezzogiorno si fece sereno e il sole sfavillò sul teatro greco. Ho sempre davanti agli occhi lo scenario superbo dello Stretto, della verde penisola calabra e dell'azzurro intenso dello Jonio. Forse in quel momento sorse in me l'ammirazione per la bellezza della nostra terra e la scintilla che arde nell'animo mio per la difesa delle bellezze naturali d'Italia, fu accesa dalla imperturbabile serenità di Umberto Pierantoni.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Socio Anziano Cassinis, prima di dare la parola al Collega Ghigi, incaricato di commemorare il compianto Socio Pierantoni, si rende interprete dei sentimenti di affettuosa partecipazione di tutta la Classe al tributo di omaggio che verrà reso alla memoria dello Scienziato scomparso, il cui ricordo rimarrà, affettuoso e imperituro, nel cuore di tutti i Colleghi.

Il prof. Cassinis comunica quindi che messaggi di adesione sono stati inviati dal Rettore dell'Università di Napoli prof. Tesauro, dal Preside della Facoltà di Scienze di quell'Ateneo prof. Miranda, dal prof. Mario Salfi, Direttore dell'Istituto Museo Zoologico di Napoli e dal prof. Pasquale Pasquini, Direttore dell'Istituto di Zoologia di Roma.

Informa poi la Classe che sono presenti il Socio Perucca, in rappresentanza dell'Accademia delle Scienze di Torino, da lui presieduta, e il Socio D'Erasmo, che rappresenta la Facoltà di Scienze dell'Università, l'Accademia di Scienze Fisiche e Matematiche e la Società dei Naturalisti di Napoli.

Il Socio Ghigi rievoca la nobile figura di uomo e di scienziato di Umberto Pierantoni.

Il Socio Anziano Cassinis ringrazia il prof. Ghigi per la sua elevata orazione e rinnova ai familiari del Socio Pierantoni, presenti alla cerimonia, l'espressione del più vivo cordoglio dell'Accademia e suo personale per la scomparsa dell'illustre Collega.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio Signorini presenta il IV volume delle Opere di Levi Civita, con le seguenti parole:

« Ho l'onore di presentare all'Accademia il quarto volume delle Opere di Levi–Civita, cioè il penultimo. Esso raccoglie le trenta Memorie e Note pubblicate dal 1917 al 1928, il periodo forse di massimo fulgore nella produzione scientifica dell'indimenticabile Maestro.

« Purtroppo non è più qui Ugo Amaldi, che fin dai primi del 1957 aveva devotamente coordinato anche tutto il materiale di questo volume. Dopo la sua scomparsa sono venuti a far parte del nostro Comitato Bruno Finzi e Beniamino Segre.

« Il volume si inizia con la celebre Memoria sulla nozione di parallelismo in una varietà qualunque, origine di tanto vasta corrente d'indagini geometriche. Segue un numeroso gruppo di Note lincee, dove la formulazione analitica della teoria di Relatività viene ripresa alla base, cominciando dall'assegnare la corretta espressione del tensore gravitazionale, che sotto la forma fino allora attribuitagli dallo stesso Einstein aveva il doppio difetto di mancare di quell'invariantività che doveva invece essere suo carattere essenziale

e di implicare certe conseguenze fisiche non accettabili se non a patto di accomodamenti desunti dalla teoria dei quanti.

«Ma in questo volume figurano pure scritti che inscindibilmente legano il nome del Levi-Civita a sostanziali progressi della meccanica analitica e celeste, dell'idrodinamica, della teoria degli invarianti adiabatici: quali la Memoria degli Acta Mathematica sulla regolarizzazione del problema dei tre corpi; la Memoria delle Mathematische Annalen dove è risoluta l'equazione funzionale che caratterizza le onde periodiche in un canale molto profondo e la Nota lincea sulla determinazione rigorosa di onde irrotazionali periodiche; le tre lezioni di Amburgo sugli invarianti adiabatici.

« Il volume comprende anche un'altra Memoria delle Mathematische Annalen, la Memoria *Sur l'écart géodésique*, dedicata a Riemann nel centenario della nascita: e termina con le Note lincee sul moto di un corpo di massa variabile.

« La veste tipografica del volume è pari a quella, tanto apprezzata, dei tre volumi precedenti. Mi sia quindi permesso di rivolgere un vivo ringraziamento alla Casa Editrice Zanichelli e all'Ufficio Pubblicazioni dell'Accademia ».

Il Socio Perucca presenta il secondo volume della sua « Fisica generale e sperimentale » nella 7ª edizione; il volume fa seguito al primo, già presentato nella seduta del 16 gennaio del corrente anno.

Il presentatore mette in evidenza che l'opera nella nuova edizione non ha però mutato l'indirizzo originario, che è stato quello di costituire un'opera di base per la fisica al livello universitario. Ma questa scienza procede così fecondamente che l'Autore, pur fedele a questo indirizzo, ha dovuto accedere ad una stesura un po' più ampia e da ciò la divisione del volume in due tomi.

L'Autore ha cercato che della revisione approfittasse ogni argomento antico la cui autorità è ancora indiscussa ed ogni argomento nuovo venuto ad assidersi tra quelli della fisica generale e sperimentale.

Così è ancora profondamente rielaborata la fotometria, appaiono i filtri interferenziali e le inomogeneità di fase, quindi i microscopi a contrasto di fase e quelli interferenziali.

La posizione introduttiva dell'elettromagnetismo, quindi la sua struttura metrologica, viene ripresa e ampiamente sviluppata secondo aspetti che hanno costituito oggetto di studi particolari dell'autore; ne risentono le forme consuete delle classiche leggi elementari dell'elettromagnetismo. Malgrado un desiderio vivissimo di farlo, l'autore confessa di non esser riuscito a compiere una esposizione della metrologia dell'elettromagnetismo che si inizi con la corrente elettrica e l'ampère; sa di non essere il solo ad aver trovato insormontabile attualmente questa difficoltà, a superare la quale occorre nei lettori una indipendenza dagli sviluppi classici ancora non acquisita.

Nel ferromagnetismo nuova è la veste e la sostanza di molte pagine; compaiono il ferromagnetismo e l'antiferromagnetismo. Semiconduttori e conseguenti realizzazioni, le nuove mete del microscopio elettronico, il fotomoltiplicatore, il cristallo scintillatore hanno il loro piccolo posto.

Ultimo capitolo è quello dedicato ad un cenno di fisica nucleare. Deve essere una semplice introduzione e l'Autore spera sarà utile anche così ridotta.

Utile allo studioso; questo è stato fin dagli inizi il suo compito.

Il Socio Giovanni Sansone presenta un rapporto del prof. Giuseppe Belardinelli dell'Università di Milano, sulle « Funzioni ipergeometriche di più variabili e la risoluzione analitica delle equazioni algebriche generali », temi questi trattati a varie riprese dallo stesso Belardinelli con ricerche originali interessanti.

Il rapporto costituisce il 145° della collezione iniziata da H. Villat fin dal 1925 e da lui ancora diretta, collezione che per molti argomenti, specialmente quelli pertinenti la matematica classica, rappresenta una preziosa fonte di notizie e riferimenti bibliografici.

Il rapporto del prof. Belardinelli, in cinque capitoli ha appunto questo carattere.

Nei primi tre capitoli sono perspicuamente esposte le proprietà algebriche differenziali e integrali delle funzioni ipergeometriche di una o più variabili e negli ultimi due capitoli sono date al lettore le rappresentazioni analitiche delle radici delle equazioni algebriche mediante integrali multipli ipergeometrici o serie ipergeometriche.

Il prof. Belardinelli, che fa magistralmente il punto sulle questioni trattate, è degno di elogio.

Il Socio Sansone presenta anche la riproduzione in fac–simile del « Formulario Matematico » di Giuseppe Peano con introduzione e note di Ugo Cassina, ordinario di Matematiche Complementari a Milano.

Il prof. Cassina era ben preparato a questo lavoro giacché fin dal 1955 aveva curato la stampa in tre volumi delle Opere scelte di Peano. Il prof. Cassina che appartenne alla scuola di Peano e che è tra i matematici italiani quello che più di ogni altro conosce a fondo l'opera del Maestro, ha premesso al « Formulario », che il polacco E. Stamm nel 1933 giudicò « un'opera classica nella letteratura matematica di ogni secolo », un'ampia introduzione sui caratteri generali e sul contenuto degli otto capitoli.

Il prof. Cassina chiude la sua introduzione con sottili osservazioni su vari punti del « Formulario » e con una serie di note aventi essenzialmente lo scopo di rilevare alcuni errori di stampa del testo. Egli riporta alcune note autografe del Peano segnate in margine o in calce della copia del « Formulario » già in suo possesso e chiarisce e completa alcuni punti del testo con brevi notizie storico–bibliografiche specialmente con richiami ai tomi precedenti del « Formulario » o ad altri lavori di G. Peano.

Al prof. Cassina, che ha lavorato in questi anni con amore di discepolo ed eccezionale competenza alla stampa in quattro volumi delle opere scelte di Peano, all'Unione Matematica Italiana, che promosse la stampa dei primi tre volumi e al Consiglio Nazionale delle Ricerche che contribuì alle relative spese, al Comune di Cuneo che ha voluto contribuire alla stampa del « Formulario » e all'editore P. Cremonese che con passione cura l'editoria matematica, va il cordiale grazie degli studiosi.

Il Socio D'Ancona, anche a nome del Collega Stefanelli e del prof. Aldo Spirito, Direttore della Rivista di Biologia, pubblicata a cura dell'Istituto di Biologia Generale dell'Università di Perugia, presenta il volume speciale, n. 53, stampato dalla suddetta Rivista.

Si tratta del volume giubilare in onore di Giulio Cotronei, nel quale sono stati pubblicati i contributi degli allievi più antichi e più recenti che hanno inteso onorare il loro Maestro nel momento in cui questi lascia ufficialmente l'Università. L'opera, che sarà offerta domani al prof. Cotronei in una simpatica riunione con i suoi discepoli, comprende 22 lavori per circa 500 pagine, che si riferiscono ai più vari campi della Biologia: alla Zoologia, all'Anatomia comparata, alla Medicina. Ciò dimostra quanto vasta e multiforme sia stata l'alta, nobile, serena opera di Giulio Cotronei.

Il Socio Anziano Cassinis, interpretando i sentimenti unanimi dei Colleghi, rivolge al Socio Cotronei un affettuoso saluto e un fervido augurio, ringraziandolo per quanto egli ha fatto a favore della scienza italiana. Prega poi il Socio D'Ancona di rappresentare la Classe, unitamente al Collega Stefanelli, alla riunione che avrà luogo domani in onore dell'illustre Scienziato.

Il Socio Scorza Dragoni presenta il suo volume di « Elementi di analisi matematica » con le seguenti parole:

« Veramente avrei rinunciato a presentare con tanta solennità questo volume di Elementi di analisi matematica, se non avessi desiderato giustificare il mio silenzio di questi anni. La lunghezza del silenzio è forse sproporzionata a quella dell'opera. Ma vorrei ricordare che questo primo volume sarà seguito fra breve da altri due. E poi non bisogna dimenticare che alcuni autori, *immersi in una continua applicazione, pensano, ripensano, aggiungono, cambiano, levano, rimettono, limano, rifondono, fanno, cancellano, consultano; e con tutte queste pene passano forse nove o dieci anni, giusta il precetto di Orazio, prima che il manoscritto sia pubblicato colle stampe.*

« L'immodestia che forse si può ravvisare nel richiamo al nome di Orazio sia compensata dal fatto che le parole che ho lette sono tolte dall'Elogio della pazzia di Erasmo da Rotterdam ».

Il Socio Trevisan presenta l'opera del prof. Ezio Tongiorgi e sua, dal titolo « La Terra », osservando che essa tiene conto soprattutto delle esigenze di chi ha la tendenza spirituale del ricercatore, cioè di colui che non si limita agli aspetti puramente descrittivi di un fenomeno oppure ai risultati di uno studio, ma desidera rendersi conto delle vie e dei metodi mediante i quali si è raggiunta la conoscenza.

Nel presente volume, corredato da un ricco materiale illustrativo che sostituisce l'osservazione diretta, hanno pertanto la prevalenza i metodi di indagine e la trattazione di vari problemi, alcuni dei quali esulano dal campo classico delle scienze geologiche o sono al margine della geologia intesa in senso stretto. Un notevole sviluppo è stato dato alla parte storica e a quella paleontologica, con particolare rilievo ai problemi dell'origine e ai rapporti tra gli avvenimenti del mondo inorganico con l'evoluzione della terra.

Il Socio Trevisan conclude esprimendo la fiducia degli Autori che l'opera possa riuscire utile a chi desidera aggiornare la propria cultura e contribuisca alla formazione di una mentalità naturalistica degli studenti.

Il Socio Anziano Cassinis ringrazia i Colleghi che hanno presentato opere in omaggio.

Il Segretario Accademico presenta le pubblicazioni inviate in dono all'Accademia.

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note per la pubblicazione nei Rendiconti i Soci Giordano, G. B. Dal Piaz, Zagar, Sansone, Vardabasso, Caloi, Segre, Montalenti, Cotronei, Quilico, Picone, Agostinelli, Trevisan.

Viene letto l'elenco delle Note pervenute alla Cancelleria.

Le seguenti Note saranno pubblicate in fascicoli successivi.

Agostinelli C. – Sulla stabilità dei moti magnetofluidodinamici stazionari. Nota II.

RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Socio Margaria, anche a nome dei Colleghi G. Levi e Olivo, legge la relazione sulla Memoria di F. Loreti dal titolo « Reperti ed interpretazioni sui muscoli piramidale e retto dell'addome e sulle relative guaine nell'Uomo ed in alcuni generi tra i Primati, gli Insettivori ed i Chirotteri ».

La relazione, che conclude proponendo la stampa del suddetto lavoro nelle Memorie accademiche, è messa ai voti dal Presidente e approvata all'unanimità.

CONGRESSI

Il Socio Sergi riferisce in merito alla VI Sessione del Congresso Internazionale di Scienze Antropologiche ed Etnologiche, con le seguenti parole:

« Dal 30 luglio al 6 agosto 1960, ha avuto luogo a Parigi la VI Sessione del Congresso Internazionale di Scienze Antropologiche ed Etnologiche. La precedente si era svolta a Filadelfia, nel 1956. Io ebbi l'onore di rappresentare la nostra Accademia dei Lincei insieme con il collega Biasutti.

« Il Congresso fu preceduto il 29 luglio, nella sede della Facoltà di Medicina, dalla celebrazione del Centenario della fondazione della Société d'Anthropologie di Parigi, creata da Paul Broca, il grande e geniale instauratore della antropologia moderna, al quale si deve pure la creazione dell'École d'Anthropologie, subito dopo la fondazione della Société, che divenne il centro internazionale delle ricerche sull'uomo da cui ebbero origine gli svi-

luppi ulteriori delle Scienze Antropologiche nelle loro diverse partizioni. Alla celebrazione presero parte molti fra i più eminenti antropologi viventi, in rappresentanza di Università e Società di Antropologia di tutto il mondo, con calorosi messaggi di saluto e di augurio.

« Il Congresso si svolse a Palais de Chaillot, al Musée de l'Homme, la magnifica istituzione che è vita palpitante dell'idea di Broca, resa possibile da una folla di pionieri che, sulla scia del Maestro, prepararono la sua realizzazione.

« Presidente del Congresso fu Henri Vallois, direttore del Musée de l'Homme, l'insigne antropologo al quale spetta il merito di avere unificato e coordinato, con la sua formidabile attività di studioso versatile e appassionato, tutte le istituzioni che in origine erano state create dagli antesignani più illustri dell'antropologia in Francia, spesso anche in contrasto fra loro.

« La guida autorevole del Vallois è valsa ad organizzare il Congresso con l'armonico complesso dei vari centri di studio dedicati alle Scienze Antropologiche a Parigi. Segretari generali del Congresso sono stati Leroi Gourhan, professore di preistoria alla Sorbonne, Champion, vicedirettore del Musée de l'Homme. Quali vicepresidenti furono nominati: Alcobè (Spagna), Czekanowski (Polonia), Forde (Regno Unito), Herskovitz (Stati Uniti), Koppers (Austria), Jensen (Germania), Sauter (Svizzera), Sergi (Italia), Stoltov (Unione Sovietica). Più di 1000 furono i partecipanti al Congresso, più di 600 le comunicazioni svolte e 63 i paesi rappresentati.

« L'apertura solenne del Congresso si svolse nel grande anfiteatro della Sorbona, presenti le Autorità del governo francese, con il discorso del presidente Vallois. Seguirono le allocuzioni dei delegati stranieri, tra le quali quella del Sergi che pose in risalto il significato della partecipazione ufficiale, per la prima volta, delle nuove nazioni africane indipendenti ad un convegno internazionale di antropologi ed etnologi per trattare insieme, alla pari, i problemi che riguardano gli attributi fisici, mentali e sociali dell'uomo ed indagare sulle caratteristiche etniche che lo distinguono in multiformi varietà, ma tutte quali esponenti del patrimonio umano. Straordinario incontro di studiosi appartenenti alle più diverse genti di ogni continente, che potrà servire a favorire la reciproca comprensione dei popoli e la loro armonica convivenza.

« Il programma di lavoro del Congresso sta a dimostrare con il suo contenuto la estensione vastissima dei problemi in discussione. I gruppi delle comunicazioni erano distinti in due grandi sezioni.

« I – ANTROPOLOGIA divisa in quattro sottosezioni: 1) antropologia morfologica, 2) antropologia fisiologica, 3) le razze e le popolazioni, 4) la paleoantropologia e l'origine dell'uomo.

« II – ETNOLOGIA divisa in undici sottosezioni: 1) etnologia generale e strutture sociali, 2) etnologia archeologica e preistorica, 3) tecnologia, 4) vita materiale ed economica, 5) etnobotanica, 6) etnolinguistica, 7) etnomusicologia, 8) arti e danza, 9) etnologia giuridica, 10) religione, 11) etnopsicologia e medicina. Una sezione particolare fu dedicata alla Museologia per

la conservazione e l'ordinamento del materiale che occorre raccogliere e conservare gelosamente, mentre ogni giorno vanno scomparendo gli elementi che forniscono la documentazione del processo di trasformazione delle società umane e, quindi, della storia della civiltà. La trattazione di alcuni argomenti generali si svolse in riunioni speciali dove si incontrarono i cultori interessati ai temi in discussione, così per la standardizzazione delle misure antropometriche, per i problemi della etnogenesi, per i giuochi, per i nuovi sincretismi religiosi, per gli alimenti e le bevande rituali, per le culture in via di sparizione ecc.

« A cura del Comitato Internazionale del Film etnografico e sociologico furono organizzate proiezioni permanenti di film etnografici e sociologici nella sala del cinema del Musée de l'Homme, tre volte al giorno. Contemporaneamente furono discussi programmi di ricerche di documentazione e diffusione del film in questione.

« Due relazioni generali furono svolte successivamente in due sedute plenarie: una di antropologia dal prof. Debetz (Mosca): *Aspetti della trasformazione del cranio dell'Homo sapiens* ed una di etnologia dal prof. Melville Herskovitz (Evaston): *L'umanismo nelle scienze dell'uomo*. Più di 30 italiani si erano iscritti con le loro comunicazioni e una ventina di essi le presentarono e discussero nelle diverse sezioni del Congresso sia per l'antropologia che per la etnologia. Alcuni dei relatori italiani furono chiamati alla presidenza delle rispettive sezioni.

« Impossibile seguire e riassumere in breve il lavoro compiuto. Un volume di estratti a parte dei riassunti delle comunicazioni fu distribuito all'apertura del Congresso: esso costituisce la completa documentazione del contenuto e della estensione della enciclopedica materia trattata.

« Nell'assemblea generale di chiusura del Congresso, il 6 di agosto, fu deliberato di tenere a Mosca nel 1964 la prossima sessione, la VII, e per la sua organizzazione furono nominati: Presidente, il prof. S. P. Tolstov (Istituto di Etnografia, Accademia delle Scienze di Mosca), Segretari generali, il prof. G. F. Debetz (Istituto di Etnografia, Accademia delle Scienze di Mosca) e il prof. V. P. Jakimov (Istituto di Antropologia, Università di Mosca) ».

Il Socio Anziano Cassinis ringrazia vivamente il Collega Sergi e si rallegra per i risultati ottenuti dal Convegno.

COMUNICAZIONI VARIE

Il prof. Cassinis comunica che l'Associazione «Atoms for Peace Award» di Cambridge (Mass.) ha invitato l'Accademia a designare nomi di studiosi che essa giudichi degni dei Premi istituiti dalla predetta Associazione, che fu fondata in memoria di Henry ed Edsel Ford. Di tali Premi, quello del 1957, fu assegnato a Niels Bohr e quello del 1959 a George de Hevesy, entrambi

Soci Stranieri dei Lincei. La richiesta fu presentata alla Classe di Scienze Fisiche nella seduta di giugno, ma non venne adottata alcuna decisione in proposito.

Il Socio Anziano Cassinis prega pertanto i Colleghi di voler far pervenire alla Presidenza le loro eventuali proposte per candidati ai suddetti Premi.

Dà infine notizia del Convegno Nazionale su « I problemi medici e sociali dell'utilizzazione del minorato » che avrà luogo presso l'Università di Napoli dall'11 al 13 marzo 1961.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 10 dicembre 1960

BELARDINELLI Giuseppe. — *Fonctions hypergéométriques de plusieurs variables et résolution analytique des équations algébriques générales.* Paris, Gauthier-Villars Éditeur-Imprimeur-Libraire, 1960. Pp. 74, in-8° (Mémorial des Sciences Mathématiques, fasc. CXLV).

CASSINA Ugo. — Vedi: PEANO Giuseppe.

HAUTOT A. — *Inventaire des travaux menés dans le champ de la photographie scientifique au Laboratoire de Physique Générale de l'Université de Liège. Recherches exécutées sous les auspices de l'Institut pour l'Encouragement de la Recherche Scientifique dans l'Industrie et l'Agriculture.* Louvain, Établissements Ceuterick, 1958. Pp. 380, in-8°, con figg.

International Geophysical Year and Cooperation in Czechoslovakia 1957–1959. Praha, Nakladatelství Československé Akademie Věd, 1960. Pp. 270, in-8°, con figg.

KOUŘIMSKÝ Jiří. — *Mineralogické sbírky Národního Musea.* Praha, 1959. Pp. 75, in-8°, con tavv.

PEANO Giuseppe. — *Formulario Mathematico.* Riproduzione in fac-simile dell'edizione originale. Con introduzione e note di Ugo Cassina e col contributo del Comune di Cuneo. Roma, Edizioni Cremonese, 1960. Pp. XVIII–XXXVI–465, in-8°, con tavv.

PERUCCA Eligio. — *Fisica generale e sperimentale.* Vol. II: *Ottica-Elettricità e Magnetismo.* T. I e II. Settima edizione interamente riveduta. Torino, Unione Tipografico-Editrice Torinese, 1960. Voll. 2, in-8°, con figg.

Rivista di Biologia. Già redatta da Osvaldo Polimanti. Pubblicata a cura dell'Istituto di Biologia Generale dell'Università di Perugia. Diretta da Aldo Spirito. Vol. LIII (n.s. vol. XIII), 1960 (Volume Giubilare in onore di Giulio Cotronei).

ROGLIANO Giuseppe. — *Geognosia delle strade della regione delimitata dal torrente Coriglianeto e dal fiume Trionto con cenni etnografici sulla città di Rossano.* Cosenza, Tipografia-Linotypia Eredi Serafino, 1960. Pp. 97, in-8°.

RYAN C. W. — *A Guide to the Known Minerals of Turkey...* Reprint, April 1960. Ankara, Mineral Research and Exploration Institute of Turkey and The Office of International Economic Cooperation Ministry of Foreign Affairs in cooperation with the U. S. Operation Missions to Turkey International Cooperation Administration, 1960. Pp. VIII–196, in-8°, con tavv.

SCORZA DRAGONI Giuseppe. — *Elementi di analisi matematica.* Vol. I: *Elementi di algebra.* Padova, CEDAM (Casa Editrice Dott. Antonio Milani), 1961. Pp. 581, in-8°.

ŠTĚPÁNEK Otakar. — *Zoologické sbírky Národního Musea.* Praha, 1960. Pp. 87, in-8°, con tavv.

TONGIORGI Ezio. — Vedi: TREVISAN Livio e TONGIORGI Ezio.

TREVISAN Livio e TONGIORGI Ezio. — *La terra.* Torino, Unione Tipografico-Editrice Torinese, 1958. Pp. XII–730, in-8°, con figg.

A. SIGNORINI e G. COTRONEI

ERRATA CORRIGE

Nella Nota di I. W. Bassi dal titolo: « Struttura di alcuni polivinilalchileteri isotattici cristallini », pubblicata nel fasc. 3–4, vol. XXIX (Ferie 1960), pp. 193–200, la didascalia relativa alla Tabella II:

Riflessioni presenti nello spettro di fibra del polivinilisopropiletere

$$\left(\zeta = \frac{\lambda l}{c}\,\text{Å}^{-1} \;\; ; \;\; \xi = \frac{\lambda}{d}\,\text{Å}^{-1} \;\; ; \;\; \text{Cu , K}\alpha\right),$$

va sostituita con la seguente:

« Riflessioni presenti nello spettro di fibra del polivinilisopropiletere. (Le coordinate ζ e ξ dei punti del reticolo reciproco sono espresse in unità λ/d ; Cu, Kα) ».

INDICI DEL VOLUME

INDICE PER AUTORI

A

AGNOLI G. A. e COTTI E., La propagazione nel miocardio ventricolare del cuore di coniglio, *130*.

AGOSTINELLI C., Sulle superficie d'onda in magnetofluidodinamica. Nota II, *3*.

— Sulla stabilità dei moti magnetofluidodinamici stazionari. Nota I, *477*.

ALIETTI A., Ricerche cristallografiche e termodifferenziali sul seleniato e sul cromato di sodio decaidrati. *95*.

ARENA M., Anatomia comparata di alcuni organi vegetativi di *Abies Nebrodensis* (Lojac.) Mattei e *Abies Alba* Mill. *586*.

ATZENI A., Contributo alla conoscenza della serie paleozoica metamorfica nel settore del Gennargentu, *566*.

AURICCHIO F., vedi BRESCIANI F.

B

BAFFONI G. M., Osservazioni sui neuroni secretorî del cerebro e dei ganglî ventrali di un Ortottero (*Gryllotalpa gryllotalpa* L.), *400*.

BALLARIO M. C., Sui fattori di correzione per il passaggio da area apparente ad area corretta dei brillamenti cromosferici in radiazione di idrogeno, *330*.

BASSI I. W., Struttura di alcuni polivinilalchileteri isotattici cristallini, *193*.

BERNINI L., CARCASSI U., LATTE B., MOTULSKY A. G., ROMEI L. e SINISCALCO M., Indagini genetiche sulla predisposizione al favismo. – III. Distribuzione delle frequenze geniche per il locus *Gd* in Sardegna. Interazione con la malaria e la talassemia al livello popolazionistico, *115*.

BERTOLINI B., Lamelle annulate negli spermatozoi immaturi del rospo (*Bufo bufo* (L.)), *141*.

BORDONI U., vedi TESTA C.

BORELLO E., vedi DI MODICA G.

BRACCHI F., CATTORINI M. e GUALTIEROTTI T., Distribuzione della frequenza di scarica della singola fibra del sistema muscolare dell'uomo durante contrazioni isometriche massimali, *604*.

BRESCIANI F. e AURICCHIO F., Azione delle radiazioni ionizzanti sul contenuto in potassio, sodio e acqua del fegato di ratto e delle sue frazioni cellulari, *431*.

C

CAGLIOTI L. e CAINELLI G., Idroborazione. Reazione del diborano con il Δ^4-3-chetocolestene. Nota I, *555*.

— —MINUTILLI F., Isolamento di un nuovo acido triterpenico dalle sanse dell'*Olea europaea*, *544*.

CAINELLI G., vedi CAGLIOTI L.

CALOI P., L'effetto della firmo-viscosità sulla risultante del movimento associato alle onde di Rayleigh, *485*.

CAMBI L. e DUBINI PAGLIA E., Monocloruri e ipocloruri idrazinici di Rh^{III}. Nota V, *488*.

— — e GIUFFRIDA C., Alogenuri idrazinici di Rh. – II Parte. Cloruri paramagnetici. *8*.

— — Complessi idrazinici del rodio: cianuri idrazinici, *15*.

— — Ioduri idrazinici e cianuri derivati di Rh^{III}. Nota IV, *253*.

CARAMAN P., La différentiabilité des représentations quasi conformes tridimensionelles, *181*.

CARBONARO A., vedi NATTA G.

CARCASSI U., vedi BERNINI L.

CAUZZO G., MAZZUCATO U. e FOFFANI A., Cinetica di idrolisi di amidi N-sostituite. – Parte III: Benzanilide e derivati para-sostituiti, *348*.

CERLETTI P. e DE RITIS G., Ricerche sulla membrana degli eritrociti – I. Effetto del K^+ e di altri ioni sull'isolamento delle membrane e sull'attività adenilato chinasica, *81*.

Ciampelli F., vedi Natta G.

Cicala P. Teoria lineare della parete sottile e applicazioni, *232*.

Cinquini S., Sopra il problema dell'approssimazione delle curve in forma parametrica e degli integrali, *515*.

Cita M. B. e Elter G., La posizione stratigrafica delle marne a Pteropodi delle Langhe e della Collina di Torino ed il significato cronologico del Langhiano, *360*.

Corazza R. e Parmeggiani P. L., Modificazioni dei ritmi pulsatori dell'ippocampo e del *neocortex* provocate dalla stimolazione elettrica ripetitiva del nervo ischiatico, *412*.

— — Relazioni elettrofisiologiche tra ippocampo e neocortex, *609*.

Corradini P., vedi Natta G.

Cotti E. vedi Agnoli G. C.

Covelli I., vedi Roche J.

Crepax P. e Fadiga E., Eccitamenti afferenti e manifestazioni parossistiche corticocerebrali in Cani non predisposti alla epilessia riflessa e trattati con morfina, *405*.

D

D'Amico C., Gazzi P., Pellizzer R. e Simboli G., Notizie geologiche e petrografiche sui terreni eruttivi e metamorfici rilevati nel foglio Dorgali (Sardegna Orientale) *201*.

Dente M., Scambio termico per fluidi non–Newtoniani in moto laminare in condotti circolari. – I. scambio termico per temperatura della parete costante. Parte I, *52*.

— Scambio termico per fluidi non–Newtoniani in moto laminare in condotti circolari. – I. Scambio termico per temperatura della parete costante. Parte II, *186*.

— Scambio termico per fluidi non–Newtoniani in moto laminare in tubi circolari. – II. Scambio termico per variabile temperatura della parete variabile, *336*.

De Ritis G., vedi Cerletti P.

De Stefano F. vedi Livrea G.

De Vito L., Sulla equazione integro–differenziale di tipo ellittico di Volterra, *289*.

Di Modica G., Rossi P. F., Rivero A. M. e Borello E., Su componenti flavonoidi isolati da *Taxus baccata* L. Nota III, *74*.

Dubini Paglia E., vedi Cambi L.

Durand Delga M., Le sillon géosynclinal du Flysch tithonique–néocomien en Méditerranée occidentale, *579*.

E

Elter G., Osservazioni preliminari sull'età dei terreni preoligocenici del Monferrato, *573*.

— vedi Cita M. B.

Elter P., Giannini E., Tongiorgi M. e Trevisan L., Le varie unità tettoniche della Toscana e della Liguria orientale, *497*.

F

Fadiga E., vedi Crepax P.

Fasella P., vedi Rossi–Fanelli A.

Federici L., vedi Ghiani P.

Ferrarese G., Su di un sistema di equazioni differenziali ordinarie singolari riguardante l'equilibrio di una massa stellare, *170*.

Ferro R. Ricerche sulle leghe dei metalli nobili con gli elementi più elettropositivi. – IV. Le fasi gamma dei sistemi magnesio-rodio e magnesio-palladio, *70*.

Fichera G., Teorema di massimo modulo e unicità delle soluzioni generalizzate dei problemi al contorno, *503*.

Finzi P. V., vedi Piozzi F.

Foffani A., Mazzucato U. e Miotti U., Spettri vibrazionali di alcuni tiocianati ed isotiocianati aril–alchilici, *355*.

Foffani A., vedi Cauzzo G.

Foias C. e Gussi G., Un théorème d'unicité de la solution du problème de Cauchy pour certains systèmes d'equations linéaires aux dérivées partielles, *509*.

Franceschetti B., Nuove osservazioni sulla geologia della regione montuosa posta a nord della Stura di Demonte fra Pietraporzio e Bersezio (Alpi Marittime), *87*.

Fresa A., Fotometria fotoelettrica nella penombra durante l'eclisse di luna del 24 marzo 1959, *46*.

G

Gaudiosi M. R. e Sacchi C. F., Sul significato ecologico dell'azoto conchigliare nell'Elicide dunicola *Euparypha pisana* (Müll.), *634*.

Gazzi P., vedi D'Amico C.
Ghiani P. e Federici L., Sulla citologia del pancreas endocrino nei Teleostei. Ricerche sperimentali in *Gambusia holbrooki* Grd, *639*.
Ghigi A., Commemorazione del Socio Umberto Pierantoni, *645*.
Ghiretti F., vedi Tosi L.
Giannini E., vedi Elter P.
Giuffrida C., vedi Cambi L.
Gogonea S., vedi Pascali D.
Gramuglio G., Appunti sulla distribuzione geografica dell'*Abies nebrodensis* (Lojac.) Mattei, *106*.
Graziadei P., Primi dati sul corredo nervoso del labbro orale di *Sepia officinalis*, *398*.
— Particolari nuovi sulla struttura dell'apparato nervoso destinato alla ventosa di *Ommatostrephes sagittatus*, *597*.
Grioli G., Onde di discontinuità ed elasticità asimmetrica, *309*.
Gulì E., Sulle necrosi encefaliche tardive da Roentgenirradiazione nell'uomo, *627*.
Gussi G., vedi Foias C.

I

Iandelli A., Su alcuni composti intermetallici e semimetallici del Gadolinio, *62*.
Imbò G., Coefficienti di viscosità del Magma Vesuviano e sue variazioni nel periodo storico, *248*.
Ipata P. L., vedi Rossi-Fanelli A.

K

Kósa A., Nuove ricerche di calcolo delle variazioni basate sul concetto di punti di concentrazione dovuto al Picone, *295*.
Kranjc A., La linea centrale di un'eclisse totale di Sole in quota, *539*.

L

Latte B., vedi Bernini L.
La Vecchia A., vedi Poli G.
Livrea G. e De Stefano F., L'attitudine fagocitaria ed il comportamento citochimico dei leucociti essudati in peritoneo nel corso del digiuno prolungato e della malnutrizione calorica, *424*.
— e Ricceri G., Il comportamento delle attività transaminasiche del cuore e di alcuni altri organi del colombo bradicardico per inanizione assoluta o per malnutrizione orizanica, *381*.
Longinelli A., Distribuzione dell'uranio in alcuni calcari metamorfici di contatto presso Campiglia, *370*.
Lorenzi G. P., vedi Pino P.

M

Marchetti A., vedi Rossi-Fanelli A.
Marchi E., Sul moto uniforme turbolento delle correnti liquide. Nota I, *313*.
— Sul moto uniforme turbolento delle correnti liquide. Nota II, *521*.
Marcus S., Sur un problème de Z. Zahorski concernant les points où la dérivée est infinie, *176*.
Marini M., Prime osservazioni sull'ultrastruttura dell'epitelio branchiale in larve di Anfibî urodeli, *448*.
Mazzucato U., vedi Cauzzo G.
— vedi Foffani A.
Meletti P., Risultati di alcune prove di allevamento di piante di grano provenienti da cariossidi immature, *393*.
Merli L., Un teorema di unicità per il problema di Cauchy relativo alla equazione differenziale $x^{(n)} + a_1(t)\,x^{(n-1)} + \cdots + a_n(t)\,x = f(t, x, x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots x^{(n-1)})$, 299.
Merucci P., Vella L. e Zampieri A., Sulla attività emolitica della O-streptolisina, *221*.
Minutilli F., vedi Caglioti L.
Miotti U., vedi Foffani A.
Motulsky A. G., vedi Bernini L.
Muggia A., Regione di arresto per un solido di rotazione a prora schiacciata in corrente ipersonica assiale, *38*.
Muzii E., Nuove possibilità di studio del ricambio strutturale del tessuto osseo con ossitetraciclina, *444*.

N

Natta G., Porri L. e Carbonaro A., Complesso cristallino organometallico contenente alluminio e cobalto avente proprietà catalitiche stereospecifiche, *491*.
— — Corradini P., Zanini G. e Ciampelli F., Polimeri 1,4 *trans* isotattici del pentadiene 1,3, *257*.
Nobile V., Sul calcolo delle orbite planetarie. Nuova impostazione del problema

e determinazione diretta della soluzione unica che questo ammette. Nota II, *244*.

P

Parmeggiani P., vedi Corazza R.

Pascali D. e Gogonea S., Sur la monogénéité dans l'espace, *283*.

Pellizzer R., vedi D'Amico C.

Pinacci R., L'andamento dell'attività mitotica nel mielencefalo di un Anfibio anuro durante lo sviluppo, *150*.

Pino P., Lorenzi G. P. e Previtera S., Polimeri vinilici otticamente attivi. – III. Poli [(S.)–2–Metil–butil]–vinil–etere, *562*.

Piozzi F. e Vita–Finzi P., Gascromatografia di idrocarburi fenantrenici, *549*.

Poli G., Rivolta B. e La Vecchia A., Comportamento elettrodico di monocristalli di antimonio, *345*.

Porri L., vedi Natta G.

Previtera S., vedi Pino P.

Proverbio E., Sul calcolo d'orbita di stelle doppie a lungo periodo tenendo conto della legge delle aree, *532*.

R

Ricceri G., vedi Livrea G.

Rivero A. M., vedi di Modica G.

Rivolta B., vedi Poli G.

Roche J., Covelli I. e Salvatore G., Penetrazione e metabolismo degli ormoni tiroidei nelle cellule isolate di adenocarcinoma Ehrlich–ascite, *614*.

Romei L., vedi Bernini L.

Rosati L. A., Su una generalizzazione dei piani di Hughes, *303*.

Rossi A., Lo sviluppo del tubo neurale in code di embrioni di Anfibi anuri privati della corda dorsale. (Esperienze in *Bufo bufo* ed in *Rana esculenta*), *136*.

— Esperienze di asportazione dell'ependima presuntivo in embrioni di Anfibi anuri, *438*.

Rossi P. F., vedi Di Modica G.

Rossi–Fanelli A., Ipata P. L., Fasella P. e Marchetti A., Sintesi biologica della trifosfotiamina: sintesi ad opera del *Mycobacterium* Milch, *22*.

Russo–Caia S., Aspetti biochimici della metamorfosi degli Insetti. L'acido ribonucleico durante lo sviluppo larvale e la metamorfosi di *Musca domestica*, *215*.

Russo–Caia S., Aspetti biochimici della metamorfosi degli Insetti. L'acido desossiribonucleico durante lo sviluppo larvale e la metamorfosi di *Musca domestica* L., *630*.

S

Sacchi C. F., vedi Gaudiosi M. R.

Salvatore G., vedi Covelli I.

Savelli R., I clorocromoplasti, *162*.

— Fruttificazione allo stato di plantula in *Chenopodium amaranticolor*, e considerazioni sulla pedogenesi, neotenia e fenomeni affini, *277*.

Segre B., Intorno al numero degli zeri di un polinomio nel campo reale. Nota I, *155*.

— Intorno al numero degli zeri di un polinomio nel campo reale. Nota II, *225*.

— Intorno al numero degli zeri di un polinomio nel campo reale. Nota III, *465*.

Simboli G., vedi D'Amico C.

Singer I., Sur la représentation intégrale des applications linéaires continues des espaces L_L^p $(1 \leq p < +\infty)$, *28*.

Siniscalco M., vedi Bernini L.

Sotgiu M. L. e Zuddas A. A., Modificazione dell'ampiezza del potenziale d'azione della singola fibra muscolare e nella tensione dell'intero muscolo in rapporto alla frequenza di stimolazione del nervo, *418*.

Stagni A., vedi Vannini E.

Supino G., Sopra le onde di traslazione nei canali. – *A*) La equazione linearizzata. Nota I, *239*.

— Sopra le onde di traslazione nei canali. – A) La equazione linearizzata. Nota II, *472*.

T

Terracina F., Sui problemi di meccanica delle terre relativi alla Torre di Pisa e su un modo per stabilizzare la Torre stessa, *321*.

Testa C. e Bordoni U., Le lesioni del labirinto nelle rane sottoposte a centrifugazione, *600*.

Thermes G., Derivazione di elementi nervosi da cellule di natura mesodermica nella rigenerazione del cordone nervoso dei Lombricidi (*Allolobophora caliginosa* ed *Allolobophora rosea*), *145*.

TONGIORGI M., Appunti sulle conoscenze attuali della stratigrafia neogenica toscana *377*.

— vedi ELTER P.

TOSI L. e GHIRETTI F., Determinazione del potenziale di ossido riduzione del citocromo *h* di *Cryptomphalus aspersus*, *104*.

— — Ulteriori ricerche sugli enzimi respiratori di gasteropodi marini e terrestri. Proprietà del citocromo *h*, *207*.

TREVISAN L., L'ambiente di formazione della « Scaglia rossa » toscana, *265*.

- vedi ELTER P.

TROTTER A., Singolari caratteri di alcune specie e varietà di *Alternanthera* (Amarantacee) e di altre Fanerogame, *268*.

V

VANNINI E. e STAGNI A., Sulla localizzazione perivasale di una cospicua riserva di neoblasti in *Spirorbis pagenstecheri*, *126*.

VELLA L., vedi MERUCCI P.

VOLTERRA E., Influenza del taglio nella dinamica e nella statica delle piastre sottili. Nota II, *33*.

Z

ZAMPIERI A., vedi MERUCCI P.

ZANINI G., vedi NATTA G.

ZUDDAS A. A., vedi SOTGIU M. L.

INDICE PER MATERIE

A

Aerodinamica. — Regione di arresto per un solido di rotazione a prora schiacciata in corrente ipersonica assiale, MUGGIA A., *38*.

Analisi funzionale. — Sur la représentation intégrale des applications linéaires continues des espaces L_F^p $(1 \leq p < +\infty)$, SINGER I., *28*.

Analisi matematica. — La différentiabilité des représentations quasi-conformes tridimensionnelles, CARAMAN P., *181*.

— Sopra il problema dell'approssimazione delle curve in forma parametrica e degli integrali, CINQUINI S., *515*.

— Sulla equazione integro-differenziale di tipo ellittico di Volterra, DE VITO L., *289*.

— Su di un sistema di equazioni differenziali ordinarie singolari riguardante l'equilibrio di una massa stellare, FERRARESE G., *170*.

— Teoremi di massimo modulo e unicità delle soluzioni generalizzate dei problemi al contorno, FICHERA G., *503*.

— Un théorème d'unicité de la solution du problème de Cauchy pour certains systèmes d'equations linéaires aux dérivées partielles, FOIAS C. e GUSSI G., *509*.

— Nuove ricerche di calcolo delle variazioni basate sul concetto di punti di concentratrazione dovuto al Picone, KÓSA A., *295*.

— Sur un problème de Z. Zahorski concernant les points où la dérivée est infinie, MARCUS S., *176*.

— Un teorema di unicità per il problema di Cauchy relativo alla equazione differenziale $x^{(n)} + a_1(t)\,x^{(n-1)} + \cdots + a_n(t)\,x = f(t, x, x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(n-1)})$, MERLI I., *299*.

Anatomia e Istologia patologica. — Sulle necrosi encefaliche tardive da Roentgenirradiazione nell'uomo, GULI E., *627*.

Astrofisica. — Sui fattori di correzione per il passaggio da area apparente ad area corretta dei brillamenti cromosferici in radiazione di idrogeno, BALLARIO M. C., *330*.

Astronomia. — Fotometria fotoelettrica nella penombra durante l'eclisse parziale di luna del 24 marzo 1959, FRESA A., *46*.

— La linea centrale di un'eclisse totale di Sole in quota, KRANJC A., *539*.

— Sul calcolo delle orbite planetarie. Nuova impostazione del problema e determinazione diretta della soluzione unica che questo ammette. Nota II, NOBILE V., *244*.

— Sul calcolo d'orbita di stelle doppie a lungo periodo tenendo conto della legge delle aree, PROVERBIO E., *532*.

B

Biochimica. — Sintensi biologica della trifosfotiamina: sintesi ad opera del *Mycobacterium* Milch, ROSSI-FANELLI A., IPATA P. L., FASELLA P. e MARCHETTI A., *22*.

— Determinazione del potenziale di ossido riduzione del citocromo *h* di *Cryptomphalus aspersus*, TOSI L. e GHIRETTI F., *104*.

— Ulteriori ricerche sugli enzimi respiratori di gasteropodi marini e terrestri. Proprietà del citocromo *h*. TOSI L. e GHIRETTI F., *207*.

Biologia. — Lamelle annulate negli spermatozoi immaturi del rospo (*Bufo bufo* (L.)), BERTOLINI B., *141*.

— Sul significato ecologico dell'azoto conchigliare nell'Elicide dunicola *Euparypha pisana* (Müll.), GAUDIOSI M. R. e SACCHI C. F., *634*.

— Sulla citologia del pancreas endocrino nei Teleostei. Ricerche sperimentali in *Gambusia holbrooki* Grd., GHIANI P. e FEDERICI L. *639*.

— Prime osservazioni sull'ultrastruttura dell'epitelio branchiale in larve di Anfibî urodeli, MARINI M., *448*.

Biologia. — Sulla attività emolitica della O-streptolisina, MERUCCI P., VELLA L. e ZAMPIERI A. *221.*

— Nuove possibilità di studio del ricambio strutturale del tessuto osseo con ossitetraciclina, MUZII E., *444.*

— L'andamento dell'attività mitotica nel mielencefalo di un Anfibio anuro durante lo sviluppo, PINACCI R., *150.*

— Lo sviluppo del tubo neurale in code di embrioni di Anfibi anuri privati della corda dorsale. (Esperienze in *Bufo bufo* ed in *Rana esculenta*), ROSSI A., *136.*

— Esperienze di asportazione dell'ependima presuntivo in embrioni di Anfibî anuri, ROSSI A., *438.*

— Aspetti biochimici della metamorfosi degli Insetti. L'acido ribonucleico durante lo sviluppo larvale e la metamorfosi di *Musca domestica* L., RUSSO-CAIA S., *215.*

— Aspetti biochimici della metamorfosi degli Insetti. L'acido desossiribonucleico durante lo sviluppo larvale e la metamorfosi di *Musca domestica* L., RUSSO-CAIA S., *630.*

— Derivazione di elementi nervosi da cellule di natura mesodermica nella rigenerazione del cordone nervoso dei Lombricidi (*Allolobophora caliginosa* ed *Allolobophora rosea*), THERMES G., *145.*

Botanica. — Anatomia comparata di alcuni organi vegetativi di *Abies Nebrodensis* (Lojac.) Mattei e *Abies alba* Mill., ARENA M., *586.*

— Appunti sulla distribuzione geografica dell'*Abies nebrodensis* (Lojac.) Mattei, GRAMUGLIO G., *106.*

— Risultati di alcune prove di allevamento di piante di grano provenienti da cariossidi immature, MELETTI P., *393.*

— Fruttificazione allo stato di plantula in *Chenopodium amaranticolor*, e considerazioni sulla pedogenesi, neotenia e fenomeni affini, SAVELLI R., *277.*

— Singolari caratteri di alcune specie e varietà di *Alternanthera* (Amarantacee) e di altre Fanerogame, TROTTER A., *268.*

C

Chimica. — Cinetica di idrolisi di amidi N-sostituite. – Parte III. Bensanilide e derivati para-sostituiti, CAUZZO G., MAZZUCCATO U. e FOFFANI A., *348.*

Chimica. — Spettri vibrazionali di alcuni tiocianati ed isotiocianati aril-alchilici, FOFFANI A., MAZZUCATO U. e MIOTTI U., *355.*

— Su alcuni composti intermetallici e semimetallici del Gadolinio, IANDELLI A., *62.*

— Complesso cristallino organometallico contenente alluminio e cobalto avente proprietà stereospecifiche, NATTA G., PORRI L. e CARBONARO A., *491.*

— Polimeri 1,4 *trans* isotattici del pentadiene 1,3. NATTA G., PORRI L., CORRADINI P., ZANINI G. e CIAMPELLI F., *257.*

— Polimeri vinilici otticamente attivi. – III. Poli [(S)-2-Metil-butil]-vinil-etere, PINO P., LORENZI G. P. e PREVITERA S., *562.*

Chimica biologica. — Ricerche sulla membrana degli eritrociti. – I. Effetto del K^+ e di altri ioni sull'isolamento delle membrane e sull'attività adenilato chinasica, CERLETTI P. e DE RITIS G., *81.*

— Il comportamento delle attività transaminasiche del cuore e di alcuni altri organi del colombo bradicardico per inanizione assoluta o per malnutrizione orizanica, LIVREA G. e RICCERI G., *381.*

Chimica fisica. — Struttura di alcuni polivinilalchileteri isotattici cristallini, BASSI I. W., *193*

Chimica inorganica. — Complessi idrazinici del rodio: cianuri idrazinici, CAMBI L. e DUBINI PAGLIA E., *15.*

— Ioduri idrazinici e cianuri derivati di Rh^{III}. Nota IV, CAMBI L. e DUBINI PAGLIA E., *253.*

— Monocloruri e ipocloruri idrazinici di Rh^{III}. Nota V, CAMBI L. e DUBINI PAGLIA E., *488.*

– Alogenuri idrazinici di Rh. – II Parte. Cloruri paramagnetici, CAMBI L., DUBINI PAGLIA E. e GIUFFRIDA C., *8.*

— Ricerche sulle leghe dei metalli nobili con gli elementi più elettropositivi. – IV. Le fasi gamma dei sistemi magnesio-rodio e magnesio-palladio, FERRO R., *70.*

Chimica organica. — Idroborazione. – Reazione del diborano con il Δ^4-3-chetocolestene. Nota I, CAGLIOTI L. e CAINELLI G., *555.*

— Isolamento di un nuovo acido triterpenico dalle sanse dell'*Olea europaea*, CAGLIOTI L., CAINELLI G. e MINUTILLI F., *544.*

— Su componenti flavonoidi da *Taxus baccata* L. Nota III, DI MODICA G., ROSSI P. F., RIVERO A. M. e BORELLO E., *74.*

Chimica organica. — Gascromatografia di idrocarburi fenantrenici, PIOZZI F. e VITA-FINZI P., *549*.

Citologia vegetale. — I clorocromoplasti, SAVELLI R., *162*.

Commemorazioni. — Commemorazione del Socio Umberto Pierantoni, GHIGI A., *645*.

Comunicazioni varie, *456*, *656*.

Congressi, *654*.

E

Elettrochimica. — Comportamento elettrodico di monocristalli di antimonio, POLI G., RIVOLTA B. e LA VECCHIA A., *345*.

F

Fisica. — Scambio termico per fluidi non-Newtoniani in moto laminare in condotti circolari. – I. Scambio termico per temperatura della parete costante. Parte I, DENTE M., *52*.

— Scambio termico per fluidi non-Newtoniani in moto laminare in condotti circolari. – I. Scambio termico per temperatura della parete costante. Parte II. DENTE M., *186*.

— Scambio termico per fluidi non-Newtoniani in moto laminare in tubi circolari. – II. Scambio termico per variabile temperatura della parete, DENTE M., *336*.

Fisica matematica. — Onde di discontinuità ed elasticità asimmetrica, GRIOLI G., *309*.

Fisiologia. — La propagazione dell'eccitamento nel miocardio ventricolare del cuore di coniglio, AGNOLI G. C. e COTTI E., *130*.

— Distribuzione della frequenza di scarica della singola fibra del sistema muscolare dell'uomo durante contrazioni isometriche massimali, BRACCHI F., CATTORINI M. e GUALTIEROTTI T., *604*.

— Modificazioni dei ritmi pulsatori dell'ippocampo e del *neocortex* provocate dalla stimolazione elettrica ripetitiva del nervo ischiatico, CORAZZA R. e PARMEGGIANI P.L. *412*.

— Relazioni elettrofisiologiche tra ippocampo e *neocortex*, CORAZZA R. e PARMEGGIANI P. L., *609*.

— Eccitamenti afferenti e manifestazioni parossistiche corticocerebrali in Cani non predisposti alla epilessia riflessa e trattati con morfina, CREPAX P. e FADIGA E., *405*.

Fisiologia. — Modificazione dell'ampiezza del potenziale d'azione della singola fibra muscolare e nella tensione dell'intero muscolo in rapporto alla frequenza di stimolazione del nervo, SOTGIU M. L. e ZUDDAS A. A., *418*.

— Le lesioni del labirinto nelle rane sottoposte a centrifugazione, TESTA C. e BORDONI U., *600*.

Fisiologia umana. — L'attitudine fagocitaria ed il comportamento citochimico dei leucociti essudati in peritoneo nel corso del digiuno prolungato e della malnutrizione calorica, LIVREA G. e DE STEFANO F., *424*.

G

Genetica. — Indagini genetiche sulla predisposizione al favismo. – III. Distribuzione delle frequenze geniche per il locus *Gd* in Sardegna. Interazione con la malaria e la talassemia al livello popolazionistico, BERNINI L. CARCASSI U., LATTE B., MOTULSKY A. G., ROMEI L. e SINISCALCO M., *115*.

Geofisica. — L'effetto della firmo-viscosità sulla risultante del movimento associato alle onde di Rayleigh, CALOI P., *485*.

Geologia. — Contributo alla conoscenza della serie paleozoica metamorfica nel Settore del Gennargentu, ATZENI A., *566*.

— La posizione stratigrafica delle marne a Pteropodi delle Langhe e della Collina di Torino ed il significato cronologico del Langhiano, CITA M. B. e ELTER G., *360*.

— Le sillon géosynclinal du Flysch tithonique-néocomien en Méditerranée occidentale, DURAND DELGA M., *579*.

— Osservazioni preliminari sull'età dei terreni preoligocenici del Monferrato, ELTER G., *573*.

— Le varie unità tettoniche della Toscana e della Liguria orientale, ELTER P., GIANNI E., TONGIORGI M. e TREVISAN L., *497*.

— Nuove osservazioni sulla geologia della regione montuosa posta a nord della Stura di Demonte fra Pietraporzio e Bersezio (Alpi Marittime), FRANCESCHETTI B., *87*.

— Distribuzione dell'uranio in alcuni calcari metamorfici di contatto presso Campiglia, LONGINELLI A., *370*.

Geologia. — Appunti sulle conoscenze attuali della stratigrafia neogenica toscana, TONGIORGI M., *377*.
— L'ambiente di formazione della « Scaglia rossa » toscana, TREVISAN L., *265*.
Geometria. — Su una generalizzazione dei piani di Hughes, ROSATI L. A., *303*.

I

Idrodinamica. — Sul moto uniforme turbolento delle correnti liquide. Nota I, MARCHI E., *313*.
— Sopra le onde di traslazione nei canali. – *A*) La equazione linearizzata. Nota I, SUPINO G., *239*.
— Sopra le onde di traslazione nei canali. – *A*) La equazione linearizzata. Nota II, SUPINO G., *472*.
— Sul moto uniforme turbolento delle correnti liquide. Nota II, MARCHI E., *521*.

M

Magnetofluidodinamica. — Sulle superficie d'onda in magnetofluidodinamica. Nota II, AGOSTINELLI C., *3*.
— Sulla stabilità dei moti magnetofluidodinamici stazionari. Nota I, AGOSTINELLI C., *477*.
Matematica. — Sur la monogénéité dans l'espace, PASCALI D. e GOGONEA S., *283*.
— Intorno al numero degli zeri di un polinomio nel campo reale. Nota I. SEGRE B., *155*.
— Intorno al numero degli zeri di un polinomio nel campo reale. Nota II, SEGRE B., *225*.
— Intorno al numero degli zeri di un polinomio nel campo reale. Nota III, SEGRE B., *465*.
Meccanica. — Teoria lineare della parete sottile e applicazioni, CICALA P., *232*.
— Sui problemi di meccanica delle terre relativi alla Torre di Pisa e su un modo per stabilizzare la Torre stessa, TERRACINA F., *321*.
— Influenza del taglio nella dinamica e nella statica delle piastre sottili. Nota II, VOLTERRA E., *33*.
Mineralogia. — Ricerche cristallografiche e termodifferenziali sul seleniato e sul cromato di sodio decaidrati, ALIETTI A., *95*.

O

Opere pervenute in dono all'Accademia, *461*, *658*.

P

Patologia. — Azione delle radiazioni ionizzanti sul contenuto in potassio, sodio e acqua del fegato di Ratto e delle sue frazioni cellulari, BRESCIANI F. e AURICCHIO F., *431*.
— Penetrazione e metabolismo degli ormoni tiroidei nelle cellule isolate di adenocarcinoma Ehrlich–ascite, ROCHE J., COVELLI I. e SALVATORE G., *614*.
Personale accademico, *453*, *650*.
Petrografia. — Notizie geologiche e petrografiche sui terreni eruttivi e metamorfici rilevati nel foglio Dorgali (Sardegna Orientale), D'AMICO C., GAZZI P., PELLIZZER R. e SIMBOLI G., *201*.
Presentazione di libri, *457*, *650*.
Presentazione di Note e Memorie *459*, *654*.

R

Relazioni di Commissioni, *460*, *654*.

V

Vulcanologia. — Coefficienti di viscosità del Magma Vesuviano e sue variazioni nel periodo storico, IMBÒ G., *248*.

Z

Zoologia. — Osservazioni sui neuroni secretorî del cerebro e dei gangli ventrali di un Ortottero (*Gryllotalpa gryllotalpa* L.), BAFFONI G. M., *400*.
— (Anatomia). Primi dati sul corredo nervoso del labbro orale di *Sepia officinalis*, GRAZIADEI P., *398*.
— Particolari nuovi sulla struttura dell'apparato nervoso destinato alla ventosa di *Ommatostrephes sagittatus*, GRAZIADEI P., *597*.
— Sulla localizzazione perivasale di una cospicua riserva di neoblasti in *Spirorbis pagenstecheri*, VANNINI E. e STAGNI A., *126*.

INDICI DEI FASCICOLI

FASCICOLO 1–2.

LUGLIO–AGOSTO 1960.

NOTE DI SOCI

AGOSTINELLI C., Sulle superficie d'onda in magnetofluidodinamica. Nota II. Pag. 3
CAMBI L., DUBINI PAGLIA E. e GIUFFRIDA C., Alogenuri idrazinici di Rh. – II Parte. Cloruri paramagnetici (pres. dal Socio *L. Cambi*) . . . . . » 8
CAMBI L. e DUBINI PAGLIA E., Complessi idrazinici del rodio: cianuri idrazinici (pres. dal Socio *L. Cambi*) . . . . . » 15
ROSSI–FANELLI A., IPATA P. L., FASELLA P. e MARCHETTI A., Sintesi biologica della trifosfotiamina: sintesi ad opera del *Mycobacterium* Milch (pres. dal Corrisp. *A. Rossi–Fanelli*) . . . . . » 22

NOTE PRESENTATE DA SOCI

SINGER I., Sur la représentation intégrale des applications linéaires continues des espaces L^p_L $(1 \leq p < +\infty)$ (pres. dal Socio *M. Picone*) . . . . . » 28
VOLTERRA E., Influenza del taglio nella dinamica e nella statica delle piastre sottili. Nota II (pres. dal Socio *A. Signorini*) . . . . . » 33
MUGGIA A., Regione di arresto per un solido di rotazione a prora schiacciata in corrente ipersonica assiale (pres. dal Corrisp. *C. Ferrari*) . . . . . » 38
FRESA A., Fotometria fotoelettrica nella penombra durante l'eclisse di luna del 24 marzo 1959 (pres. dal Corrisp. *M. Cimino*) . . . . . » 46
DENTE M., Scambio termico per fluidi non–Newtoniani in moto laminare in condotti circolari. – I. scambio termico per temperatura della parete costante. Parte I (pres. dal Socio *G. Natta*) . . . . . » 52
IANDELLI A., Su alcuni composti intermetallici e semimetallici del Gadolinio (pres. dal Socio *L. Rolla*) . . . . . » 62
FERRO R., Ricerche sulle leghe dei metalli nobili con gli elementi più elettropositivi. – IV. Le fasi gamma dei sistemi magnesio–rodio e magnesio–palladio (pres. dal Socio *L. Rolla*). . . . . » 70
DI MODICA G., ROSSI P. F., RIVERO A. M. e BORELLO E., Su componenti flavonoidi da *Taxus baccata* L. Nota III (pres. dal Socio *A. Quilico*) . . » 74
CERLETTI P. e DE RITIS G., Ricerche sulla membrana degli eritrociti. – I. Effetto del K^+ e di altri ioni sull'isolamento delle membrane e sull'attività adenilato chinasica (pres. dal Corrisp. *A. Rossi–Fanelli*) . . . . . » 81
FRANCESCHETTI B. Nuove osservazioni sulla geologia della regione montuosa posta a nord della Stura di Demonte fra Pietraporzio e Bersezio (Alpi Marittime) (pres. dal Socio *Gb. Dal Piaz*) . . . . . » 87
ALIETTI A., Ricerche cristallografiche e termodifferenziali sul seleniato e sul cromato di sodio decaidrati (pres. dal Corrisp. *P. Gallitelli*) . . . . . » 95

Tosi L. e Ghiretti F., Determinazione del potenziale di ossido riduzione del citocromo *h* di *Cryptomphalus aspersus* (pres. dal Socio *L. Califano*) . Pag. 104
Gramuglio G., Appunti sulla distribuzione geografica dell'*Abies nebrodensis* (Lojac.) Mattei (pres. dal Corrisp. *E. Francini Corti*) . . . . . » 106
Bernini L., Carcassi U., Latte B., Motulsky A. G., Romei L. e Siniscalco M., Indagini genetiche sulla predisposizione al favismo. – III. Distribuzione delle frequenze geniche per il locus *Gd* in Sardegna. Interazione con la malaria e la talassemia al livello popolazionistico (pres. dal Corrisp. *G. Montalenti*) . . . . . » 115
Vannini E. e Stagni A., Sulla localizzazione perivasale di una cospicua riserva di neoblasti in *Spirorbis pagenstecheri* (pres. dal Corrisp. *U. D'Ancona*) » 126
Agnoli G. A. e Cotti E., La propagazione nel miocardio ventricolare del cuore di coniglio (pres. dal Socio *G. C. Pupilli*. . . . . » 130
Rossi A., Lo sviluppo del tubo neurale in code di embrioni di Anfibi anuri privati della corda dorsale. (Esperienze in *Bufo bufo* ed in *Rana esculenta*) (pres. dal Corrisp. *A. Stefanelli*) . . . . . » 136
Bertolini B., Lamelle annulate negli spermatozoi immaturi del rospo (*Bufo bufo* (L.)) (pres. dal Corrisp. *A. Stefanelli*) . . . . . » 141
Thermes G., Derivazione di elementi nervosi da cellule di natura mesodermica nella rigenerazione del cordone nervoso dei Lombricidi (*Allolobophora calliginosa* ed *Allolobophora rosea*) (pres. dal Corrisp. *A. Stefanelli*) . . . . » 145
Pinacci R. L'andamento dell'attività mitotica nel mielencefalo di un Anfibio anuro durante lo sviluppo (pres. dal Corrisp. *A. Stefanelli*) . . . . . » 150

FASCICOLO 3-4.

SETTEMBRE–OTTOBRE 1960.

NOTE DI SOCI

Segre B., Intorno al numero degli zeri di un polinomio nel campo reale. Nota I. Pag. 155
Savelli R., I clorocromoplasti . . . . . » 162

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Ferrarese G., Su di un sistema di equazioni differenziali ordinarie singolari riguardante l'equilibrio di una massa stellare (pres. dal Socio *M. Picone*). » 170
Marcus S., Sur un problème de Z. Zahorski concernant les points où la dérivée est infinie (pres. dal Socio *M. Picone*) . . . . . » 176
Caraman P., La différentiabilité des représentations quasi-conformes tridimensionnelles (pres. dal Socio *B. Segre*) . . . . . » 181
Dente M., Scambio termico per fluidi non-Newtoniani in moto laminare in condotti circolari. – I. Scambio termico per temperatura della parete costante. Parte II (pres. dal Socio *G. Natta*) . . . . . » 186
Bassi I. W., Struttura di alcuni polivinilalchileteri isotattici cristallini (pres. dal Socio *G. Natta*) . . . . . » 193
D'Amico C., Gazzi P., Pellizzer R. e Simboli G., Notizie geologiche e petrografiche sui terreni eruttivi e metamorfici rilevati nel foglio Dorgali (Sardegna Orientale) (pres. dal Socio *M. Gortani*) . . . . . » 201

Tosi L. e Ghiretti F., Ulteriori ricerche sugli enzimi respiratori di gasteropodi marini e terrestri. Proprietà del citocromo *h* (pres. dal Socio *L. Califano*) Pag. 207
Russo-Caia S., Aspetti biochimici della metamorfosi degli Insetti. L'acido ribonucleico durante lo sviluppo larvale e la metamorfosi di *Musca domestica* L. (pres. dal Socio *G. Cotronei*) . . . . . » 215
Merucci P., Vella L. e Zampieri A., Sulla attività emolitica della O-streptolisina (pres. dal Corrisp. *D. Marotta*). . . . . » 221

FASCICOLO 5.

Novembre 1960.

NOTE DI SOCI

Segre B., Intorno al numero degli zeri di un polinomio nel campo reale. Nota II Pag. 225
Cicala P., Teoria lineare della parete sottile e applicazioni . . . . . » 232
Supino G., Sopra le onde di traslazione nei canali. – *A*) La equazione linearizzata. Nota I . . . . . » 239
Nobile V., Sul calcolo delle orbite planetarie. Nuova impostazione del problema e determinazione diretta della soluzione unica che questo ammette. Nota II » 244
Imbò G., Coefficienti di viscosità del Magma Vesuviano e sue variazioni nel periodo storico . . . . . » 248
Cambi L. e Dubini Paglia E., Ioduri idrazinici e cianuri derivati di Rh^{III}. Nota IV (pres. dal Socio *L. Cambi*) . . . . . » 253
Natta G., Porri L., Corradini P., Zanini G. e Ciampelli F., Polimeri 1,4 *trans* isotattici del pentadiene 1,3 (pres. dal Socio *G. Natta*) . . . . . » 257
Trevisan L., L'ambiente di formazione della « Scaglia rossa » toscana . . . . . » 265
Trotter A., Singolari caratteri di alcune specie e varietà di *Alternanthera* (Amarantacee) e di altre Fanerogame . . . . . » 268
Savelli R., Fruttificazione allo stato di plantula in *Chenopodium amaranticolor*, e considerazioni sulla pedogenesi, neotenia e fenomeni affini . . . » 277

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Pascali D. e Gogonea S., Sur la monogénéité dans l'espace (pres. dal Socio *M. Picone*) . . . . . Pag. 283
De Vito L., Sulla equazione integro-differenziale di tipo ellittico di Volterra (pres. dal Socio *M. Picone*) . . . . . » 289
Kósa A., Nuove ricerche di calcolo delle variazioni basate sul concetto di punti di concentrazione dovuto al Picone (pres. dal Socio *M. Picone*) . . . . » 295
Merli L., Un teorema di unicità per il problema di Cauchy relativo alla equazione differenziale $x^{(n)} + a_1(t)\,x^{(n-1)} + \cdots + a_n(t)\,x = f(t, x, x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots \cdots, x^{(n-1)})$ (pres. dal Socio *G. Sansone*) . . . . . » 299
Rosati L. A., Su una generalizzazione dei piani di Hughes (pres. dal Corrisp. *G. Zappa*) . . . . . » 303
Grioli G., Onde di discontinuità ed elasticità asimmetrica (pres. dal Corrisp. *A. Tonolo*) . . . . . » 309
Marchi E., Sul moto uniforme turbolento delle correnti liquide. Nota I (pres. dal Corrisp. *G. Supino* . . . . . » 313
Terracina F., Sui problemi di meccanica delle terre relativi alla Torre di Pisa e su un modo per stabilizzare la Torre stessa (pres. dal Socio *G. Krall*) . . . » 321
Ballario M. C., Sui fattori di correzione per il passaggio da area apparente ad area corretta dei brillamenti cromosferici in radiazione di idrogeno (pres. dal Corrisp. *G. Righini*). . . . . » 330

DENTE M., Scambio termico per fluidi non-Newtoniani in moto laminare in tubi circolari. – II. Scambio termico per variabile temperatura della parete (pres. dal Socio *G. Natta*) . . . . . Pag. 336

POLI G., RIVOLTA B. e LA VECCHIA A., Comportamento elettrodico di monocristalli di antimonio (pres. dal Corrisp. *R. Piontelli*). . . . . » 345

CAUZZO G., MAZZUCATO U. e FOFFANI A., Cinetica di idrolisi di amidi N-sostituite. – Parte III: Benzanilide e derivati para-sostituiti (pres. dal Corrisp. *G. Semerano*) . . . . . » 348

FOFFANI A., MAZZUCATO U. e MIOTTI U., Spettri vibrazionali di alcuni tiocianati ed isotiocianati aril-alchilici (pres. dal Corrisp. *G. Semerano*) . . . . » 355

CITA M. B. e ELTER G., La posizione stratigrafica delle marne a Pteropodi delle Langhe e della Collina di Torino ed il significato cronologico del Langhiano (pres. dal Socio *G. B. Dal Piaz*) . . . . . » 360

LONGINELLI A., Distribuzione dell'uranio in alcuni calcari metamorfici di contatto presso Campiglia (pres. dal Corrisp. *L. Trevisan*) . . . . . » 370

TONGIORGI M., Appunti sulle conoscenze attuali della stratigrafia neogenica toscana (pres. dal Corrisp. *L. Trevisan*) . . . . . » 377

LIVREA G. e RICCERI G., Il comportamento delle attività transaminasiche del cuore e di alcuni altri organi del colombo bradicardico per inanizione assoluta o per malnutrizione orizanica (pres. dal Corrisp. *G. Amantea*) . . . . » 381

MELETTI P., Risultati di alcune prove di allevamento di piante di grano provenienti da cariossidi immature (pres. dal Socio *S. Tonzing*) . . . . . » 393

GRAZIADEI P., Primi dati sul corredo nervoso del labbro orale di *Sepia officinalis* (pres. dal Socio *A. Pensa*) . . . . . » 398

BAFFONI G. M., Osservazioni sui neuroni secretorî del cerebro e dei gangli ventrali di un Ortottero (*Gryllotalpa gryllotalpa* L.) (pres. dal Corrisp. *A. Stefanelli*) . . . . . » 400

CREPAX P. e FADIGA E., Eccitamenti afferenti e manifestazioni parossistiche corticocerebrali in Cani non predisposti alla epilessia riflessa e trattati con morfina (pres. dal Socio *G. C. Pupilli*) . . . . . » 405

CORAZZA R. e PARMEGGIANI P. L., Modificazioni dei ritmi pulsatori dell'ippocampo e del *neocortex* provocate dalla stimolazione elettrica ripetitiva del nervo ischiatico (pres. dal Socio *G. C. Pupilli*) . . . . . » 412

SOTGIU M. L. e ZUDDAS A. A., Modificazione dell'ampiezza del potenziale d'azione della singola fibra muscolare e nella tensione dell'intero muscolo in rapporto alla frequenza di stimolazione del nervo (pres. dal Socio *R. Margaria*) » 418

LIVREA G. e DE STEFANO F., L'attitudine fagocitaria ed il comportamento citochimico dei leucociti essudati in peritoneo nel corso del digiuno prolungato e della malnutrizione calorica (pres. dal Corrisp. *G. Amantea*) . . » 424

BRESCIANI F. e AURICCHIO F., Azione delle radiazioni ionizzanti sul contenuto in potassio, sodio e acqua del fegato di ratto e delle sue frazioni cellulari (pres. dal Socio *L. Califano*) . . . . . » 431

ROSSI A., Esperienze di asportazione dell'ependima presuntivo in embrioni di Anfibi anuri (pres. dal Corrisp. *A. Stefanelli*) . . . . . » 438

MUZII E., Nuove possibilità di studio del ricambio strutturale del tessuto osseo con ossitetraciclina (pres. dal Corrisp. *A. Stefanelli*) . . . . . » 444

MARINI M., Prime osservazioni sull'ultrastruttura dell'epitelio branchiale in larve di Anfibî urodeli (pres. dal Corrisp. *A. Stefanelli*) . . . . . » 448

Personale accademico . . . . . » 453

Comunicazioni varie . . . . . » 456

Presentazione di libri . . . . . » 457

Presentazione di Note e Memorie . . . . . » 459

Relazioni di Commissioni . . . . . » 460

Opere pervenute in dono all'Accademia presentate nella seduta del 19 nov. 1960 » 461

FASCICOLO 6.

DICEMBRE 1960.

NOTE DI SOCI

SEGRE B., Intorno al numero degli zeri di un polinomio nel campo reale. Nota III Pag. 465
SUPINO G., Sopra le onde di traslazione nei canali. – A) La equazione linearizzata. Nota II . . . . . » 472
AGOSTINELLI C., Sulla stabilità dei moti magnetofluidodinamici stazionari. Nota I » 477
CALOI P., L'effetto della firmo-viscosità sulla risultante del movimento associato alle onde di Rayleigh . . . . . » 485
CAMBI L. e DUBINI PAGLIA E., Monocloruri e ipocloruri idrazinici di Rh^{III}. Nota V (pres. dal Socio *L. Cambi*) . . . . . » 488
NATTA G., PORRI L. e CARBONARO A., Complesso cristallino organometallico contenente alluminio e cobalto avente proprietà catalitiche stereospecifiche (pres. dal Socio *G. Natta*) . . . . . » 491
ELTER P., GIANNINI E., TONGIORGI M. e TREVISAN L., Le varie unità tettoniche della Toscana e della Liguria orientale (pres. dal Corrisp. *L. Trevisan*) » 497

NOTE PRESENTATE DA SOCI

FICHERA G., Teorema di massimo modulo e unicità delle soluzioni generalizzate dei problemi al contorno (pres. dal Socio *M. Picone*) . . . . . Pag. 503
FOIAȘ C. e GUSSI G., Un théorème d'unicité de la solution du problème de Cauchy pour certains systèmes d'équations linéaires aux dérivées partielles (pres. dal Socio *M. Picone*) . . . . . » 509
CINQUINI S., Sopra il problema dell'approssimazione delle curve in forma parametrica e degli integrali (pres. dal Socio *G. Sansone*) . . . . . » 515
MARCHI E., Sul moto uniforme turbolento delle correnti liquide. Nota II (pres. dal Corrisp. *G. Supino*). . . . . » 521
PROVERBIO E., Sul calcolo d'orbita di stelle doppie a lungo periodo tenendo conto della legge delle aree (pres. dal Socio *F. Zagar*) . . . . . » 532
KRANJC A., La linea centrale di un'eclisse totale di Sole in quota (pres. dal Socio *F. Zagar*) . . . . . » 539
CAGLIOTI L., CAINELLI G. e MINUTILLI F., Isolamento di un nuovo acido triterpenico dalle sanse dell'*Olea europaea* (pres. dal Socio *A. Quilico*) . . . . » 544
PIOZZI F. e VITA-FINZI P., Gascromatografia di idrocarburi fenantrenici (pres. dal Socio *A. Quilico*) . . . . . » 549
CAGLIOTI L. e CAINELLI G., Idroborazione. – Reazione del diborano con il Δ^4-3-cheto-colestene. Nota I (pres. dal Socio *A. Quilico*) . . . . . » 555
PINO P., LORENZI G. P. e PREVITERA S., Polimeri vinilici otticamente attivi. – III. Poli-(S)-2-Metil-butil-vinil-etere (pres. dal Socio *G. Natta*) . . . . » 562
ATZENI A., Contributo alla conoscenza della serie paleozoica metamorfica nel Settore del Gennargentu (pres. dal Corrisp. *S. Vardabasso*) . . . . . » 566
ELTER G., Osservazioni preliminari sull'età dei terreni preoligocenici del Monferrato (pres. dal Socio *Gb. Dal Piaz*) . . . . . » 573
DURAND DELGA M., Le sillon géosynclinal du Flysch tithonique-néocomien en Méditerranée occidentale (pres. dal Socio *Gb. Dal Piaz*) . . . . . » 579
ARENA M., Anatomia comparata di alcuni organi vegetativi di *Abies nebrodensis* (Lojac.) Mattei e *Abies alba* Mill. (pres. dal Socio *E. Francini Corti*) » 586

GRAZIADEI P., Particolari nuovi sulla struttura dell'apparato nervoso destinato alla ventosa di *Ommatostrephes sagittatus* (pres. dal Socio *A. Pensa*) . Pag. 597
TESTA C. e BORDONI U., Le lesioni del labirinto nelle rane sottoposte a centrifugazione (pres. dal Socio *R. Margaria*) . . . . . » 600
BRACCHI F., CATTORINI M. e GUALTIEROTTI T., Distribuzione della frequenza di scarica della singola fibra del sistema muscolare dell'uomo durante contrazioni isometriche massimali (pres. dal Socio *R. Margaria*) . . . . . » 604
CORAZZA R. e PARMEGGIANI P. L., Relazioni elettrofisiologiche tra ippocampo e *neocortex* (pres. dal Socio *G. C. Pupilli*) . . . . . » 609
ROCHE J., COVELLI I. e SALVATORE G., Penetrazione e metabolismo degli ormoni tiroidei nelle cellule isolate di adenocarcinoma Ehrlich-ascite (pres. dal Socio *L. Califano*) . . . . . » 614
GULÌ E., Sulle necrosi encefaliche tardive da Roentgenirradiazione nell'uomo (pres. dal Corrisp. *A. Giordano*) . . . . . » 627
RUSSO-CAIA S., Aspetti biochimici della metamorfosi degli Insetti. L'acido desossiribonucleico durante lo sviluppo larvale e la metamorfosi di *Musca domestica* L. (pres. dal Socio *G. Cotronei*) . . . . . » 630
GAUDIOSI M. R. e SACCHI C. F., Sul significato ecologico dell'azoto conchigliare nell'Elicide dunicola *Euparypha pisana* (Müll.) (pres. dal Corrisp. *G. Montalenti*) . . . . . » 634
GHIANI P. e FEDERICI L., Sulla citologia del pancreas endocrino nei Teleostei. Ricerche sperimentali in *Gambusia holbrooki* Grd. (pres. dal Corrisp. *E. Remotti*) . . . . . » 639

COMMEMORAZIONI

GHIGI A., Commemorazione del Socio Umberto Pierantoni . . . . . » 645

Personale accademico . . . . . » 650
Presentazione di libri . . . . . » 650
Presentazione di Note e Memorie . . . . . » 654
Relazioni di Commissioni . . . . . » 654
Congressi . . . . . » 654
Comunicazioni varie . . . . . » 656
Opere pervenute in dono all'Accademia presentate nella seduta del 10 dicembre 1960 . . . . . » 658
Errata-Corrige . . . . . » 659

Indice per Autori . . . . . » 663
Indice per materie . . . . . » 668
Indici dei fascicoli . . . . . » 672